Soluzioni Test 4

ESERCIZIO 1

Esercizio 1) Scrivere in forma trigonometrica le radici del polinomio

$$p(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4.$$

Ricordiamo l'identità $\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$, ma allora $p(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = \frac{z^5-1}{z-1}$

quindi le radici di $p(z)$ sono le radici quinte dell'unità tranne 1, ovvero:

$$\cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{5}\right) \quad \text{con } k = 1, 2, 3, 4$$

ESERCIZIO 2

Esercizio 2) Dato il piano $\pi : x - y + 2z = 1$ ed i punti $P_1 = (1, 1, 0)$, $P_2 = (2, 0, -1)$:
a) Trovare un'equazione parametrica per π.
b) Trovare un'equazione parametrica per la retta r passante per P_1 e P_2.
c) Dimostrare che r è parallela a π.
d) Trovare la distanza tra r e π.

a) <u>DIMOSTRAZIONE 1</u> $\pi : x - y + 2z = 1$ ovvero $\pi : x = 1 + y - 2z$, quindi un elemento generico è $\begin{pmatrix} 1+y-2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Quindi un'equazione parametrica è $\pi(s,t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

<u>DIMOSTRAZIONE 2</u>: π non è uno uno spazio vettoriale perché non passa per l'origine,
Consideriamo $\hat{\pi} : x - y + 2z = 0$ piano parallelo passante per l'origine.
Un elemento di $\hat{\pi}$ è della forma $\begin{pmatrix} y-2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
quindi $\hat{\pi} = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$
Per ottenere π dobbiamo traslare nuovamente $\hat{\pi}$ sommandogli un punto di π.
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \pi \Rightarrow \pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \hat{\pi} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$
Quindi un'equazione parametrica è $\pi(s,t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) L'equazione della retta passante per due punti è $r(t) = P_1 + t(P_2 - P_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) <u>DIMOSTRAZIONE 1</u> r è parallela a $\pi \Leftrightarrow r \cap \pi = \emptyset$
Supponiamo per assurdo che $\exists\, k, s, t \in \mathbb{R}$ t.c. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
ma allora $\begin{pmatrix} 1+k \\ 1-k \\ -k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+s-2t \\ s \\ t \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1+k = 1+s-2t \\ 1-k = s \\ t = -k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+k = 1+(1-k)-2(-k) \Rightarrow 1 = 2 \; ⚡ \\ s = 1-k \\ t = -k \end{cases}$, assurdo

Quindi $r \cap \pi = \emptyset$

<u>DIMOSTRAZIONE 2</u>: Sia $\hat{r}(t) = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ la retta r traslata passante per l'origine.
Allora r è parallela a $\pi \Leftrightarrow \hat{r} \subseteq \hat{\pi} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \hat{\pi}$. Osserviamo ora che $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ soddisfa l'equazione $x - y + 2z = 0$, quindi sta in $\hat{\pi}$

d) <u>DIMOSTRAZIONE 1</u>: Cerchiamo un vettore ortogonale a π, cioè un vettore ortogonale a ogni vettore di $\hat{\pi}$, equivalentemente un vettore ortogonale ai generatori di $\hat{\pi}$. Stiamo cercando quindi un vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ tale che

$$\begin{cases} \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \\ \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ -2a + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ c = 2a \end{cases}$$

Un vettore ortogonale a π è quindi $\begin{pmatrix} a \\ -a \\ 2a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, scegliamo allora $a = 1$ e quindi il vettore è $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
Sia allora $f(k) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ la retta parallela a $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ che interseca r in $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dato che f interseca <u>perpendicolarmente</u> π e interseca r in $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, allora la distanza tra r e π è data da $\left\| f(\tilde{k}) - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \tilde{k}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|$

... e interseca

r in $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, allora la distanza tra r e π è data da $\left\| f(\tilde{k}) - \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \right\| = \left\| \tilde{k} \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} \right\|$

con $\tilde{k} \in \mathbb{R}$ tale che $f(\tilde{k}) \in \pi$.

Cerchiamo allora questo $\tilde{k}$: $f(\tilde{k}) \in \pi \iff \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \tilde{k}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} \in \pi \iff$

$$\begin{pmatrix}\tilde{k}+1\\1-\tilde{k}\\2\tilde{k}\end{pmatrix} \in \pi \iff \underbrace{(\tilde{k}+1) - (1-\tilde{k}) + 2(2\tilde{k})}_{6\tilde{k}} = 1 \iff \tilde{k} = \frac{1}{6}$$

Quindi la distanza cercata è $\left\| \tilde{k}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\frac{1}{6^2}(1^2+1^2+2^2)} = \sqrt{\frac{1}{6}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{6}}}$

DIMOSTRAZIONE 2: Sia $\pi: ax+by+cz+d=0$ un piano e $\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$ un punto, la distanza tra π e $\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$ è $\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

dim: Assumiamo che $a \neq 0$ (almeno uno tra a, b, c è $\neq 0$), ma allora

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \pi \iff x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}z - \frac{d}{a}$. Quindi un punto generico di π è

$$\begin{pmatrix}-\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}z - \frac{d}{a}\\y\\z\end{pmatrix} = y\begin{pmatrix}-\frac{b}{a}\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}-\frac{c}{a}\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\frac{d}{a}\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \pi = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}-\frac{b}{a}\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\frac{c}{a}\\0\\1\end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix}-\frac{d}{a}\\0\\0\end{pmatrix}$$

Come in "dimostrazione 1", cerchiamo un vettore $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ ortogonale a π, cioè

$$\begin{cases} \left\langle \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\frac{b}{a}\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle = 0 \\ \left\langle \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\frac{c}{a}\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -\frac{b}{a}x + y = 0 \\ -\frac{c}{a}x + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = +\frac{b}{a}x \\ z = +\frac{c}{a}x \end{cases}$$ Scegliamo $x = 1$ e quindi $\begin{pmatrix}1\\\frac{b}{a}\\\frac{c}{a}\end{pmatrix}$

Sia ora $f(k) = \begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}1\\\frac{b}{a}\\\frac{c}{a}\end{pmatrix}$ la retta parallela a $\begin{pmatrix}1\\\frac{b}{a}\\\frac{c}{a}\end{pmatrix}$ passante per $\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$

Dato che f interseca <u>perpendicolarmente</u> π e passa per $\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$, la distanza tra $\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$ e π è data da $\left\| f(\tilde{k}) - \begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix} \right\| = \left\| \tilde{k}\begin{pmatrix}1\\\frac{b}{a}\\\frac{c}{a}\end{pmatrix} \right\|$ con $\tilde{k} \in \mathbb{R}$ tale che $f(\tilde{k}) \in \pi$.

Cerchiamo allora questo $\tilde{k}$: $\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix} + \tilde{k}\begin{pmatrix}1\\\frac{b}{a}\\\frac{c}{a}\end{pmatrix} \in \pi \iff \begin{pmatrix}x_0+\tilde{k}\\y_0+\tilde{k}\frac{b}{a}\\z_0+\tilde{k}\frac{c}{a}\end{pmatrix} \in \pi \iff a(x_0+\tilde{k}) + b(y_0+\tilde{k}\frac{b}{a}) + c(z_0+\tilde{k}\frac{c}{a}) + d = 0$

$$\iff ax_0 + by_0 + cz_0 + d + \tilde{k}\left(a + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{a}\right) = 0 \iff \tilde{k} = \frac{-ax_0 - by_0 - cz_0 - d}{a + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{a}}$$

Quindi la distanza cercata è $\left\| \tilde{k}\begin{pmatrix}1\\\frac{b}{a}\\\frac{c}{a}\end{pmatrix} \right\| = |\tilde{k}| \left\| \begin{pmatrix}1\\\frac{b}{a}\\\frac{c}{a}\end{pmatrix} \right\| = |\tilde{k}| \cdot \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2}} =$

$$= |\tilde{k}| \cdot \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{a} = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{a}\right)} \cdot \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{a} = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$\square$

Nel nostro caso $a = 1$, $b = -1$, $c = 2$, $d = -1$ e $\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$ è un qualunque punto di r, ad esempio $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, quindi la distanza è $\frac{|1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 0 - 1|}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{6}}}$

ESERCIZIO 3

Esercizio 3) In $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottospazi

$$V_1 = \operatorname{Span}((3,11,5,2),(1,5,2,1),(1,1,1,0))$$
$$V_2 = \operatorname{Span}((1,3,2,2),(1,3,4,1),(2,6,2,5))$$

a) Trovare la dimensione di V_1 e V_2.
b) Dire se V_1 e V_2 sono in somma diretta, e in tal caso se $V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}^4$.

NOTA: Sia $A = (v_1 | \dots | v_n)$, $\bar{A}$ la sua riduzione a scalini per righe e $\tilde{A}$ la sua riduzione a scalini per colonne.

Sappiamo che le operazioni sulle colonne non cambiano lo span delle colonne, quindi $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} \tilde{A}$ e in particolare le colonne dei pivot di $\tilde{A}$ sono una base di $\operatorname{Span}(v_1, .., v_n)$.

Le operazioni sulle righe <u>cambiano</u> lo span delle colonne, quindi non è più vero che le colonne dei pivot di $\bar{A}$ sono una base di $\operatorname{Span}(v_1, .., v_n)$. È però vero che se $i_1, .., i_k$ sono gli indici non è più vero che le colonne dei pivot di $\bar{A}$ sono una base di $\text{Span}(v_1, .., v_n)$. È però vero che se $i_1, .., i_t$ sono gli indici delle colonne dei pivot di $\bar{A}$, allora $\{v_{i_1}, .., v_{i_t}\}$ è una base di $\text{Span}(v_1, .., v_n)$ (Infatti $\exists S$ invertibile t.c. $A = S\bar{A}$ quindi, dato che S invertibile manda basi in basi, e dato che S manda la i-esima colonna di $\bar{A}$ nella i-esima colonna di A, i vettori $v_{i_1}, .., v_{i_t}$ sono una base)

a) Riduco a scalini per colonne

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 11 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[A^3 \leftrightarrow A^1]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 11 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{A^2 - A^1 \\ A^3 - 3A^1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[A^3 - 2A^2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi V_1 ha dimensione 2 e una base è $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{B^2 - B^1 \\ B^3 - 2B^1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[B^3 + B^2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi V_2 ha dimensione 2 e una base è $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) Calcoliamo la dimensione di $V_1 + V_2 = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[C^3 - C^1]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[C^3 \leftrightarrow C^2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[C^3 - 2C^2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[C^4 + 2C^3]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

Quindi $\dim V_1 + V_2 = 4$. Ma allora $4 = \dim V_1 + V_2 = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim V_1 \cap V_2 =$

$= 2 + 2 - \dim V_1 \cap V_2 \implies \dim V_1 \cap V_2 = 0 \implies V_1 \cap V_2 = 0$

Ma allora V_1 e V_2 sono in somma diretta, e dato che $\dim V_1 + V_2 = 4$ si ha che $V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}^4$

ESERCIZIO 4

Esercizio 4) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si consideri il sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ definito da

$$V = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : AM = 0\}.$$

Trovare:
a) Una base $\mathcal{B}$ per $\text{Ker}(A)$.
b) La dimensione di V.
c) Una base per lo spazio delle matrici simmetriche di V.

a) Sappiamo che le operazioni di riga non cambiano il Ker, quindi:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{A_2 - A_1 \\ A_3 - A_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[A_3 + A_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = S$$

Quindi $\text{Ker} A = \text{Ker} S$, ma $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker} S \iff \begin{cases} x + y - z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z - y = z - 2z = -z \\ y = 2z \end{cases}$

$\iff \begin{pmatrix} -z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, quindi $\text{Ker} A = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Una base di $\text{Ker} A$ è $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $M \in V \iff AM = 0 \iff AM^{(1)} = AM^{(2)} = AM^{(3)} = 0 \iff M^{(1)}, M^{(2)}, M^{(3)} \in \text{Ker} A = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Quindi $V = \left\{ \begin{pmatrix} -x & -y & -z \\ 2x & 2y & 2z \\ x & y & z \end{pmatrix} \middle| x, y, z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$

b) $M \in V \iff AM = 0 \iff AM^{(1)} = AM^{(2)} = AM^{(3)} = 0 \iff M^{(1)}, M^{(2)}, M^{(3)} \in \operatorname{Ker} A = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Quindi $V = \left\{ \begin{pmatrix} -x & -y & -z \\ 2x & 2y & 2z \\ x & y & z \end{pmatrix} \,\middle|\, x,y,z \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$

quindi $\dim V = 3$

c) $M \in V$ è simmetrica $\iff$ i parametri x, y, z soddisfano $\begin{cases} -y = 2x \\ x = -z \\ y = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2x \\ z = -x \\ -2x = -2x \end{cases} \iff \begin{cases} z = -x \\ y = -2x \end{cases}$

Quindi $\{ M \in V \mid M \text{ simmetrica} \} = \left\{ \begin{pmatrix} -x & 2x & x \\ 2x & -4x & -2x \\ x & -2x & -x \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \right)$

Una base è $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

ESERCIZIO 5

Esercizio 5) Dato l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} f : \quad & \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z) \mapsto (x, x+y, x+y+z) \end{aligned}$$

trovare:

a) La matrice associata ad f rispetto alla base canonica (in partenza ed arrivo).
b) Dire se f è un isomorfismo.
c) Se f è un isomorfismo, calcolare f^{-1}.

a) $\mathcal{M}^C_C(f) = \big(f(e_1) \,|\, f(e_2) \,|\, f(e_3) \big) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) Essendo un endomorfismo, dalla formula delle dimensioni si ha che f è iniettiva $\iff$ f è surgettiva

quindi se dimostriamo che f è surgettiva allora abbiamo dimostrato che è un isomorfismo

La matrice $\mathcal{M}^C_C(f)$ è ridotta a scalini e ha rango massimo $\Rightarrow \dim \operatorname{Im} \mathcal{M}^C_C(f) = 3$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = 3 \Rightarrow f$ è surgettiva

c) Supponiamo $f^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, allora dalla relazione $f\left(f^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ si ha che

$f\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ e quindi $\begin{pmatrix} a \\ a+b \\ a+b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ da cui $\begin{cases} a = x \\ a+b = y \\ a+b+c = z \end{cases} \iff \begin{cases} a = x \\ b = y-x \\ c = z-(y-x)-x = z-y \end{cases}$

Quindi $f^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y-x \\ z-y \end{pmatrix}$

ESERCIZIO 6

Esercizio 6) Siano W_1, W_2 piani distinti passanti per l'origine di $\mathbb{R}^3$ e W_3 una retta passante per l'origine di $\mathbb{R}^3$. Per un fissato $i \in \{1, 2, 3\}$, consideriamo lo spazio degli endomorfismi

$$F_i = \{ f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) : f(W_i) \subseteq W_i \}.$$

Calcolare (al variare delle posizioni relative dei sottospazi):
a) $\dim(F_i)$ al variare di $i = 1, 2, 3$.
b) $\dim(F_i \cap F_j)$ al variare di $i, j = 1, 2, 3$ (con $i < j$)
c) $\dim(F_1 \cap F_2 \cap F_3)$.

Ricordiamo che, fissate due basi di $\mathbb{R}^3$ $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, allora $\begin{aligned} \phi : L(\mathbb{R}^3) &\longrightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ f &\longmapsto \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(f) \end{aligned}$ è un isomorfismo,

quindi per calcolare la dimensione di un sottospazio di $L(\mathbb{R}^3)$ possiamo calcolare la dimensione del sottospazio corrispondente in $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Siano $B_1 = \{v_1, v_2\}$ una base di W_1, $B_2 = \{w_1, w_2\}$ una base di W_2 e $B_3 = \{z\}$ una base di W_3

a) $\underline{\dim F_1}$: Completiamo B_1 a base di $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, u\}$. Allora

$f \in F_1 \iff \begin{cases} f(v_1) \in \operatorname{Span}(v_1, v_2) \\ f(v_2) \in \operatorname{Span}(v_1, v_2) \end{cases} \iff \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ 0 & 0 & a_9 \end{pmatrix}$

Quindi, riprendendo la mappa ϕ vista prima, si ha che $\phi(F_1) = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$

quindi $\dim \phi(F_1) = 7$, e quindi $\dim F_1 = 7$

$\underline{\dim F_2}$ Analogo al caso precedente

$\underline{\dim F_3}$ Completiamo B_3 a base di $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \{z, u, v\}$. Allora

$f \in F_3 \iff f(z) \in \operatorname{Span}(z) \iff \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_5 & a_6 \\ 0 & a_8 & a_9 \end{pmatrix}$

Come prima, $\dim F_3 = 7$

b) $\dim F_1 \cap F_2$ ...

$\begin{pmatrix} 0 & a_8 & a_9 \end{pmatrix}$

Come prima, $\dim F_3 = 7$

b) $\underline{\dim F_1 \cap F_2}$: Osserviamo che essendo W_1 e W_2 piani distinti, si ha che $\dim W_1 \cap W_2 = 1$.
Sia $\{u\}$ base di $W_1 \cap W_2$, estendiamola a $D_1 = \{u, v\}$ base di W_1 e a $D_2 = \{u, w\}$ base di W_2. Allora $\mathcal{B} = \{u, v, w\}$ è base di $\mathbb{R}^3$. Allora

$$f \in F_1 \cap F_2 \iff \begin{cases} f(u) \in \operatorname{Span}(u) \\ f(v) \in \operatorname{Span}(u, v) \\ f(w) \in \operatorname{Span}(u, w) \end{cases} \iff M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_5 & 0 \\ 0 & 0 & a_9 \end{pmatrix}$$

Quindi $\dim F_1 \cap F_2 = 5$

$\underline{\dim F_1 \cap F_3}$: Distinguiamo due casi: $\underline{W_3 \cap W_1 = \{0\}}$: Allora $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, z\}$ è base di $\mathbb{R}^3$. Allora

$$f \in F_1 \cap F_3 \iff \begin{cases} f(v_1) \in \operatorname{Span}(v_1, v_2) \\ f(v_2) \in \operatorname{Span}(v_1, v_2) \\ f(z) \in \operatorname{Span}(z) \end{cases} \iff M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ a_4 & a_5 & 0 \\ 0 & 0 & a_9 \end{pmatrix}$$

Quindi $\dim F_1 \cap F_3 = 5$

$\underline{W_1 \subseteq W_3}$: Completiamo B_3 a una base $\{z, u\}$ di W_1 e completiamo quest'ultima a $\mathcal{B} = \{z, u, v\}$ base di $\mathbb{R}^3$. Allora

$$f \in F_1 \cap F_3 \iff \begin{cases} f(z) \in \operatorname{Span} z \\ f(u) \in \operatorname{Span}(z, u) \end{cases} \iff M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_5 & a_6 \\ 0 & 0 & a_9 \end{pmatrix}$$

Quindi $\dim F_1 \cap F_3 = 6$

$\underline{\dim F_2 \cap F_3}$: Analogo al caso precedente

c) Distinguiamo i casi: $\underline{W_3 = W_1 \cap W_2}$: Completiamo B_3 a una base $\{z, u\}$ di W_1 e a una base $\{z, v\}$ di W_2. Dunque $\mathcal{B} = \{z, u, v\}$ è base di $\mathbb{R}^3$. Allora

$$f \in F_1 \cap F_2 \cap F_3 \iff \begin{cases} f(z) \in \operatorname{Span}(z) \\ f(u) \in \operatorname{Span}(z, u) \\ f(v) \in \operatorname{Span}(z, v) \end{cases} \iff M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_5 & 0 \\ 0 & 0 & a_9 \end{pmatrix}$$

Quindi $\dim F_1 \cap F_2 \cap F_3 = 5$

$\underline{W_3 \subset W_1 \text{ e } W_3 \cap W_2 = \{0\}}$: Sia $D = \{u\}$ una base di $W_1 \cap W_2$, dato che $W_3 \cap W_2 = \{0\}$ allora u, z sono lin indip $\Rightarrow \{u, z\}$ è base di W_1. Completo D a base $\{u, v\}$ di W_2 e $\mathcal{B} = \{u, z, v\}$ è base di $\mathbb{R}^3$. Allora

$$f \in F_1 \cap F_2 \cap F_3 \iff \begin{cases} f(u) \in \operatorname{Span}(u) \\ f(z) \in \operatorname{Span}(z) \\ f(v) \in \operatorname{Span}(u, v) \end{cases} \iff M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & a_3 \\ 0 & a_5 & 0 \\ 0 & 0 & a_9 \end{pmatrix}$$

Quindi $\dim F_1 \cap F_2 \cap F_3 = 4$

$\underline{W_3 \subset W_2 \text{ e } W_3 \cap W_1 = \{0\}}$: Analogo al caso precedente

$\underline{W_3 \cap W_1 = \{0\} \text{ e } W_3 \cap W_2 = \{0\}}$: Sia $D = \{u\}$ base di $W_1 \cap W_2$, la completiamo a $\{u, v\}$ base di W_1 e a $\{u, w\}$ base di W_2, così $\mathcal{B} = \{u, v, w\}$ è base di $\mathbb{R}^3$. Possiamo sceglierli in modo che $z = u + v + w$.
Se $f \in F_1 \cap F_2 \cap F_3$ allora $f \in F_1 \cap F_2$ quindi

$$\begin{cases} f(u) \in \operatorname{Span}(u) \\ f(v) \in \operatorname{Span}(u, v) \\ f(w) \in \operatorname{Span}(u, w) \end{cases} \Rightarrow M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_5 & 0 \\ 0 & 0 & a_9 \end{pmatrix}$$

Questi parametri non sono liberi perché dobbiamo imporre $f \in F_3$, ovvero $f(z) \in \operatorname{Span}(z)$ ovvero

$$f(z) = f(u) + f(v) + f(w) = (a_1 + a_2 + a_3)\, u + a_5 v + a_9 w \in \operatorname{Span}(u + v + w)$$

quindi $a_1 + a_2 + a_3 = a_5 = a_9$. Ma allora

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_1 + a_2 + a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 + a_2 + a_3 \end{pmatrix}$$ e i parametri a_1, a_2, a_3 sono liberi, quindi $\dim(F_1 \cap F_2 \cap F_3) = 3$

ESERCIZIO 7

Esercizio 7) Per $a \in \mathbb{R}$, sia $f_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, l'applicazione lineare data da

$$f_a\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + ax_2 + 2x_3 \\ 3x_1 + 6x_2 + (12-3a)x_3 \\ x_1 + ax_2 + 2x_3 \\ 3x_1 + (6a - a^2)x_2 + (9-a)x_3 \end{bmatrix} \text{ per ogni } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

a) Calcolare la dimensione di $\operatorname{Im}(f_2)$ e scrivere equazioni cartesiane per questo sottospazio.
b) Al variare di $a \in \mathbb{R}$, calcolare $\dim(\operatorname{Im}(f_a))$
c) Siano

$$\mathcal{F}_a = \left\{ g \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3\right) \mid g \circ f_a = 0 \right\}, \quad \mathcal{G}_a = \left\{ g \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3\right) \mid f_a \circ g = 0 \right\}.$$

Mostrare che, per ogni $a \in \mathbb{R}, \mathcal{F}_a$ e $\mathcal{G}_a$ sono sottospazi di $\mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ e che $\mathcal{F}_a + \mathcal{G}_a$ è un sottospazio proprio: $\mathcal{F}_a + \mathcal{G}_a \neq \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$.

a) $f_2\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1+2x_2+2x_3 \\ 3x_1+6x_2+6x_3 \\ x_1+2x_2+2x_3 \\ 3x_1+8x_2+7x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 8 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \operatorname{Im} f_2 = \operatorname{Im}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 8 & 7 \end{pmatrix}$

Riduco a scalini per righe $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 8 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{A_2-3A_1 \\ A_3-A_1 \\ A_4-3A_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[A_4 \leftrightarrow A_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

essendo i pivot nella prima e nella seconda colonna, allora $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$ sono base di $\operatorname{Im} A$

Troviamo le equazioni cartesiane: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & x \\ 3 & 6 & y \\ 1 & 2 & z \\ 3 & 8 & w \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{A_2-3A_1 \\ A_3-A_1 \\ A_4-3A_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & x \\ 0 & 0 & y-3x \\ 0 & 0 & z-x \\ 0 & 2 & w-3x \end{pmatrix} \xrightarrow[A_4 \leftrightarrow A_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & x \\ 0 & 2 & w-3x \\ 0 & 0 & z-x \\ 0 & 0 & y-3x \end{pmatrix}$

le equazioni cartesiane sono $\begin{cases} z-x=0 \\ y-3x=0 \end{cases}$

b) $f_a\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 3 & 6 & 12-3a \\ 1 & a & 2 \\ 3 & 6a-a^2 & 9-a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \dim \operatorname{Im} f_a = rg\begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 3 & 6 & 12-3a \\ 1 & a & 2 \\ 3 & 6a-a^2 & 9-a \end{pmatrix}$

Riduco a scalini per righe $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 3 & 6 & 12-3a \\ 1 & a & 2 \\ 3 & 6a-a^2 & 9-a \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{A_2-3A_1 \\ A_3-A_1 \\ A_4-3A_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 6-3a & 6-3a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3a-a^2 & 3-a \end{pmatrix}$

Se $a=2$ abbiamo già visto che $rg(A)=2$

Se $a \neq 2$ allora $6-3a \neq 0$ quindi posso moltiplicare la 2ª riga per $\frac{1}{6-3a}$

$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3a-a^2 & 3-a \end{pmatrix} \xrightarrow[A_4-(3a-a^2)A_2]{} \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-a-(3a-a^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (a-3)(a-1) \end{pmatrix}$

Se $a=3$ o $a=1$ allora $rg(A)=2$, altrimenti $rg(A)=3$

In conclusione $\dim \operatorname{Im} f_a = \begin{cases} 2 & \text{se } a=1,2,3 \\ 3 & \text{altrimenti} \end{cases}$

c) F_a è spazio vettoriale: $\boxed{0 \in F_a}$: $0 \circ f_a = 0$ ✓

$\boxed{g_1, g_2 \in F_a \Rightarrow g_1+g_2 \in F_a}$ $(g_1+g_2)\circ f_a = g_1 \circ f_a + g_2 \circ f_a = 0+0=0$ ✓

$\boxed{g \in F_a \Rightarrow \lambda g \in F_a}$ $(\lambda g_1)\circ f_a = \lambda(g_1 \circ f_a) = \lambda \cdot 0 = 0$ ✓

Analogamente G_a è spazio vettoriale

Dimostriamo che $F_a + G_a \neq L(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$

Analogamente $\mathcal{G}_a$ è spazio vettoriale

Dimostriamo che $\mathcal{F}_a + \mathcal{G}_a \neq L(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$

Caso $\dim \operatorname{Im} f_a = 2$: Sia $\{v_1, v_2\}$ base di $\operatorname{Im} f_a$, estendiamola a $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, w_1, w_2\}$ base di $\mathbb{R}^4$. Allora $g \in \mathcal{F}_a \iff \begin{cases} g(v_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ g(v_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \iff M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & a_7 & a_8 \\ 0 & 0 & a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}$

Quindi $\dim \mathcal{F}_a = 6$

Sia $\{v_3\}$ base di $\operatorname{Ker} f_a$, estendiamola a $\mathcal{B} = \{v_3, u_1, u_2\}$ base di $\mathbb{R}^3$.

Allora $g \in \mathcal{G}_a \iff \operatorname{Im} g \subseteq \operatorname{Ker} f_a = \operatorname{Span}\{v_3\} \iff M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Quindi $\dim \mathcal{G}_a = 4$

Ma allora $\dim \mathcal{F}_a + \mathcal{G}_a \leq \dim \mathcal{F}_a + \dim \mathcal{G}_a = 10 < 12 = \dim L(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$

$\Rightarrow \mathcal{F}_a + \mathcal{G}_a \neq L(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$

Caso $\dim \operatorname{Im} f_a = 3$: Sia $\{v_1, v_2, v_3\}$ base di $\operatorname{Im} f_a$, estendiamola a $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, w_1\}$ base di $\mathbb{R}^4$. Allora $g \in \mathcal{F}_a \iff \begin{cases} g(v_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ g(v_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ g(v_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \iff M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & a_8 \\ 0 & 0 & 0 & a_{12} \end{pmatrix}$

Quindi $\dim \mathcal{F}_a = 3$

Dato che $\dim \operatorname{Im} f_a = 3$ allora $\operatorname{Ker} f_a = \{0\}$, quindi $g \in \mathcal{G}_a \iff g \equiv 0$, quindi $\mathcal{G}_a = \{0\}$

Quindi $\dim \mathcal{F}_a + \mathcal{G}_a = \dim \mathcal{F}_a = 3 < 12 = \dim L(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3) \Rightarrow \mathcal{F}_a + \mathcal{G}_a \neq L(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$

ESERCIZIO 8

Esercizio 8) Supponiamo $\mathbb{K}$ abbia almeno 3 elementi distinti $0, 1, \alpha$.
Sia $V = \mathbb{K}_2[x]$ e siano $L_i : V \to \mathbb{K}, i = 1, 2, 3$, i tre funzionali che valutano un polinomio rispettivamente in $0, 1, \alpha$.
a) Dimostrare che gli L_i sono linearmente indipendenti (e quindi sono una base dello spazio duale V^*).
b) Individuare la base $\mathcal{B}$ di V tale che la base duale $\mathcal{B}^*$ sia uguale a L_1, L_2, L_3.
c) Dimostrare che non tutti i funzionali in V^* sono della forma $L(p(x)) = \gamma p(\beta)$, per qualche $\gamma, \beta \in \mathbb{K}$.

a) $a_1 L_1 + a_2 L_2 + a_3 L_3 = 0 \implies a_1 L_1(p) + a_2 L_2(p) + a_3 L_3(p) = 0 \quad \forall p \in \mathbb{K}_2[x]$

- Se scelgo $p = x(x-1)$ allora la somma diventa $a_3 \cdot \alpha(\alpha - 1) = 0$ quindi $a_3 = 0$
- Se scelgo $p = x(x-\alpha)$ allora la somma diventa $a_2 \cdot 1 \cdot (1-\alpha) = 0$ quindi $a_2 = 0$
- Se scelgo $p = (x-1)(x-\alpha)$ allora la somma diventa $a_1 \, (-1)(-\alpha) = 0$ quindi $a_1 = 0$

Quindi L_1, L_2, L_3 sono base di V^* perché $\dim V^* = \dim \mathbb{K}_2[x] = 3$

b) Voglio trovare base $\{v_1, v_2, v_3\}$ di V t.c. $v_i^* = L_i$, quindi

troviamo v_1 : $v_2^*(v_1) = L_2(v_1) \implies x-1 \mid v_1$

troviamo v_1 : $\underset{\substack{\shortparallel\\ 0}}{v_2^*(v_1)} = \underset{\substack{\shortparallel\\ v_1(1)}}{L_2(v_1)} \Rightarrow x-1 \mid v_1$

$\underset{\substack{\shortparallel\\ 0}}{v_3^*(v_1)} = \underset{\substack{\shortparallel\\ v_1(\alpha)}}{L_3(v_1)} \Rightarrow x-\alpha \mid v_1$

dato che $v_1 \in \mathbb{K}_2[x]$ si ha che $v_1 = k(x-1)(x-\alpha)$ con $k \in \mathbb{K}$

$\underset{\substack{\shortparallel\\ 1}}{v_1^*(v_1)} = \underset{\substack{\shortparallel\\ v_1(0)}}{L_1(v_1)} \Rightarrow 1 = v_1(0) = k\cdot(-1)(-\alpha) \Rightarrow k = \alpha^{-1} \Rightarrow v_1 = \alpha^{-1}(x-1)(x-\alpha)$

troviamo v_2 : $\underset{\substack{\shortparallel\\ 0}}{v_1^*(v_2)} = \underset{\substack{\shortparallel\\ v_2(0)}}{L_1(v_2)} \Rightarrow x \mid v_2$

$\underset{\substack{\shortparallel\\ 0}}{v_3^*(v_2)} = \underset{\substack{\shortparallel\\ v_2(\alpha)}}{L_3(v_2)} \Rightarrow x-\alpha \mid v_2$

dato che $v_2 \in \mathbb{K}_2[x]$ si ha che $v_2 = k\, x\,(x-\alpha)$ con $k \in \mathbb{K}$

$\underset{\substack{\shortparallel\\ 1}}{v_2^*(v_2)} = \underset{\substack{\shortparallel\\ v_2(1)}}{L_2(v_2)} \Rightarrow 1 = v_2(1) = k\cdot 1\,(1-\alpha) \Rightarrow k = (1-\alpha)^{-1} \Rightarrow v_2 = (1-\alpha)^{-1} x(x-\alpha)$

troviamo v_3 : $\underset{\substack{\shortparallel\\ 0}}{v_1^*(v_3)} = \underset{\substack{\shortparallel\\ v_3(0)}}{L_1(v_3)} \Rightarrow x \mid v_3$

$\underset{\substack{\shortparallel\\ 0}}{v_2^*(v_3)} = \underset{\substack{\shortparallel\\ v_3(1)}}{L_2(v_3)} \Rightarrow x-1 \mid v_3$

dato che $v_2 \in \mathbb{K}_2[x]$ si ha che $v_2 = k\, x\,(x-1)$ con $k \in \mathbb{K}$

$\underset{\substack{\shortparallel\\ 1}}{v_3^*(v_3)} = \underset{\substack{\shortparallel\\ v_3(\alpha)}}{L_3(v_3)} \Rightarrow 1 = v_3(\alpha) = k\cdot\alpha(\alpha-1) \Rightarrow k = \alpha^{-1}(\alpha-1)^{-1} \Rightarrow v_3 = \alpha^{-1}(\alpha-1)^{-1}x(x-1)$

c) Sia $L: V \longrightarrow \mathbb{K}$ t.c. $L(a_2x^2 + a_1x^1 + a_0) = a_1$.

L è lineare quindi $L \in V^*$. Se per assurdo $\exists\, \gamma, \beta$ t.c. $L(p) = \gamma\, p(\beta)\ \forall p \in V$ allora $0 = L(1) = \gamma$, ma allora avrei che $L(p) = 0\ \forall p \in V$, assurdo perché $L(x) = 1$