Soluzioni test 3

giovedì 9 novembre 2023 12:47

Esercizio 1) Date $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
(i) $A \sim_S B \Rightarrow rg(A) = rg(B)$
(ii) $A \sim_D B \Rightarrow rg(A) = rg(B)$
(iii) $m = n$ e $rg(A) = rg(B) = n \Rightarrow A \sim_S B$ e $A \sim_D B$

ES. 1

(i) VERO. DIMOSTRAZIONE 1: $A \sim_S B \Longrightarrow \exists T$ invertibile t.c. $A = TB \Rightarrow A = T \cdot B \cdot \underset{\text{Matrice identità}}{I} \Rightarrow A \sim_{SD} B$
Ma dalla teoria sappiamo che $A \sim_{SD} B \Leftrightarrow rg(A) = rg(B)$

DIMOSTRAZIONE 2: $A \sim_S B \Longrightarrow \exists T$ invertibile t.c. $A = TB \Rightarrow \operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} B$, infatti $x \in \operatorname{Ker} A \Leftrightarrow Ax = 0 \Leftrightarrow TBx = 0 \overset{T \text{ invertibile}}{\Leftrightarrow} Bx = 0 \Leftrightarrow x \in \operatorname{Ker} B$
Ma allora dalla formula delle dimensioni:
$n = \dim \operatorname{Ker} A + rg A$ e $n = \dim \operatorname{Ker} B + rg B \Rightarrow rg A = rg B$

DIMOSTRAZIONE 3: Le S-equivalenze derivano da operazioni di riga, che non cambiano il rango

(ii) VERO. DIMOSTRAZIONE 1: $A \sim_D B \Longrightarrow \exists T$ invertibile t.c. $A = BT \Rightarrow A = \underset{\text{Matrice identità}}{I} \cdot B \cdot T \Rightarrow A \sim_{SD} B$
Ma dalla teoria sappiamo che $A \sim_{SD} B \Leftrightarrow rg(A) = rg(B)$

DIMOSTRAZIONE 2: $A \sim_D B \Longrightarrow \exists T$ invertibile t.c. $A = BT \Rightarrow \operatorname{Im} A = \operatorname{Im} B$, infatti $y \in \operatorname{Im} A \Leftrightarrow y = Ax \Leftrightarrow y = BTx = B(Tx) \overset{T \text{ invertibile}}{\Leftrightarrow} y \in \operatorname{Im} B$
Ma allora in particolare $rg(A) = \dim \operatorname{Im} A = \dim \operatorname{Im} B = rg B$

DIMOSTRAZIONE 3: Le D-equivalenze derivano da operazioni di colonna, che non cambiano il rango

(iii) VERO: DIMOSTRAZIONE 1: A, B quadrate di rango $= n \Rightarrow A, B$ invertibili $\Rightarrow A = \underbrace{(AB^{-1})}_{\text{invertibile}} B$ e $A = B \underbrace{(B^{-1}A)}_{\text{invertibile}} \Rightarrow A \sim_S B$ e $A \sim_D B$

DIMOSTRAZIONE 2: A, B quadrate di rango $= n \Rightarrow \begin{cases} \text{quando riduco a scala completa per righe ottengo } I \\ \text{quando riduco a scala completa per colonne ottengo } I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \sim_S I \text{ e } B \sim_S I \\ A \sim_D I \text{ e } B \sim_D I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \sim_S B \\ A \sim_D B \end{cases}$

Esercizio 2)
(i) Dire quali delle seguenti matrici sono S-equivalenti o D-equivalenti:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(ii) Dire per quali valori dei parametri si ha $A \sim_S B$, $A \sim_D B$, $A \sim_{SD} B$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a' \\ 0 & 1 & b' \\ 0 & 0 & c' \end{bmatrix}.$$

RIPASSO DI TEORIA.

$A \sim_S B \Leftrightarrow A$ si ottiene da B per operazioni per riga

$\Leftrightarrow$ siano $\tilde{A} :=$ riduzione completa a scalini per riga di A (la colonna dei pivot è nulla, ad eccezione del pivot)
$\tilde{B} :=$ riduzione completa a scalini per riga di B (la colonna dei pivot è nulla, ad eccezione del pivot)
allora $\tilde{A} = \tilde{B}$

$\tilde{A}$ la chiameremo anche "forma canonica di A per S-equivalenza"

$A \sim_D B \Leftrightarrow A$ si ottiene da B per operazioni per colonna

$\Leftrightarrow$ siano $\tilde{A} :=$ riduzione completa a scalini per colonna di A (la riga dei pivot è nulla, ad eccezione del pivot)
$\tilde{B} :=$ riduzione completa a scalini per colonna di B (la riga dei pivot è nulla, ad eccezione del pivot)
allora $\tilde{A} = \tilde{B}$

$\tilde{A}$ la chiameremo anche "forma canonica di A per D-equivalenza"

ES. 2

(i) S-EQUIVALENZA: A, B, C sono già ridotte a scalini complete per righe e sono tutte tra loro diverse
$\Rightarrow$ nessuna coppia di matrici è S-equivalente

D-EQUIVALENZA: $A \sim_D \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim_D \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \tilde{A}$

$$B \sim_D \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim_D \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \tilde{B}$$

$$C \sim_D \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim_D \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \tilde{C}$$

$\Rightarrow$ sono tutte D-equivalenti

(ii)

<u>S-EQUIVALENZA</u>:
- Se $c = c' = 0$ allora A e B sono nella forma canonica, quindi $A \sim_S B \iff a = a' \wedge b = b'$
- Se $c = 0$ e $c' \neq 0$, allora A è nella forma canonica e $B \sim_S \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, che sono diverse
  $\Rightarrow$ non sono S-equivalenti
- Se $c \neq 0$ e $c' = 0$, allora B è nella forma canonica e $A \sim_S \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, che sono diverse
  $\Rightarrow$ non sono S-equivalenti
- Se $c \neq 0$ e $c' \neq 0$ $\Rightarrow A \sim_S \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_S B$
  $\Rightarrow A \sim_S B$

In conclusione $A \sim_S B \iff c \neq 0$ e $c' \neq 0$ oppure $c = c' = 0$ e $a = a'$ e $b = b'$

<u>D-EQUIVALENZA</u>: $A \sim_D \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, $B \sim_D \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c' \end{pmatrix}$, quindi
- Se $c = c' = 0$ allora $A \sim_D B$
- Se $c = 0$ e $c' \neq 0$ allora $A \sim_D \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \tilde{A}$
  e $B \sim_D \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \tilde{B}$ ma $\tilde{B} \neq \tilde{A} \Rightarrow A$ non è D-equiv a B
- Se $c \neq 0$ e $c' = 0$ allora $A \sim_D \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \tilde{A}$
  e $B \sim_D \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \tilde{B}$ ma $\tilde{B} \neq \tilde{A} \Rightarrow A$ non è D-equiv a B
- Se $c \neq 0$ e $c' \neq 0$ allora $A \sim_D \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_D B$
  $\Rightarrow A \sim_D B$

In conclusione $A \sim_D B \iff c \neq 0$ e $c' \neq 0$ oppure $c = c' = 0$

<u>SD-EQUIVALENZA</u>: $A \sim_{SD} B \iff rg A = rg B \iff c \neq 0$ e $c' \neq 0$ oppure $c = c' = 0$

Esercizio 3) Sia $U \subseteq \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato da

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Scrivere le equazioni cartesiane di U.

ES 3

Sappiamo dalla teoria che per scrivere le equazioni cartesiane di $U = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ bisogna ridurre a scala per righe la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & x_1 \\ -1 & -2 & -3 & x_2 \\ 2 & 0 & 2 & x_3 \\ -2 & 1 & -1 & x_4 \end{pmatrix}$ e porre a zero i termini dell'ultima colonna a destra che hanno il resto della riga nulla.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & x_1 \\ -1 & -2 & -3 & x_2 \\ 2 & 0 & 2 & x_3 \\ -2 & 1 & -1 & x_4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{A_2 + A_1 \\ A_3 - 2A_1 \\ A_4 + 2A_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_1 + x_2 \\ 0 & -6 & -6 & x_3 - 2x_1 \\ 0 & 7 & 7 & x_4 + 2x_1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{A_3 + 6A_2 \\ A_4 - 7A_2}]{} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 4x_1 + 6x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 - 5x_1 - 7x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + x_3 = 0 \\ -5x_1 - 7x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$ sono le equazioni cartesiane di U

Esercizio 4) Sia $W \subseteq \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato da

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Sia U il sottospazio dell'esercizio 3). Calcolare una base per $U+W$ e una per $U\cap W$.

ES 4

$U = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ e $W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

Applico l'algoritmo di Zassenhaus:

$$A = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 2 & -2 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 0 & 1 & 3 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 2 & -1 & 4 & -3 & 2 & -1 \\ \hline 2 & -1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{A_2-3A_1 \\ A_3-4A_1 \\ A_5-2A_1 \\ A_6-A_1}]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 2 & -2 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -6 & 7 & 0 & 1 & -6 & 7 \\ 0 & 1 & -6 & 7 & 0 & 1 & -6 & 7 \\ \hline 0 & 1 & -6 & 7 & -2 & 2 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -1 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[\substack{A_3-A_2 \\ A_4-A_2 \\ A_5-A_2 \\ A_6-A_2}]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 2 & -2 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -6 & 7 & 0 & 1 & -6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & -1 & 0 & 4 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{A_6 \leftrightarrow A_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 2 & -2 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -6 & 7 & 0 & 1 & -6 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & -1 & 0 & 4 & -5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ Una base di $U+W$ è $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}$ e una base di $U\cap W$ è $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$

Esercizio 5) Sia $\alpha = -1 + i\sqrt{3} \in \mathbb{C}$. Calcolare α^9.

ES 5

$\alpha^2 = (-1 + i\sqrt{3})(-1 + i\sqrt{3}) = 1 - 3 - 2i\sqrt{3} = -2 - 2i\sqrt{3} = -2(1+i\sqrt{3})$

$\alpha^3 = \alpha^2 \cdot \alpha = -2(1+i\sqrt{3})(-1+i\sqrt{3}) = -2\,(-3-1) = 8$

$\Rightarrow \alpha^9 = (\alpha^3)^3 = 8^3 = 512$

Esercizio 6) Sia $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, sia $A = \begin{bmatrix} i & 1+i \\ 0 & -i \end{bmatrix}$ e sia $f: V \to V$ tale che

$$f(X) = AX + XA.$$

(i)Dimostrare che f è lineare,

(ii)Trovare la matrice associata a f rispetto alle basi canoniche (in partenza e in arrivo),

(iii)Trovare la matrice $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)$ con

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -i & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

(iv) Determinare basi per Ker$f$ e per Imf e determinare le loro equazioni cartesiane.

ES 6

(i) $f(X+Y) = A(X+Y) + (X+Y)A = AX + AY + XA + YA = (AX+XA) + (AY+YA) = f(X) + f(Y)$

$f(\lambda X) = A(\lambda X) = \lambda AX = \lambda f(X)$

(ii)

RIPASSO TEORIA

In generale, sia $f: V \to W$ lineare, siano $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V e $\mathcal{B}' = \{v_1', \dots, v_m'\}$ base di W. Si ha che

$\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f) = \left([f(v_1)]_{\mathcal{B}'} \,\middle|\, \dots \,\middle|\, [f(v_n)]_{\mathcal{B}'} \right)$ e vale $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f) \cdot [x]_{\mathcal{B}} = [f(x)]_{\mathcal{B}'}$ $\forall x \in V$

Osserviamo che $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 1+i \\ 0 & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 1+i \\ 0 & -i\end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} ai + c(1+i) & bi + d(1+i) \\ -ci & -di \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ai & a(1+i) - bi \\ ci & c(1+i) - di \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ai + c(1+i) & a(i+1) + d(i+1) \\ 0 & c(i+1) - 2di \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ai + c(1+i) & a(i+1) + d(i+1) \\ 0 & c(i+1) - 2di \end{pmatrix}$. Quindi

$$\begin{cases} f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i & i+1 \\ 0 & 0\end{pmatrix} \\ f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} \\ f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i+1 & 0 \\ 0 & i+1\end{pmatrix} \\ f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i+1 \\ 0 & -2i\end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow M_C^C(f) = \begin{pmatrix} 2i & 0 & 1+i & 0 \\ 1+i & 0 & 0 & 1+i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+i & -2i \end{pmatrix}$$

(iii)

$$\begin{cases} f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i & i+1 \\ 0 & 0\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} + (1-i)\begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0\end{pmatrix} \\ f\begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} \\ f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -i & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i(i+1) & 0 \\ 0 & -i(i+1)\end{pmatrix} = -(i+1)\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i\end{pmatrix} \\ f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ 0 & -2i\end{pmatrix} = (1-i)\begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow M_{B'}^{B}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -(i+1) & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1-i & 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}$$

(iv) $\boxed{\mathrm{Im}\, f}$: $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, M_C^C(f) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 2i \\ 1+i \\ 0 \\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i+1 \\ 0 \\ 0 \\ i+1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1+i \\ 0 \\ -2i\end{pmatrix}\right)$, per trovarne una base basta ridurre a scala per colonne la matrice $B = \begin{pmatrix} 2i & i+1 & 0 \\ 1+i & 0 & i+1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & i+1 & -2i\end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 2i & i+1 & 0 \\ 1+i & 0 & i+1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & i+1 & -2i\end{pmatrix} \xrightarrow[B^2 + \frac{i-1}{2}B^1]{} \begin{pmatrix} 2i & 0 & 0 \\ 1+i & -1 & i+1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & i+1 & -2i\end{pmatrix} \xrightarrow[A^3 + (i+1)A^2]{} \begin{pmatrix} 2i & 0 & 0 \\ 1+i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & i+1 & 0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Una base di $\mathrm{Im}\, f$ è $\left\{\begin{pmatrix} 2i \\ 1+i \\ 0 \\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ i+1\end{pmatrix}\right\}$, che in matrici è $\left\{\begin{pmatrix} 2i & i+1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & i+1\end{pmatrix}\right\}$

Troviamo le equazioni cartesiane:

$$B := \begin{pmatrix} 2i & 0 & x_1 \\ 1+i & -1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 \\ 0 & i+1 & x_4\end{pmatrix} \xrightarrow[B_2 + \frac{i-1}{2}B_1]{} \begin{pmatrix} 2i & 0 & x_1 \\ 0 & -1 & x_2 + \frac{i-1}{2}x_1 \\ 0 & 0 & x_3 \\ 0 & i+1 & x_4\end{pmatrix} \xrightarrow[B_4 + (i+1)B_2]{} \begin{pmatrix} 2i & 0 & x_1 \\ 0 & -1 & x_2 + \frac{i-1}{2}x_1 \\ 0 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & x_4 + (i+1)x_2 - x_1\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Le equazioni cartesiane sono $\begin{cases} x_3 = 0 \\ -x_1 + (i+1)x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$

$\boxed{\mathrm{Ker}\, f}$ $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, M_C^C(f)$. Dato che $x \in \mathrm{Ker}\, M_C^C(f) \iff M_C^C(f) \cdot x = 0$ allora gli elementi di $\mathrm{Ker}\, M_C^C(f)$ sono tutte e sole le soluzioni del sistema lineare $M_C^C(f) \cdot x = 0$, ovvero $\begin{pmatrix} 2i & 0 & 1+i & 0 \\ 1+i & 0 & 0 & 1+i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+i & -2i\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0\end{pmatrix}$

Troviamo un sistema equivalente riducendo a scala per righe:

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 2i & 0 & 1+i & 0 & 0 \\ 1+i & 0 & 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+i & -2i & 0\end{array}\right) \xrightarrow[B_2 + \left(\frac{i-1}{2}\right)B_1]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 2i & 0 & i+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+i & -2i & 0\end{array}\right) \xrightarrow[B_4 + (1+i)B_2]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 2i & 0 & i+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ il sistema equivalente è $\begin{cases} 2i x_1 + (i+1)x_3 = 0 \\ -x_3 + (i+1)x_4 = 0 \end{cases}$

x_1 e x_3 sono variabili di pivot

x_2 e x_4 sono variabili libere

Ponendo $x_2 = 0$ e $x_4 = 1$ ottengo $\begin{cases} x_3 = i+1 \\ x_1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ i+1 \\ 1\end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\, f$

Ponendo $x_2 = 1$ e $x_4 = 0$ ottengo $\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0\end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\, f$

$\Rightarrow$ Una base di $\mathrm{Ker}\, f$ è $\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ i+1 \\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0\end{pmatrix}\right\}$, che in matrici è $\left\{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ i+1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$

Troviamo le equazioni cartesiane:

$$B := \begin{pmatrix} -1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ i+1 & 0 & x_3 \\ 1 & 0 & x_4\end{pmatrix} \xrightarrow[B_3 + (i+1)B_1]{} \begin{pmatrix} -1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 + x_1(i+1) \end{pmatrix}$$

Troviamo le equazioni cartesiane:

$$B := \begin{pmatrix} -1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ i+1 & 0 & x_3 \\ 1 & 0 & x_4 \end{pmatrix} \xrightarrow[B_4 + B_1]{B_3 + (i+1)B_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 + x_1(i+1) \\ 0 & 0 & x_4 + x_1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Le equazioni cartesiane sono $\begin{cases} x_3 + x_1(i+1) = 0 \\ x_4 + x_1 = 0 \end{cases}$