

# Simulazione di Compito

31 maggio 2024

Tempo a disposizione: 2 ore.

1. Sia  $A = \mathbb{Z}[x]/(x^3 - 1)$ .
  - i) Descrivi gli ideali primi e massimali di  $A$ .
  - ii) Trova gli elementi nilpotenti di  $A/(3)$ .
  - iii) L'anello  $A$  è isomorfo a  $\mathbb{Z}[x]/(x - 1) \times \mathbb{Z}[x]/(x^2 + x + 1)$ ?
2. Sia  $A = \mathbb{Q}[x, y]/(f)$ , con  $f(x, y) = x^2y - y - 1 \in \mathbb{Q}[x, y]$ .
  - i) Mostra che  $A$  è isomorfo a un sottoanello di  $\mathbb{Q}(t)$ .
  - ii) Dimostra che  $A$  è un PID e descrivi gli ideali primi di  $A$ .
3. Sia  $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$  il polinomio  $x^{12} - 4$ , e sia  $L$  il suo campo di spezzamento su  $\mathbb{Q}$ .
  - i) Trova il gruppo di Galois di  $L$  su  $\mathbb{Q}$ .
  - ii) Mostra che  $L$  ha un'unica sottoestensione  $K$  di grado 6 e di Galois su  $\mathbb{Q}$ .
  - iii) Calcola  $G(K | \mathbb{Q})$  e descrivi le sottoestensioni di  $K$ .