Esercizio 1.
Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione 3 e sia $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ una base di V.
Determinare il polinomio minimo dell'endomorfismo $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dato da

$$f(\underline{v}_1) = v_2, f(\underline{v}_2) = \underline{v}_3, f(\underline{v}_3) = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \underline{v}_3$$

Cosa si può dire del polinomio caratteristico di f?

Più in generale, quanto valgono il polinomio minimo e il polinomio caratteristico dell'endomorfismo dato da

$$f(\underline{v}_1) = v_2, f(\underline{v}_2) = \underline{v}_3, f(\underline{v}_3) = a\underline{v}_1 + b\underline{v}_2 + c\underline{v}_3$$

per $a, b, c \in \mathbb{R}$?

Risolviamo direttamente il caso generale.

Sia $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ e sia $A := \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$, allora $A = \left([f(v_1)]_{\mathcal{B}} \,\middle|\, [f(v_2)]_{\mathcal{B}} \,\middle|\, [f(v_3)]_{\mathcal{B}} \right) = \left([v_2]_{\mathcal{B}} \,\middle|\, [v_3]_{\mathcal{B}} \,\middle|\, [a v_1 + b v_2 + c v_3]_{\mathcal{B}} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$

Calcoliamo quindi il polinomio caratteristico: $p_f(t) = \det(A - t\,Id) = \det \begin{pmatrix} -t & 0 & a \\ 1 & -t & b \\ 0 & 1 & c-t \end{pmatrix} = t^2(c-t) + 0 + a - 0 + bt - 0 =$

$= t^2(c-t) + a + bt = a + bt + ct^2 - t^3 = -t^3 + ct^2 + bt + a$

Calcoliamo ora il polinomio minimo, ricordando che $\deg(\varphi_f) \leq 3$:

- $\deg(\varphi_f) \neq 1$ perché f, Id sono lin indip: se fossero lin dip avremmo che $\exists \lambda$ t.c. $f = \lambda Id$, assurdo perché avrei $v_2 = f(v_1) = \lambda v_1$, ma v_1 e v_2 sono lin indip $\lightning$
- $\deg(\varphi_f) \neq 2$ perché f^2, f, Id sono lin indip: se fossero lin dip avremmo che $\exists \lambda, k$ t.c. $f^2 = \lambda Id + kf$, assurdo perché avrei $v_3 = f(v_2) = f^2(v_1) = \lambda v_1 + k f(v_1) = \lambda v_1 + k v_2$, ma v_1, v_2, v_3 sono lin indip $\lightning$

Ma allora $\deg(\varphi_f) = 3$ e, ricordando che $\varphi_f \mid p_f$ per Hamilton-Cayley e φ_f è monico, si ha che $\varphi_f(t) = t^3 - ct^2 - bt - a$

Esercizio 2.
Determinare il polinomio minimo della matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

e calcolare A^{2024}.

Sia φ_A il polinomio minimo di A.

- $\deg(\varphi_A) \neq 1$ perché A e Id sono lin indip: altrimenti $\exists \lambda$ t.c. $A = \lambda Id$, assurdo
- $\deg(\varphi_A) \neq 2$ perché A^2, A, Id sono lin indip: altrimenti $\exists k, \lambda$ t.c. $A^2 = \lambda A + k Id$ $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda+k & \lambda & -\lambda & 2\lambda \\ 0 & \lambda+k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+k & -\lambda \\ 0 & -\lambda & \lambda & -\lambda+k \end{pmatrix}$, assurdo

Quindi $\deg(\varphi_A) \geq 3$. Infine osserviamo che $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^2 \Rightarrow \varphi_A(t) = t^3 - t^2$

Calcoliamo ora A^{2024}.
Sapendo che $A^3 = A^2$, dimostriamo per induzione su k che $A^k = A^2 \quad \forall k \geq 3$

$\boxed{k=3}$ Visto prima

$\boxed{k \to k+1}$ $A^{k+1} = A \cdot A^k \underset{\text{Ipot induttiva}}{=} A \cdot A^2 = A^3 = A^2$

Quindi $A^{2024} = A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Esercizio 3.
Determinare una base per ciascuno dei fattori della decomposizione di Fitting di $\mathbb{R}^4$ data dall'endomorfismo $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ dato nella base canonica dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[A^3 \leftrightarrow A^1]{} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{A^2 + 2A^1 \\ A^3 + 2A^1 \\ A^4 + 3A^1}]{} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[A^3 \leftrightarrow A^2]{} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[A^4 - A^2]{} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow rg(A) = 3$

$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{A^2 - \frac{2}{3}A^1 \\ A^4 - A^1}]{} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -2 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow rg(A^2) = 2$

$A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 4 \\ -3 & -2 & 0 & -3 \\ -3 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{A^2 - \frac{3}{4}A^1 \\ A^4 - A^1}]{} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -3 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow rg(A^3) = 2$

Inoltre sappiamo che vale sempre $\operatorname{Im} A^3 \subseteq \operatorname{Im} A^2 \subseteq \operatorname{Im} A$

quindi per dimensione $\operatorname{Im} A^3 = \operatorname{Im} A^2$ e $\operatorname{Im} A^2 \neq \operatorname{Im} A$

Allora la decomposizione di Fitting è $\mathbb{R}^4 = \operatorname{Ker} A^2 \oplus \operatorname{Im} A^2$

Per calcolare delle basi di $\operatorname{Ker} A^2$ e $\operatorname{Im} A^2$ riduciamo A^2 a scalini per righe

$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{A_2 + \frac{2}{3}A_1 \\ A_n + \frac{2}{3}A_1}]{} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[A_3 - A_2]{} \begin{pmatrix} \boxed{3} & 2 & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{\frac{1}{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

quindi $A^2 e_1$ e $A^2 e_2$ sono lin indip e danno una base di $\operatorname{Im} A^2$

e $x \in \operatorname{Ker} A^2 \iff \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 0 + 3x_4 = 0 \\ 0 + \frac{1}{3}x_2 = 0 \end{cases} \iff x_2 = 0$ e $x_1 = -x_4 \iff x = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \\ -x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

quindi $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sono base di $\operatorname{Ker} A^2$

In conclusione $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $\operatorname{Im} A^2$ e $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $\operatorname{Ker} A^2$.

Esercizio 4.
Determinare una base di $\mathbb{R}^4$ di Jordan per l'endomorfismo $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ dato nella base canonica dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -2 & -1 \\ -4 & 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo il polinomio caratteristico di A.

$$p_A(t) = \det(A - tI) = \det \begin{pmatrix} 4-t & 0 & 4 & 2 \\ 2 & -t & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -2-t & -1 \\ -4 & 0 & -4 & -2-t \end{pmatrix} = -t \cdot \det \begin{pmatrix} 4-t & 4 & 2 \\ -2 & -2-t & -1 \\ -4 & -4 & -2-t \end{pmatrix} = -t \cdot \left((4-t)(2+t)^2 + 16 + 16 + 2 \cdot (+4) \cdot (-2-t) + 8(-2-t) - 4(4-t) \right)$$

$$= -t \cdot \left((4-t)(4+4t+t^2) + \cancel{32} - \cancel{16} - 8t - \cancel{16} - 8t - 16 + 4t \right)$$

$$= -t \left(\cancel{16} + \cancel{16t} + \cancel{4t^2} - \cancel{4t} - \cancel{4t^2} - t^3 - \cancel{16t} - \cancel{16} + \cancel{4t} \right)$$

$$= t^4$$

Per Hamilton-Cayley allora il polinomio minimo di A è della forma $\varphi_A(t) = t^k$ con $k \leq 4$.
Osserviamo ora che $A \neq 0$ e $A^2 = 0$ quindi $\varphi_A(t) = t^2$.

Calcoliamo ora una base di Jordan.
Vogliamo trovare base di un supplementare W_2 di $\operatorname{Ker} A$ in $\operatorname{Ker} A^2$: $\underset{\mathbb{R}^4}{\overset{\shortparallel}{\operatorname{Ker} A^2}} = \operatorname{Ker} A \oplus W_2$

Osserviamo che $\dim \operatorname{Ker} A = 2$ e che e_1, e_3 sono lin indip e $\operatorname{Span}\{e_1, e_3\} \cap \operatorname{Ker} A = \{0\} \Rightarrow$ Un supplementare è $W_2 = \operatorname{Span}\{e_1, e_3\}$

Ma allora si ha il seguente schema

$$\begin{array}{cl} e_1, e_2 & \text{base di } W_2 \\ \downarrow \quad \downarrow & \\ Ae_1, Ae_2 & \text{base di } \operatorname{Ker} A \end{array}$$

e quindi la base cercata è $\mathcal{B} = \{Ae_1, e_1, Ae_3, e_3\}$

Esercizio 5.
Determinare le possibili forme canoniche di Jordan per un endomorfismo $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tale che $f^4 = 4f^2$ e $\operatorname{tr}(f) = 0$.

$f^4 = 4f^2 \iff f^4 - 4f^2 = 0 \iff x^4 - 4x^2 \in I(f) \iff x^2(x-2)(x+2) \in I(f) \iff$

$\iff \varphi_f \mid x^2(x-2)(x+2)$

Ricordiamo che $\deg(\varphi_f) \leq 3$ e che in generale, se p_f è totalmente fattorizzato, $\operatorname{tr}(f)$ è la somma degli autovalori (contati con molteplicità algebrica).
Ci sono le seguenti possibilità:

- $\deg(\varphi_f) = 3$: Se $\varphi_f(x) = x^2(x-2)$ oppure $\varphi_f(x) = x^2(x+2)$
  è assurdo perché in tal caso $\varphi_f = p_f$ per grado e quindi la somma degli autovalori è rispettivamente 2 e -2 ↯
  Se $\varphi_f(x) = x(x-2)(x+2)$ allora $\operatorname{tr}(f) = 0$. Il pol min è totalmente fattorizz in fattori di grado 1 $\Rightarrow$ f è diagonalizzabile e quindi $J(f) = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 2 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$ (a meno di permutazione dei blocchi) ✓
- $\deg(\varphi_f) = 2$: Se $\varphi_f(x) = x(x-2)$ oppure $\varphi_f(x) = x(x+2)$ oppure $\varphi_f(x) = (x+2)(x-2)$
  assurdo perché in tal caso, ricordando che φ_f e p_f hanno gli stessi fattori irriducibili, si ha rispettivamente $p_f = x^*(x-2)^*$ e $p_f = x^*(x+2)^*$ e $p_f = (x+2)^*(x-2)^*$
  quindi la somma degli autovalori è rispettivamente $2 \circ 4$ e $-2 \circ -4$ e $2 \circ -2$ ↯

  Se $\varphi_f(x) = x^2$ allora $\operatorname{tr}(f) = 0$. $J(f)$ ha almeno un blocco 2×2, l'unica possibilità è $J(f) = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & 1 \\ & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (a meno di permutazione dei blocchi) ✓
- $\deg(\varphi_f) = 1$: Se $\varphi_f(x) = x-2$ oppure $\varphi_f(x) = x+2$
  assurdo perché in tal caso, ricordando che φ_f e p_f hanno gli stessi fattori irriducibili, si ha rispettivamente $p_f = (x-2)^3$ e $p_f = (x+2)^3$
  quindi la somma degli autovalori è rispettivamente 8 e -8 ↯

  Se $\varphi_f(x) = x$ allora $f = 0$ e $\operatorname{tr}(f) = 0 \Rightarrow J(f) = 0$ ✓

In conclusione le possibili forme di Jordan sono $\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 2 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & 1 \\ & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e 0 (a meno di permutazione dei blocchi).