Esercizio 1.
Sia $V = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, e siano $b, \varphi \in PS(V)$ i prodotti scalari su V dati da $b(X,Y) = \mathrm{tr}(XY)$ e $\varphi(X,Y) = \mathrm{tr}({}^tXY)$, per ogni $X, Y \in V$. Fissate $A, B \in V$, siano $T, f_{A,B} \in \mathcal{L}(V)$ gli endomorfismi dati da $T(X) = {}^tX$, $f_{A,B}(X) = AXB$, per ogni $X \in V$.

a) Mostrare che T è simmetrico sia rispetto a b che rispetto a φ.

b) Determinare l'endomorfismo trasposto di $f_{A,B}$ rispetto a b e l'endomorfismo trasposto di $f_{A,B}$ rispetto a φ.

c) Nel caso $A = I_n$, mostrare che $f_{I_n,B}$ è simmetrico rispetto a b se e solo se $B \in \mathrm{Span}(I_n)$, e che $f_{I_n,B}$ è simmetrico rispetto a φ se e solo se B è simmetrica. Mostrare inoltre che $f_{I_n,B}$ è ortogonale rispetto a b se e solo se $B = \pm I_n$, e che $f_{I_n,B}$ è ortogonale rispetto a φ se e solo se B è ortogonale.

d) Nel caso $A = I_n$ e B simmetrica, da una base ortonormale di n autovettori per la matrice B ~~M~~ ricavare una base ortonormale di n^2 autovettori per la $f_{I_n,B}$ e dedurre che $f_{I_n,B}$ ha gli stessi autovalori di ~~M~~ B con molteplicità moltiplicate per n.

a) $b(T(X),Y) = b({}^tX,Y) = \mathrm{tr}({}^tXY) = \mathrm{tr}({}^tYX) = \mathrm{tr}(X{}^tY) = b(X,T(Y))$

$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}({}^tA)$ $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$

$\varphi(T(X),Y) = \varphi({}^tX,Y) = \mathrm{tr}(XY) = \mathrm{tr}({}^tY{}^tX) = \mathrm{tr}({}^tX{}^tY) = \varphi(X,T(Y))$

Lemma I prodotti scalari b e φ sono non degeneri (quindi gli endomorfismi trasposti sono unici)

dim: Osserviamo innanzitutto che $\mathrm{Rad}\,\varphi = \mathrm{Rad}\,b$: $Y \in \mathrm{Rad}\,\varphi \Leftrightarrow \forall X \in M_n(\mathbb{R})\ \mathrm{tr}({}^tXY) = 0 \Leftrightarrow \forall X \in M_n(\mathbb{R})\ \mathrm{tr}(XY) = 0 \Leftrightarrow Y \in \mathrm{Rad}\,b$

Dimostriamo allora che $\mathrm{Rad}\,b = \{0\}$:

$Y \in \mathrm{Rad}(b) \Leftrightarrow \forall X\ \mathrm{tr}(XY) = 0 \Leftrightarrow \forall i,j \le n\ \ \mathrm{tr}(E_{ij}Y) = 0$ dove $E_{ij} := \begin{pmatrix} & 0 & \\ 0 \cdots & 1 & \cdots 0 \\ & 0 & \end{pmatrix} \leftarrow i$, $\underset{j}{\uparrow}$

riga j-esima di Y

Osserviamo ora che $E_{ij}Y = \begin{pmatrix} & 0 & \\ & \vdots & \\ & Y_j & \\ & \vdots & \\ & 0 & \end{pmatrix} \leftarrow i$ quindi $\mathrm{tr}(E_{ij}Y) = [Y]_{ji}$

Ma allora $\forall i,j \le n\ \ \mathrm{tr}(E_{ij}Y) = 0 \Leftrightarrow \forall i,j \le n\ \ [Y]_{ji} = 0 \Leftrightarrow Y = 0$ $\square$

b) $\mathrm{tr}(A \cdot (XBY)) = \mathrm{tr}((XBY) \cdot A)$

$b(f_{AB}(X),Y) = b(AXB,Y) = \mathrm{tr}(AXBY) = \mathrm{tr}(XBYA) = b(X, f_{B,A}(Y))$

$\Longrightarrow$ dato che b è non degenere, l'endomorfismo trasposto di f_{AB} rispetto a b è unico e quindi è f_{BA}

$\mathrm{tr}({}^tB \cdot ({}^tX{}^tAY)) = \mathrm{tr}(({}^tX{}^tAY) \cdot {}^tB)$

$\varphi(f_{AB}(X),Y) = \varphi(AXB,Y) = \mathrm{tr}({}^t(AXB)\,Y) = \mathrm{tr}({}^tB\,{}^tX\,{}^tA\,Y) = \mathrm{tr}({}^tX\,{}^tA\,Y\,{}^tB) = \varphi(X, f_{{}^tA,{}^tB}(Y))$

$\Longrightarrow$ dato che φ è non degenere, l'endomorfismo trasposto di f_{AB} rispetto a φ è unico e quindi è $f_{{}^tA,{}^tB}$

c)
- $f_{I_n,B}$ è simmetrico rispetto a $b \Leftrightarrow f_{I_n,B} = f_{B,I_n} \Leftrightarrow \forall X \in V\ f_{I_n,B}(X) = f_{B,I_n}(X)$

  $\Leftrightarrow \forall X \in V\ \ XB = BX$, cioè B appartiene al centro di $M_n(\mathbb{K})$, e questo sappiamo essere equivalente a $B \in \mathrm{Span}(I_n)$

- $f_{I_n,B}$ è simmetrico rispetto a $\varphi \Leftrightarrow f_{I_n,B} = f_{I_n,{}^tB} \Leftrightarrow \forall X \in V\ f_{I_n,B}(X) = f_{I_n,{}^tB}(X)$

  $\Leftrightarrow \forall X \in V\ \ XB = X{}^tB \Leftrightarrow B = {}^tB \Leftrightarrow B$ è simmetrica

- $f_{I_n,B}$ è ortogonale rispetto a $b \Leftrightarrow B = \pm I_n$

  $\boxed{\Leftarrow}$ $B = \pm I_n \Rightarrow \forall X,Y \in V\ \ b(f_{I_n,B}(X), f_{I_n,B}(Y)) = b(XB,YB) = \mathrm{tr}(XBYB) \overset{B=\pm I_n}{=} \mathrm{tr}(XY) = b(X,Y) \Rightarrow f_{I_n,B}$ è ortogonale rispetto a b

  $\boxed{\Rightarrow}$ $f_{I_n,B}$ è ortogonale rispetto a $b \Leftrightarrow \forall X,Y \in V\ \ b(f_{I_n,B}(X), f_{I_n,B}(Y)) = b(X,Y) \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow \forall X,Y \in V\ \ b(XB,YB) = b(X,Y) \Leftrightarrow \forall Y \in V\ \ f_{B,B}(Y) = Y \Leftrightarrow \forall Y \in V\ \ BYB = Y$

  $b(XB,YB) = \mathrm{tr}(XBYB) = b(X,BYB) = b(X, f_{B,B}(Y))$

  b è non deg

  Scegliendo $Y = I_n$ si ha $B^2 = I_n$, quindi B è invertibile e $B^{-1} = B$, ma allora

  $\forall Y \in V\ \ BYB = Y \Rightarrow \forall Y \in V\ \ BY = YB$, quindi B appartiene al centro di $M_n(\mathbb{K})$

  Ma allora $\begin{cases} B \in \mathrm{Span}\, I_n \\ B^2 = I_n \end{cases} \Rightarrow B = \pm I_n$

- $f_{I_n,B}$ è ortogonale rispetto a $\varphi \Leftrightarrow \forall X,Y \in V\ \ \varphi(f_{I_n,B}(X), f_{I_n,B}(Y)) = \varphi(X,Y) \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow \forall X,Y \in V\ \ \varphi(XB,YB) = \varphi(X,Y) \Leftrightarrow \forall Y \in V\ \ f_{I_n,B{}^tB}(Y) = Y \Leftrightarrow \forall Y \in V\ \ YB{}^tB = Y \Leftrightarrow B{}^tB = I_n \Leftrightarrow B$ è ortogonale

  $\varphi(XB,YB) = \mathrm{tr}({}^tB\,{}^tX\,YB) = \mathrm{tr}({}^tX\,YB\,{}^tB) = \varphi(X, f_{I_n,B{}^tB}(Y))$

  $\mathrm{tr}({}^tB \cdot ({}^tXYB)) = \mathrm{tr}(({}^tXYB) \cdot {}^tB)$

  φ è non deg

d) Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di $\mathbb{R}^n$, ortonormale per $\langle\,,\rangle$, fatta di autovettori di B (TEO SPETTRALE)

Prod scal standard

Vale quindi $Bv_i = \lambda_i v_i\ \ \forall i = 1, \dots, n$. Definisco $A_{ij} := \begin{pmatrix} 0 \\ {}^tv_i \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j$.

B è simmetrica

Osserviamo che $f_{I_n,B}(A_{ij}) = A_{ij}B = \begin{pmatrix} 0 \\ {}^tv_i B \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j = \begin{pmatrix} 0 \\ {}^tv_i {}^tB \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j = \begin{pmatrix} 0 \\ (Bv_i)^t \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j = \lambda_i \begin{pmatrix} 0 \\ {}^tv_i \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j = \lambda_i A_{ij}$

$\{v_1, \dots, v_n\}$ sono ortonormali rispetto al prod scalare standard

e che $\varphi(A_{ij}, A_{kt}) = \mathrm{tr}({}^tA_{ij}A_{kt}) = \mathrm{tr}(A_{kt}{}^tA_{ij}) = \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ {}^tv_k \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow t \cdot \begin{pmatrix} 0 & v_i & 0 \end{pmatrix}\right)$, $\underset{j}{\uparrow}$ $= \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} & 0 & \\ 0 \cdots 0 & {}^tv_k v_i & 0 \cdots 0 \\ & 0 & \end{pmatrix} \leftarrow t\right)$, $\underset{j}{\uparrow}$ $= \begin{cases} \mathrm{tr}(0) = 0 & k \ne i \\ \mathrm{tr}(E_{tj}) = \begin{cases} 0 & t \ne j \\ 1 & t = j \end{cases} & k = i \end{cases}$

quindi $\varphi(A_{ij}, A_{kt}) = \begin{cases} 0 & \text{se } (i,j) \ne (k,t) \\ 1 & \text{se } (i,j) = (k,t) \end{cases}$

Quindi $\{A_{ij} \mid i = 1, \dots, n \wedge j = 1, \dots, n\}$ è una base ortonormale di n^2 autovettori per $f_{I_n,B}$

1 se $(i,j)=(k,t)$ $\qquad t=j \quad 1$

Quindi $\{A_{ij} \mid i=1,\dots,n \wedge j=1,\dots,n\}$ è una base ortonormale di n^2 autovettori per $f_{I_n,B}$

Abbiamo osservato prima che, se λ_i è un autovalore di B con autovettore v_i, allora

$f_{I_n,B}(A_{ij}) = \lambda_i A_{ij}$ $\forall j=1,\dots,n$, quindi $f_{I_n,B}$ ha gli stessi autovalori di B con

moltiplicità moltiplicate per n

Esercizio 2.

Siano $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matrici hermitiane.

a) Dimostrare che la matrice $i[A,B]$ è hermitiana, dove $i \in \mathbb{C}$ è l'unità immaginaria e $[A,B] = AB - BA$.

b) Sia $< \underline{x}, \underline{y} >= \sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i$ il prodotto hermitiano canonico in $\mathbb{C}^n$. Dimostrare che, $\forall \underline{x} \in \mathbb{C}^n$ si ha:

$$\Im(< A\underline{x}, B\underline{x} >) = -\frac{1}{2} < \underline{x}, i[A,B]\underline{x} >$$

dove $\Im(z)$ è la parte immaginaria di z.
[osservare che $\Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ e che si ha $\overline{< A\underline{x}, B\underline{x} >} =< B\underline{x}, A\underline{x} >$. Usare anche che A e B sono hermitiane e quindi si possono spostare da una parte all'altra nel prodotto hermitiano canonico].

c) Assunta la disuguaglianza di Schwartz

$$| < \underline{x}, \underline{y} > |^2 \leq ||x||^2 ||y||^2, \quad \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{C}^n,$$

dimostrare che

$$||A\underline{x}||^2 ||B\underline{x}||^2 \geq \frac{1}{4} | < \underline{x}, [A,B]\underline{x} > |^2$$

d) Dedurre il "principio di indeterminazione"

$$V_{\underline{x}}(A) V_{\underline{x}}(B) \geq \frac{1}{4} | < \underline{x}, [A,B]\underline{x} > |^2$$

dove $\underline{x} \in \mathbb{C}^n$ è un vettore unitario e per ogni matrice hermitiana A si pone

$$V_{\underline{x}}(A) =< \underline{x}, A^2\underline{x} > -(< \underline{x}, A\underline{x} >)^2.$$

A, B hermitiane

a) $^t\overline{i[A,B]} = {^t\overline{i(AB-BA)}} = -i\left({^t\bar{B}}{^t\bar{A}} - {^t\bar{A}}{^t\bar{B}}\right) = -i(BA-AB) = i(AB-BA) = i[A,B]$

b) $\Im(<Ax,Bx>) = \frac{1}{2i}\left(<Ax,Bx> - \overline{<Ax,Bx>}\right) = \frac{1}{2i}(<Ax,Bx> - <Bx,Ax>) \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2i}\left({^t\bar{x}}ABx - {^t\bar{x}}BAx\right) \underset{\uparrow}{=} -\frac{1}{2}{^t\bar{x}}\, i(AB-BA)x = -\frac{1}{2}<x, i[A,B]x>$

A, B hermitiane $\qquad \frac{1}{i} = -i$

c) $\|Ax\|^2 \|Bx\|^2 \underset{\uparrow}{\geq} |<Ax,Bx>|^2 \underset{\uparrow}{\geq} |\Im(<Ax,Bx>)|^2 \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{4}|<x, i[A,B]x>|^2 = \frac{1}{4}|<x,[A,B]x>|^2$

Schwartz $\qquad |z| \geq |\Im(z)| \qquad$ punto precedente

d) Siano $\tilde{A} := A - <x,Ax>Id$ e $\tilde{B} := B - <x,Bx>Id$

$^t\bar{x}\,{^t}Ax$ è un numero, quindi è uguale al suo trasposto

A è hermit

Dato che A e B sono hermitiane, allora $<x,Ax>$ e $<x,Bx> \in \mathbb{R}$ $\left(<x,Ax> = {^t\bar{x}}Ax \underset{\downarrow}{=} {^t\bar{x}}\,{^t\bar{A}}x \underset{\downarrow}{=} {^t}\left({^t\bar{x}}\,{^t\bar{A}}x\right) = {^tx}\bar{A}\bar{x} = \overline{<x,Ax>}\right)$

quindi anche $\tilde{A}$ e $\tilde{B}$ sono hermitiane. Per c) quindi vale

$$\|\tilde{A}x\|^2 \|\tilde{B}x\|^2 \geq \frac{1}{4}|<x,[\tilde{A},\tilde{B}]x>|^2$$

Concludiamo osservando che:

- $\|\tilde{A}x\|^2 = V_x(A)$ e $\|\tilde{B}x\|^2 = V_x(B)$

dim: $\|\tilde{A}x\|^2 = <\tilde{A}x, \tilde{A}x> = <Ax - <x,Ax>x, Ax - <x,Ax>x> =$

$= <Ax,Ax> - <Ax, <x,Ax>x> - <<x,Ax>x, Ax> + <<x,Ax>x, <x,Ax>x> =$

$= <Ax,Ax> - <x,Ax><Ax,x> - \cancel{\overline{<x,Ax>}<x,Ax>} + \cancel{\overline{<x,Ax>}<x,Ax>}\underbrace{<x,x>}_{1} =$

x è unitario

$= <Ax,Ax> - <x,Ax><Ax,x> \underset{\uparrow}{=} <x,A^2x> - (<x,Ax>)^2$

A è hermitiana

- $[\tilde{A},\tilde{B}] = [A,B]$

dim: $[\tilde{A},\tilde{B}] = [A - <x,Ax>Id, B - <x,Bx>Id] =$

$= (A - <x,Ax>Id)(B - <x,Bx>Id) - (B - <x,Bx>Id)(A - <x,Ax>Id) =$

$= AB - \cancel{<x,Bx>A} - \cancel{<x,Ax>B} + \cancel{<x,Ax><x,Bx>} - BA + \cancel{<x,Ax>B} + \cancel{<x,Bx>A} - \cancel{<x,Bx><x,Ax>} =$

$= AB - BA = [A,B]$

Esercizio 3.

Sia $f : V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale.
Per ogni autovalore reale $\lambda \in \mathbb{R}$ di f, consideriamo l'autospazio relativo $V_\lambda = \mathrm{Ker}(f - \lambda id_V)$ e il sottospazio di V $W_\lambda = \mathrm{Im}(f - \lambda id_V)$.

a) Se $V = \mathbb{R}^2$ e f è dato dalla moltiplicazione per la matrice $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, allora dimostrare che $\dim(V_\lambda \cap W_\lambda) > 0$ trovando una base di $V_\lambda \cap W_\lambda$.

b) In generale, dimostrare che se f è diagonalizzabile con autovalori distinti $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, allora per ogni λ_i il sottospazio W_{λ_i} è la somma di tutti gli autospazi diversi da V_{λ_i}.
[si può considerare una base di autovettori e la matrice diagonale associata...; oppure per ogni vettore $\underline{v} \in V$ scrivere $\underline{v} = \underline{v}_1 + \cdots + \underline{v}_k$ come somma di autovettori relativi a autovalori distinti e osservare che $f(\underline{v}) - \lambda_i\underline{v}$ sta in ...]. Dedurre che in questo caso $V_{\lambda_i} \cap W_{\lambda_i} = \underline{0}$.

c) Sia $\phi > 0$ un prodotto scalare definito positivo su V. Dedurre dal punto b) e dal teorema spettrale che se f è simmetrico allora $W_\lambda = (V_\lambda)^\perp$ per ogni autovalore λ.

d) Nelle stesse ipotesi di c), dedurre le stesse conclusioni di c) nel caso in cui f è ortogonale e λ è un autovalore reale.

a) $V_\lambda = \mathrm{Ker}(A - \lambda Id) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$W_\lambda = \mathrm{Im}(A - \lambda Id) = \mathrm{Im}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

e λ è un autovalore reale.

a) $V_\lambda = \mathrm{Ker}\,(A - \lambda\, \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$W_\lambda = \mathrm{Im}\,(A - \lambda\, \mathrm{Id}) = \mathrm{Im}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Quindi $V_\lambda \cap W_\lambda = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) Dimostriamo che $W_{\lambda_i} = \bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} V_{\lambda_j}$

$\boxed{\subseteq}$ Sia $f(v) - \lambda_i v \in W_{\lambda_i}$, con $v \in V$. Dato che f è diagonalizzabile allora $V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$, quindi $v = v_1 + \dots + v_n$ con $v_j \in V_{\lambda_j}$

Quindi $f(v) - \lambda_i v = \sum_{j=1}^{k} f(v_j) - \lambda_i v_j = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j v_j - \lambda_i v_j = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} (\lambda_j - \lambda_i) v_j$

Ora, dato che $v_j \in V_{\lambda_j}$, si ha che $(\lambda_j - \lambda_i) v_j \in V_{\lambda_j}$, quindi

$f(v) - \lambda_i v \in \bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} V_{\lambda_j}$ $\square$

Concludiamo ora che $W_{\lambda_i} = \bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} V_{\lambda_j}$ per dimensioni:

$$\dim\left(\bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} V_{\lambda_j}\right) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} \dim V_{\lambda_j} = n - \dim V_{\lambda_i} = n - \dim \mathrm{Ker}\,(f - \lambda_i \mathrm{Id}) = \dim \mathrm{Im}\,(f - \lambda_i \mathrm{Id}) = \dim W_{\lambda_i}$$

Deduciamo allora che $V_{\lambda_i} \cap W_{\lambda_i} = V_{\lambda_i} \cap \left(\bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} V_{\lambda_j}\right) = \{0\}$ in quanto gli autospazi $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_k}$ sono in somma diretta

c) Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortonormale per ϕ di autovettori per f

Allora $V = V_{\lambda_1} \overset{\perp}{\oplus} \dots \overset{\perp}{\oplus} V_{\lambda_k} \overset{\text{punto b)}}{=} V_{\lambda_i} \overset{\perp}{\oplus} W_{\lambda_i}$, quindi $W_{\lambda_i} = (V_{\lambda_i})^\perp$

infatti: $W_{\lambda_i} \subseteq (V_{\lambda_i})^\perp$ perché sono in somma diretta ortogonale, e inoltre

$\dim (V_{\lambda_i})^\perp \underset{\phi \text{ è non deg}}{=} n - \dim V_{\lambda_i} = \dim W_{\lambda_i}$

d) $W_\lambda = (V_\lambda)^\perp$

dim. $\boxed{\subseteq}$ Sia $f(v) - \lambda v \in W_\lambda$, con $v \in V$. Allora $\forall w \in V_\lambda$ $\phi(f(v) - \lambda v, w) =$

$$\underset{\lambda \text{ è reale}}{=} \phi(f(v), w) - \lambda \phi(v, w) \underset{f \text{ è ortogonale}}{=} \phi(f(v), w) - \lambda \phi(f(v), f(w)) = \phi(f(v), w - \lambda f(w)) = \phi(f(v), w - \lambda^2 w) \overset{f \text{ ortogonale e } \phi \text{ def pos} \Rightarrow \lambda = \pm 1}{=} \phi(f(v), 0) = 0$$

Quindi $f(v) - \lambda v \in (V_\lambda)^\perp$

Concludiamo che $W_\lambda = (V_\lambda)^\perp$ per dimensioni: $\dim (V_\lambda)^\perp \underset{\phi \text{ è non deg}}{=} n - \dim V_\lambda = \dim W_\lambda$

Esercizio 4.
Siano $H_1, H_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ due matrici hermitiane semidefinite positive.

a) Mostrare che $\mathrm{Ker}(H_1 + H_2) = \mathrm{Ker}(H_1) \cap \mathrm{Ker}(H_2)$.

b) Mostrare che $\mathrm{Im}(H_1 + H_2) = \mathrm{Im}(H_1) + \mathrm{Im}(H_2)$.

c) Mostrare che per ogni $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{Ker}(A^*A) = \mathrm{Ker}(A)$, $\mathrm{Im}(AA^*) = \mathrm{Im}(A)$ e dedurne che $\mathrm{rg}(AA^*) = \mathrm{rg}(A^*A)$.

d) Mostrare che per ogni $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{Im}(AA^* + BB^*) = \mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}(B)$.

e) Date $A, B \in M(n, \mathbb{C})$ tali che $A^*B = 0$, mostrare che $\mathrm{rg}(A^*A + B^*B) \leq \mathrm{rg}(AA^* + BB^*)$.

a) $\boxed{\supseteq}$ $x \in \mathrm{Ker}(H_1) \cap \mathrm{Ker}(H_2) \Rightarrow (H_1 + H_2)x = H_1 x + H_2 x = 0 \Rightarrow x \in \mathrm{Ker}(H_1 + H_2)$

$\boxed{\subseteq}$ $x \in \mathrm{Ker}(H_1 + H_2) \Rightarrow H_1 x + H_2 x = 0 \Rightarrow {}^t\bar{x} H_1 x + {}^t\bar{x} H_2 x = 0$

Ora dato che H_1 e H_2 sono semidefinite positive si ha che ${}^t\bar{x} H_1 x \geq 0$ e ${}^t\bar{x} H_2 x \geq 0$

quindi dato che la loro somma è 0 si ha ${}^t\bar{x} H_1 x = 0$ e ${}^t\bar{x} H_2 x = 0$

$\Rightarrow x \in CI(H_1) \cap CI(H_2) \underset{\text{(Visto nella lezione del 24/04)}}{=} \mathrm{Ker}\, H_1 \cap \mathrm{Ker}\, H_2$

H hermit $\Rightarrow \mathrm{Im}(H) = (\mathrm{Ker}\, H)^\perp$
dim
$\boxed{\subseteq}$ $\forall y \in \mathrm{Ker}\, H$, $\forall x \in H$ si ha
$\langle Hx, y \rangle \overset{H \text{ hermit}}{=} \langle x, Hy \rangle = \langle x, 0 \rangle = 0$
Per dimensione sono $=$

b) $\mathrm{Im}\,(H_1 + H_2) = (\mathrm{Ker}\,(H_1 + H_2))^\perp \overset{\text{punto prec}}{=} (\mathrm{Ker}\, H_1 \cap \mathrm{Ker}\, H_2)^\perp \overset{\text{(Visto nella lezione del 12/04)}}{=} (\mathrm{Ker}\, H_1)^\perp + (\mathrm{Ker}\, H_2)^\perp = \mathrm{Im}\, H_1 + \mathrm{Im}\, H_2$

c) $\mathrm{Ker}\,(A^*A) = \mathrm{Ker}\, A$

dim: $\boxed{\supseteq}$ $x \in \mathrm{Ker}\, A \Rightarrow A^*Ax = A^*0 = 0 \Rightarrow x \in \mathrm{Ker}(A^*A)$

$\boxed{\subseteq}$ $x \in \mathrm{Ker}(A^*A) \Rightarrow A^*Ax = 0 \Rightarrow x^*A^*Ax = 0 \underset{\langle \cdot, \cdot \rangle \text{ è def posit}}{\Longrightarrow} Ax = 0 \Rightarrow x \in \mathrm{Ker}\, A$

$x^*A^*Ax = (Ax)^*Ax = \langle Ax, Ax \rangle$

$\mathrm{Im}\,(AA^*) = \mathrm{Im}\, A$

dim: $\boxed{\subseteq}$ $y \in \mathrm{Im}(AA^*) \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}^n$ t.c. $y = A(A^*x) \Rightarrow y \in \mathrm{Im}\, A$

Concludiamo che $\mathrm{Im}\,(AA^*) = \mathrm{Im}\, A$ per dimensione:

$\dim \mathrm{Im}\,(AA^*) = n - \dim \mathrm{Ker}(AA^*) \underset{\text{visto prima}}{=} n - \dim \mathrm{Ker}\, A^* = \dim \mathrm{Im}\, A^* = \dim \mathrm{Im}\, A$

$\mathrm{rg}\,(AA^*) = \mathrm{rg}\,(A^*A)$

dim: $\dim \mathrm{Im}\, AA^* \underset{\text{visto prima}}{=} \dim \mathrm{Im}\, A = n - \dim \mathrm{Ker}\, A \underset{\text{visto prima}}{=} n - \dim \mathrm{Ker}\, A^*A = \dim \mathrm{Im}\, A^*A$

d) AA^* e BB^* sono semidefinite positive: $x^*AA^*x = (A^*x)(A^*x) = \langle A^*x, A^*x \rangle \geq 0$

visto prima visto prima

d) AA^* e BB^* sono semidefinite positive: $x^*AA^*x = (A^*x)(A^*x) = \langle A^*x, A^*x\rangle \geq 0$
Quindi per il punto b) si ha $\mathrm{Im}\,(AA^* + BB^*) = \mathrm{Im}\,AA^* + \mathrm{Im}\,BB^*$. Infine per il punto c) $\mathrm{Im}\,AA^* = \mathrm{Im}\,A$ e $\mathrm{Im}\,BB^* = \mathrm{Im}\,B$

e) Dato che $A^*B = 0$ allora $(A^*+B^*)(A+B) = A^*A + B^*B + \underbrace{A^*B}_{\overset{\shortparallel}{0}} + \underbrace{(A^*B)^*}_{\overset{\shortparallel}{0}}$

$$\text{quindi } rg(A^*A+B^*B) = rg((A^*+B^*)(A+B)) \underset{\substack{\uparrow\\ \forall A,B\in M_n(\mathbb{K})\ \ rg(AB)\le rg B}}{\le} rg(A+B) = \dim(\mathrm{Im}(A+B)) \underset{\substack{\uparrow\\ \mathrm{Im}(A+B)\subseteq \mathrm{Im}A+\mathrm{Im}B}}{\le} \dim(\mathrm{Im}(A)+\mathrm{Im}(B)) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{punto d)}}}{=} \dim(\mathrm{Im}(AA^*+BB^*)) = rg(AA^*+BB^*)$$