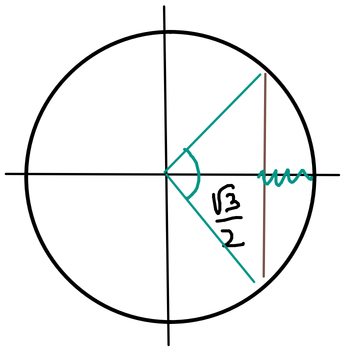
Esercizio 11 Risolvere la disequazione $\cos\left(\frac{2}{1+x^2}\right) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

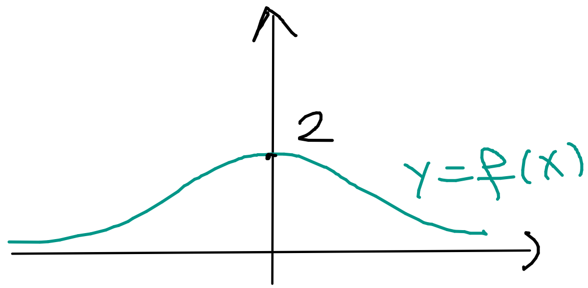


Chiamiamo $f(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$.

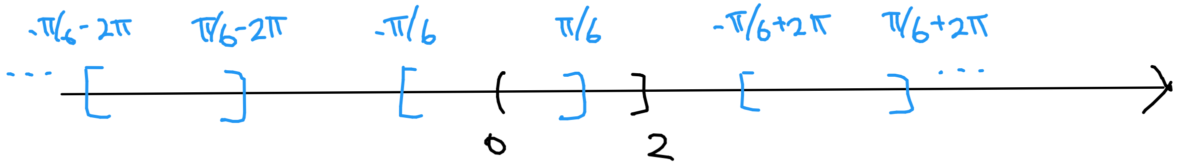
Ricordando che $\cos\left(\pm\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, e' abbastanza immediato notare che la disequazione e' vera SSE $f(x)$ appartiene ad uno degli intervalli $\left[-\frac{\pi}{6}+2k\pi, \frac{\pi}{6}+2k\pi\right]$, $k \in \mathbb{Z}$.

Cerchiamo di usare un poco di furbizia...

Notiamo che $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$, che la funzione e' pari $\left[\text{infatti } f(-x) = \dfrac{2}{1+(-x)^2} = \dfrac{2}{1+x^2} = f(x)\right]$ e che 0 e' un punto di massimo assoluto $\left[\dfrac{2}{1+0^2} \geq \dfrac{2}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}\right]$.



In particolare $\mathrm{Imm}(f) = (0, 2]$.



Come si evince dalla figura, $\mathrm{Imm}(f) \cap \left[-\pi/6+2\pi k, \pi/6+2\pi k\right] = \emptyset$ per $k \neq 0$, quindi rimane in gioco un solo intervallo

Cerchiamo dunque tutte le $x \in \mathbb{R}$ tali che $0 \leq f(x) \leq \frac{\pi}{6}$

[dei valori $[-\frac{\pi}{6}, 0)$ non ci importa, f è positiva!].

Risolvendo otteniamo

$$\frac{2}{1+x^2} \leq \frac{\pi}{6} \iff \frac{12}{\pi} \leq 1 + x^2 \iff x^2 \geq \frac{12}{\pi} - 1 \iff$$

$$\iff x \geq \sqrt{\frac{12}{\pi} - 1} \quad \vee \quad x \leq -\sqrt{\frac{12}{\pi} - 1}.$$

Esercizio 12 Risolvere la disequazione $\cos\left(\frac{8}{1+x^2}\right) \geq \frac{1}{2}$

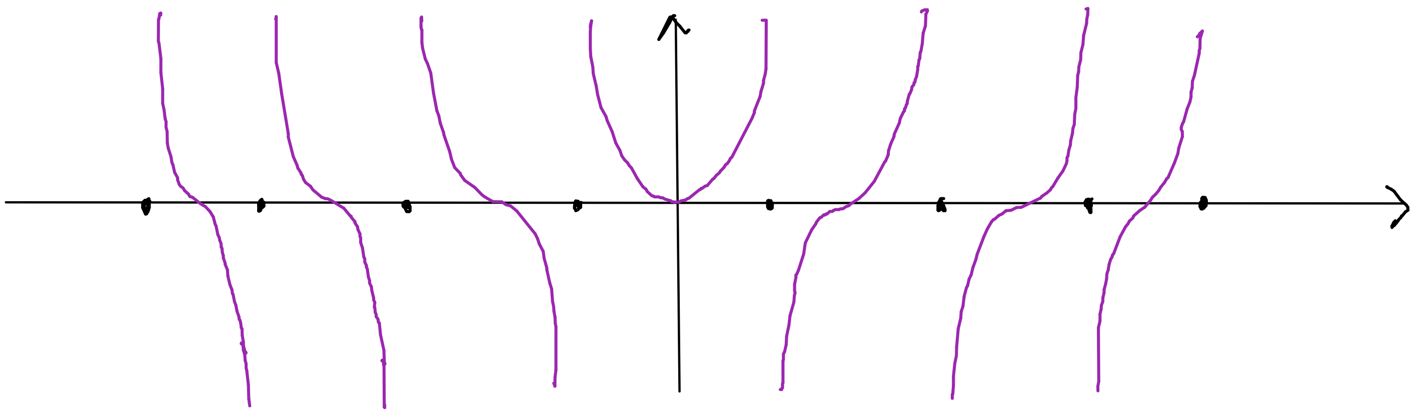
La soluzione è estremamente simile a quella dell'esercizio precedente (notiamo che gli intervalli ora sono del tipo $[-\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \frac{\pi}{3} + 2\pi k]$, $k \in \mathbb{Z}$). L'unica vera differenza è che ora $g(x) = \frac{8}{1+x^2}$ è tale che $\mathrm{Imm}(f) = (0, 8]$ ("più grande"), dunque le soluzioni saranno l'unione delle soluzioni delle disequazioni

$$0 \leq g(x) \leq \pi/3 \quad ; \quad -\pi/3 + 2\pi \leq g(x) \leq 2\pi + \frac{\pi}{3}$$

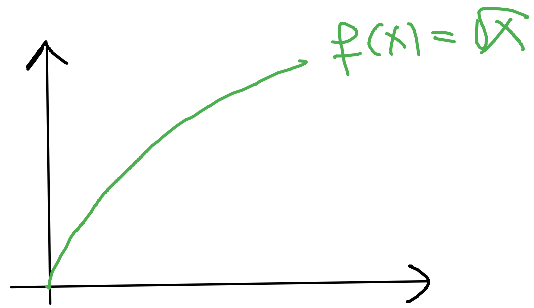
Esercizio 19 Sia $f(x) = \tan(x^2)$.

ⓐ Scrivere il dominio

Sappiamo che la tangente non e' definita nei punti $\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
Dunque il dominio di f e' $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} =$
$= \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi} \mid k \in \mathbb{N}\}$. Cogliamo l'occasione per disegnare un grafico approssimativo di f (funzione pari!):



⚠ Notiamo che il grafico si "stringe" sempre di più perche' la radice quadrata ha derivata decrescente.



(b) Trovare gli intervalli massimali I_k tali che $f|_{I_k}$ è iniettiva

<u>Definizione</u> [Sottoinsiemi massimali] Sia A un insieme e P una certa proprietà sui sottoinsiemi di A, ovvero una funzione $P: \mathcal{P}(A) \longrightarrow \{0, 1\}$, dove $\mathcal{P}(A) = \{\text{parti di } A\} = \{B \mid B \subseteq A\}$ (sostanzialmente, se $P(B) = 1$ per $B \subseteq A$, allora la proprietà P è VERA su B. Se invece $P(B) = 0$ allora la proprietà P è FALSA su B). Un sottoinsieme $B \subseteq A$ è MASSIMALE per la proprietà P se NON esiste $C \subseteq A$ tale che $B \subset C$ e $P(C) = 1$ (non esiste un sottoinsieme PIÙ GRANDE su cui la proprietà sia vera).

<u>Esempio</u> Sia $P: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \{0, 1\}$ tale che $P(B) = 1$ SSE $0 \notin B \vee 1 \notin B$ (il sottoinsieme non contiene 0 od 1). Allora $B_1 = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $B_2 = \mathbb{N} \setminus \{1\}$ sono gli unici due sottoinsiemi massimali per P

Soluzione esercizio 19b

Notiamo che nel nostro caso l'insieme e' $\mathbb{R}$ e $P(I \subseteq \mathbb{R}) = 1$ SSE I intervallo, $I \subseteq \text{Dominio}(f)$, $f|_I$ iniettiva.

⚠ Non basta che $f|_I$ sia iniettiva, si richiede anche che I sia un intervallo e si sottointende che $f|_I$ debbe essere definita, ovvero che $I \subseteq \text{Dom}(f)$.

Mostriamo che tutti gli intervalli del tipo $I_k^+ = \left(\sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi}, \sqrt{\frac{\pi}{2} + (k+1)\pi}\right)$ con $k \in \mathbb{N}$ sono intervalli massimali. Infatti:

- $I_k^+ \subseteq \text{Dom}(f)$ (per un pelo!)
- $f|_{I_k^+}$ e' iniettiva (guardare il grafico o derivare)

$\Big\}$ P e' vera sugli I_k

- se I intervallo e' tale che $I_k^+ \subset I$, allora I deve contenere per forza almeno uno tra $\sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi}$ e $\sqrt{\frac{\pi}{2} + (k+1)\pi}$, dunque P non può essere vera su I perche' $I \not\subseteq \text{Dom}(f)$.

Allo stesso modo funzionano $I_k^- = \left(-\sqrt{\frac{\pi}{2} + (k+1)\pi}, -\sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi}\right)$, $k \in \mathbb{N}$.

Infine, anche gli intervalli $I^+=[0,\sqrt{\frac{\pi}{2}})$ e $I^-=(-\sqrt{\frac{\pi}{2}},0]$ sono massimali. Infatti:

- $I^+, I^- \subseteq Dom(f)$
- $f|_{I^+}$ e $f|_{I^-}$ sono iniettive

$\Big\}$ P è vera su I^+ e I^-

- se I intervallo è tale che $I^+ \subset I$, allora o $\sqrt{\frac{\pi}{2}} \in I$, e dunque $I \not\subseteq dom(f)$, oppure $\exists \varepsilon > 0$ tale che $(-\varepsilon, 0] \subseteq I$ (moralmente I "va un po' a sinistra"), e dunque $f|_I$ non è iniettiva (guardare il grafico per credere!). Uguale per I^-.

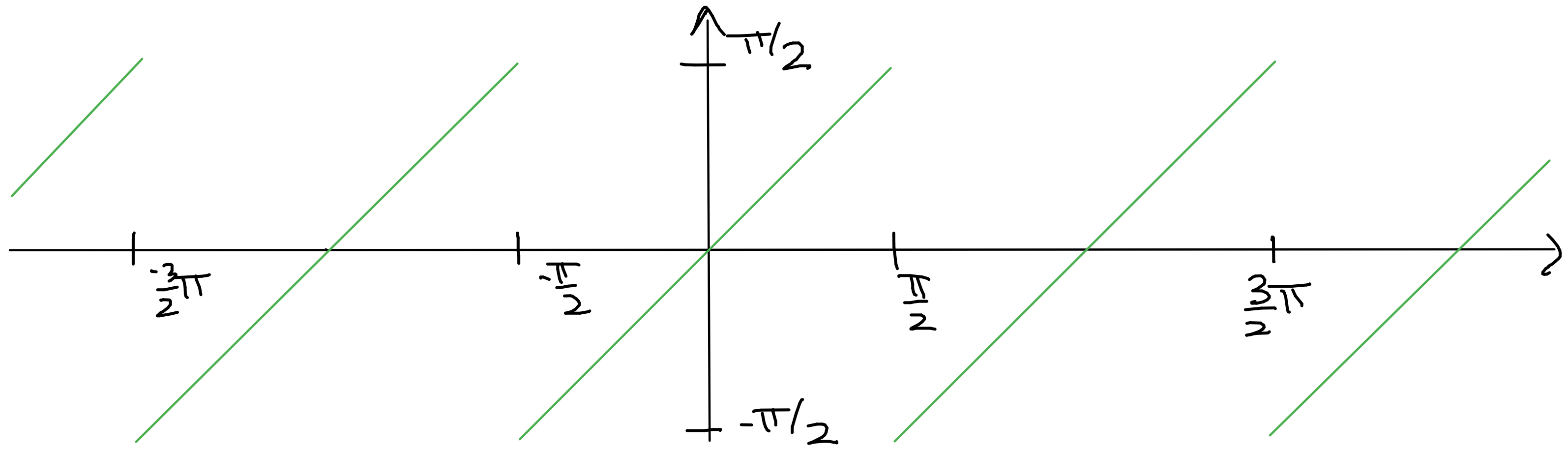
Abbiamo dimenticato qualche intervallo massimale? No, perchè essere un intervallo è una richiesta abbastanza rigida. In particolare abbiamo mostrato nel punto ⓐ che il dominio di f può essere scritto come un'unione (infinita) di intervalli ed abbiamo concluso che ognuno di essi è massimale per P tranne $(-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}})$, che invece contiene due intervalli massimali

ⓒ Scrivere le inverse di f ristretta agli intervalli massimali trovati nel punto precedente

Consideriamo innanzitutto $f|_{I_k^+} : I_k^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$.
Notiamo che $f|_{I_k^+}$ è iniettiva per definizione di I_k^+ ed è surgettiva, dunque è invertibile. Dimostriamo che l'inversa è la funzione $g_k^+ : \mathbb{R} \longrightarrow I_k^+$ $g_k^+(y) = \sqrt{\operatorname{arctg}(y) + k\pi}$.
Controlliamo innanzitutto di non aver scritto schifezze.
Sappiamo che $\operatorname{Imm}(\operatorname{arctg}) = (-\pi/2, \pi/2)$, dunque
$\operatorname{Imm}(g_k^+) = \left(\sqrt{-\frac{\pi}{2}+k\pi}, \sqrt{\frac{\pi}{2}+k\pi}\right) = I_k^+$. Inoltre g_k^+ è iniettiva perché arctg è iniettiva.
Ora:

- $(f|_{I_k} \circ g_k^+)(y) = f|_{I_k}\left(\sqrt{\operatorname{arctg}(y)+k\pi}\right) = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(y) + k\pi) =$
$= \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(y)) = y$, dove ho usato che tg è π-periodica
- $(g_k^+ \circ f|_{I_k})(x) = g_k^+(\operatorname{tg}(x^2)) = \sqrt{\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(x^2)) + k\pi} =$
$= \sqrt{x^2 - k\pi + k\pi} = \sqrt{x^2} = |x| = x$, dove ho usato che $x > 0$.

⚠ Perché $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(x^2)) = x^2 - k\pi$? Ricordo che $\operatorname{arctg}: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ dunque NON è vero che $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(x)) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$. In effetti, a voler fare il grafico di $\operatorname{arctg} \circ \operatorname{tg} : \operatorname{Dom}(\operatorname{tg}) \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ...



Cosa sta succedendo? Moralmente, $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(x)) = x - \pi k$, dove $k \in \mathbb{Z}$ è tale da "riportare" (traslare) x in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Abbiamo dimostrato che g_k^+ è l'inversa di $f|_{I_k^+}$. Le inverse di $f|_{I_k^-}$ si trovano in maniera analoga.

Per quanto riguarda I^+ ed I^-, la situazione è più gestibile.

Sia infatti $f|_{I^+} : I^+ \longrightarrow \mathbb{R}$. Notiamo che la funzione non è surgettiva ($\mathrm{Imm}(f|_{I^+}) = [0,+\infty)$), dunque dobbiamo invertire la funzione $f|_{I^+} : I^+ \longrightarrow [0,+\infty)$. Dimostriamo che l'inversa è la funzione $g^+ : [0,+\infty) \to I^+$ $g^+(y) = \sqrt{\operatorname{arctg}|_{[0,+\infty)}(y)}$.

Abbiamo scritto schifezze? No, e scrivere $\operatorname{arctg}|_{[0,+\infty)}$ e non arctg è stato fondamentale!

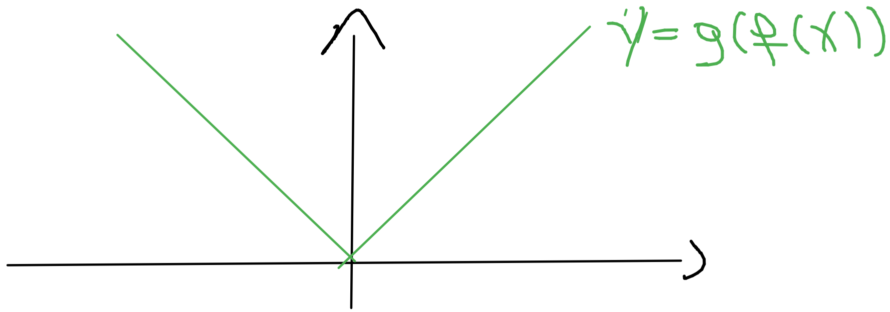
Ora

- $(f|_{I^+} \circ g^+)(y) = f|_{I^+}\left(\sqrt{\operatorname{arctg}|_{[0,+\infty)}(y)}\right) = \operatorname{tg}\left(\left|\operatorname{arctg}|_{[0,+\infty)}(y)\right|\right) =$
$= \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}|_{[0,+\infty)}(y)\right) = y$, dove ho usato che $\operatorname{arctg}|_{[0,+\infty)}(y) \geq 0$ per togliere il modulo.
- $(g^+ \circ f|_{I^+})(x) = g^+(\operatorname{tg}(x^2)) = \sqrt{\operatorname{arctg}|_{[0,+\infty)}(\operatorname{tg}(x^2))} = \sqrt{x^2} = |x| = x$, dove ho usato che $x \in [0, \sqrt{\frac{\pi}{2}})$ per togliere il modulo.

Dunque g^+ è l'inversa di $f|_{I^+}$. L'inversa di $f|_{I^-}$ si trova in maniera analoga.

Perché continuo a scrivere $\sqrt{x^2} = |x|$? Ricordo che $f(x) = x^2$ come $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non è invertibile, occorre considerare $f|_{[0,+\infty)} : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$. A questo punto la funzione $g: [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ $g(y) = \sqrt{y}$ è la sua inversa.

Come è fatto il grafico di $g \circ f : \mathbb{R} \to [0,+\infty)$? Noto che $g(f(x))$ non può essere uguale ad x se x è negativo (g è a valori in $[0,+\infty)$). In effetti $\sqrt{x^2} = -x$ se x è negativo. e quindi $g(f(x)) = |x|$.



<u>Esercizio 20</u> Estremamente simile al 19, che può tranquillamente essere utilizzato come guida per risolverlo (avevo voglia di scriverlo? Palesemente no, ma spero si capisca!).