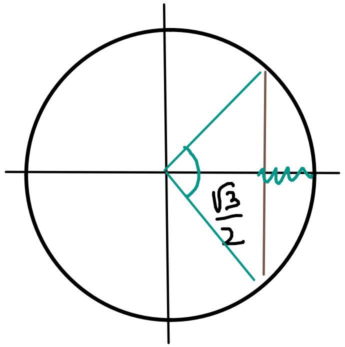
**Esercizio 11** Risolvere la disequazione $\cos\left(\frac{2}{1+x^2}\right) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

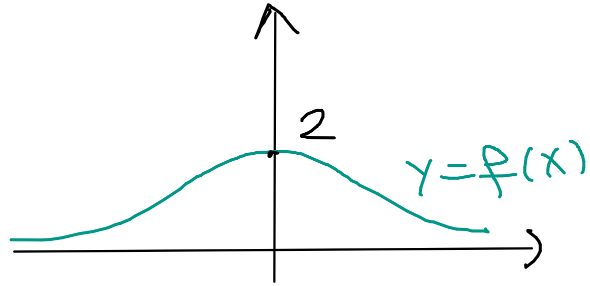



Chiamiamo $f(x) = \frac{2}{1+x^2}$.

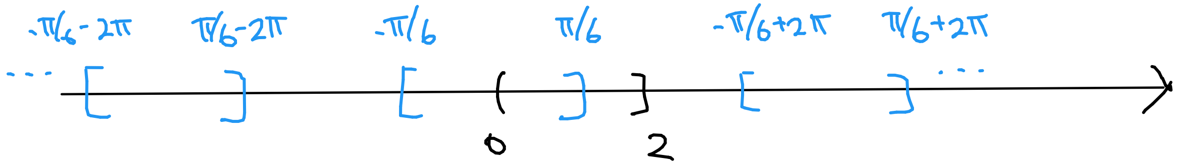
Ricordando che $\cos\left(\pm\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, è abbastanza immediato notare che la disequazione è vera SSE $f(x)$ appartiene ad uno degli intervalli $\left[-\frac{\pi}{6}+2k\pi, \frac{\pi}{6}+2k\pi\right]$, $k \in \mathbb{Z}$.

Cerchiamo di usare un poco di furbizia...

Notiamo che $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, che la funzione è pari $\left[\text{infatti } f(-x) = \frac{2}{1+(-x)^2} = \frac{2}{1+x^2} = f(x)\right]$ e che $0$ è un punto di massimo assoluto $\left[\frac{2}{1+0^2} \geq \frac{2}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}\right]$.




In particolare $\mathrm{Imm}(f) = (0, 2]$.




Come si evince dalla figura, $\mathrm{Imm}(f) \cap \left[-\pi/6+2\pi k, \pi/6+2\pi k\right] = \emptyset$ per $k \neq 0$, quindi rimane in gioco un solo intervallo

Cerchiamo dunque tutte le $x \in \mathbb{R}$ tali che $0 \leq f(x) \leq \frac{\pi}{6}$

[ dei valori $[-\frac{\pi}{6}, 0)$ non ci importa, $f$ è positiva! ] .

Risolvendo otteniamo

$$\frac{2}{1+x^2} \leq \frac{\pi}{6} \iff \frac{12}{\pi} \leq 1 + x^2 \iff x^2 \geq \frac{12}{\pi} - 1 \iff$$

$$\iff x \geq \sqrt{\frac{12}{\pi} - 1} \quad \vee \quad x \leq -\sqrt{\frac{12}{\pi} - 1} .$$

**Esercizio 12** Risolvere la disequazione $\cos\left(\frac{8}{1+x^2}\right) \geq \frac{1}{2}$

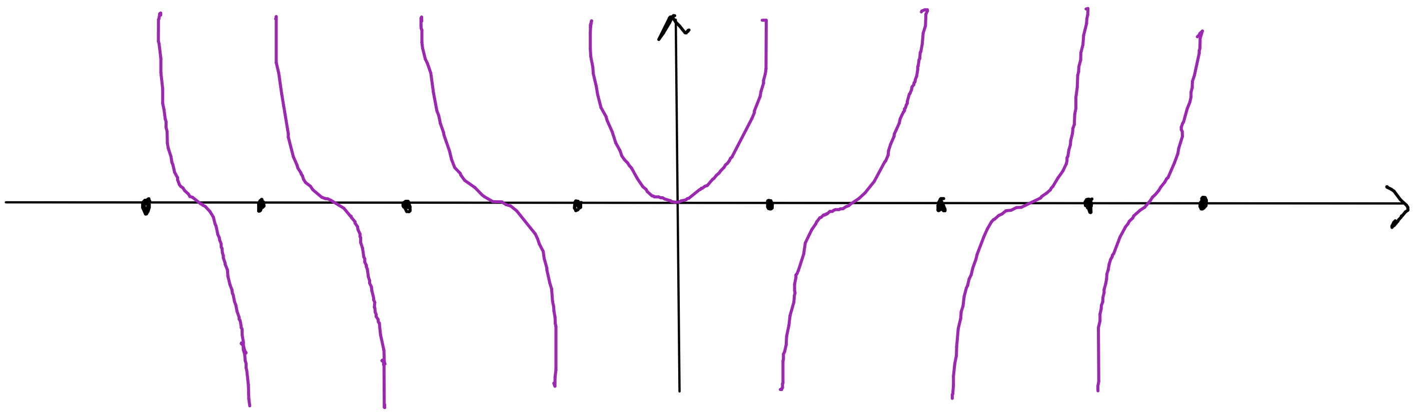
La soluzione è estremamente simile a quella dell'esercizio precedente (notiamo che gli intervalli ora sono del tipo $[-\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \frac{\pi}{3} + 2\pi k]$, $k \in \mathbb{Z}$ ). L'unica vera differenza è che ora $g(x) = \frac{8}{1+x^2}$ è tale che $\mathrm{Imm}(f) = (0, 8]$ ("più grande"), dunque le soluzioni saranno l'unione delle soluzioni delle disequazioni

$$0 \leq g(x) \leq \pi/3 \quad ; \quad -\pi/3 + 2\pi \leq g(x) \leq 2\pi + \frac{\pi}{3}$$

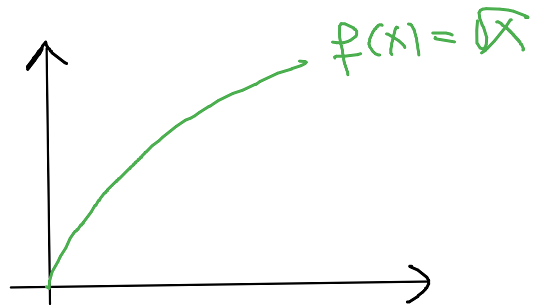
**Esercizio 19** Sia $f(x) = \tan(x^2)$.

ⓐ Scrivere il dominio

Sappiamo che la tangente non è definita nei punti $\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
Dunque il dominio di $f$ è $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} =$
$= \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi} \mid k \in \mathbb{N}\}$. Cogliamo l'occasione per disegnare un grafico approssimativo di $f$ (funzione pari!):



⚠ Notiamo che il grafico si "stringe" sempre di più perché la radice quadrata ha derivata decrescente.



b) Trovare gli intervalli massimali $I_k$ tali che $f|_{I_k}$ è iniettiva

**Definizione** [Sottoinsiemi massimali] Sia $A$ un insieme e $P$ una certa proprietà sui sottoinsiemi di $A$, ovvero una funzione $P: \mathcal{P}(A) \longrightarrow \{0,1\}$, dove $\mathcal{P}(A) = \{\text{parti di } A\} = \{B \mid B \subseteq A\}$ (sostanzialmente, se $P(B)=1$ per $B \subseteq A$, allora la proprietà $P$ è VERA su $B$. Se invece $P(B)=0$ allora la proprietà $P$ è FALSA su $B$). Un sottoinsieme $B \subseteq A$ è MASSIMALE per la proprietà $P$ se NON esiste $C \subseteq A$ tale che $B \subset C$ e $P(C)=1$ (non esiste un sottoinsieme PIÙ GRANDE su cui ~~la~~ proprietà sia vera).

**Esempio** Sia $P: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \{0,1\}$ tale che $P(B)=1$ SSE $0 \notin B \vee 1 \notin B$ (il sottoinsieme NON contiene 0 od 1). Allora $B_1 = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $B_2 = \mathbb{N} \setminus \{1\}$ sono gli unici due sottoinsiemi massimali per $P$

## Soluzione esercizio 19b

Notiamo che nel nostro caso l'insieme e' $\mathbb{R}$ e $P(I \subseteq \mathbb{R}) = 1$ SSE $I$ intervallo, $I \subseteq$ Dominio $(f)$, $f|_I$ iniettiva.

⚠ Non basta che $f|_I$ sia iniettiva, si richiede anche che $I$ sia un intervallo e si sottointende che $f|_I$ debbe essere definita, ovvero che $I \subseteq \mathrm{Dom}(f)$.

Mostriamo che tutti gli intervalli del tipo $I_k^+ = \left(\sqrt{-\frac{\pi}{2} + k\pi}, \sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi}\right)$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sono intervalli massimali. Infatti:

- $I_k^+ \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ (per un pelo!)
- $f|_{I_k^+}$ e' iniettiva (guardare il grafico o derivare)
- se $I$ intervallo e' tale che $I_k^+ \subset I$, allora $I$ deve contenere per forza almeno uno tra $\sqrt{-\frac{\pi}{2} + k\pi}$ e $\sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi}$, dunque $P$ non può essere vera su $I$ perche' $I \nsubseteq \mathrm{Dom}(f)$.

P e' vera sugli $I_k^+$

Allo stesso modo funzionano $I_k^- = \left(-\sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi}, -\sqrt{-\frac{\pi}{2} + k\pi}\right)$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Infine, anche gli intervalli $I^+ = [0, \sqrt{\frac{\pi}{2}})$ e $I^- = (-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, 0]$ sono massimali. Infatti:

- $I^+, I^- \subseteq Dom(f)$
- $f|_{I^+}$ e $f|_{I^-}$ sono iniettive

} P è vera su $I^+$ e $I^-$

- se $I$ intervallo è tale che $I^+ \subset I$, allora o $\sqrt{\frac{\pi}{2}} \in I$, e dunque $I \not\subseteq dom(f)$, oppure $\exists \varepsilon > 0$ tale che $(-\varepsilon, 0] \subseteq I$ (moralmente $I$ "va un po' a sinistra"), e dunque $f|_I$ non è iniettiva (guardare il grafico per credere!). Uguale per $I^-$.

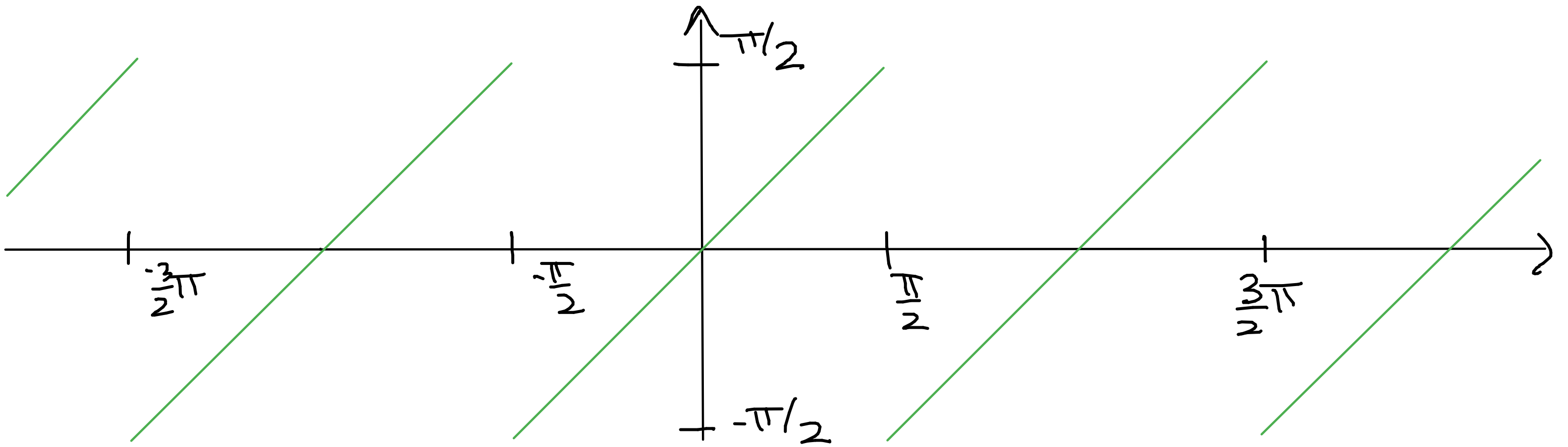
Abbiamo dimenticato qualche intervallo massimale? No, perché essere un intervallo è una richiesta abbastanza rigida. In particolare abbiamo mostrato nel punto (a) che il dominio di $f$ può essere scritto come un'unione (infinita) di intervalli ed abbiamo concluso che ognuno di essi è massimale per P tranne $(-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}})$, che invece contiene due intervalli massimali

ⓒ Scrivere le inverse di $f$ ristretta agli intervalli massimali trovati nel punto precedente

Consideriamo innanzitutto $f|_{I_k^+} : I_k^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
Notiamo che $f|_{I_k^+}$ è iniettiva per definizione di $I_k^+$ ed è sorgettiva, dunque è invertibile. Dimostriamo che l'inversa è la funzione $g_k^+ : \mathbb{R} \longrightarrow I_k^+$ $g_k^+(y) = \sqrt{\operatorname{arctg}(y) + k\pi}$.
Controlliamo innanzitutto di non aver scritto schifezze.
Sappiamo che $\operatorname{Imm}(\operatorname{arctg}) = (-\pi/2, \pi/2)$, dunque $\operatorname{Imm}(g_k^+) = \left(\sqrt{-\frac{\pi}{2}+k\pi}, \sqrt{\frac{\pi}{2}+k\pi}\right) = I_k^+$. Inoltre $g_k^+$ è iniettiva perché arctg è iniettiva.
Ora:

- $(f|_{I_k} \circ g_k^+)(y) = f|_{I_k}(\sqrt{\operatorname{arctg}(y)+k\pi}) = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(y) + k\pi) =$
$= \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(y)) = y$, dove ho usato che tg è $\pi$-periodica
- $(g_k^+ \circ f|_{I_k})(x) = g_k^+(\operatorname{tg}(x^2)) = \sqrt{\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(x^2)) + k\pi} =$
$= \sqrt{x^2 - k\pi + k\pi} = \sqrt{x^2} = |x| = x$, dove ho usato che $x > 0$.

Perché $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(x^2)) = x^2 - k\pi$? Ricordo che $\operatorname{arctg}: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ dunque NON è vero che $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(x)) = x \ \forall x \in \mathbb{R}$. In effetti, a voler fare il grafico di $\operatorname{arctg} \circ \operatorname{tg} : \operatorname{Dom}(\operatorname{tg}) \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ...




Cosa sta succedendo? Moralmente, $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(x)) = x - \pi k$, dove $k \in \mathbb{Z}$ è tale da "riportare" (traslare) $x$ in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Abbiamo dimostrato che $g_k^+$ è l'inversa di $f|_{I_k^+}$. Le inverse di $f|_{I_k^-}$ si trovano in maniera analoga.

Per quanto riguarda $I^+$ ed $I^-$, la situazione è più gestibile.

Sia infatti $f|_{I^+} : I^+ \longrightarrow \mathbb{R}$. Notiamo che la funzione non è surgettiva ( $Imm(f|_{I^+}) = [0,+\infty)$), dunque dobbiamo invertire la funzione $f|_{I^+} : I^+ \longrightarrow [0,+\infty)$. Dimostriamo che l'inversa è la funzione $g^+ : [0,+\infty) \to I^+$ $g^+(y) = \sqrt{arctg|_{[0,+\infty)}(y)}$.

Abbiamo scritto schifezze? No, e scrivere $arctg|_{[0,+\infty)}$ e non arctg è stato fondamentale!

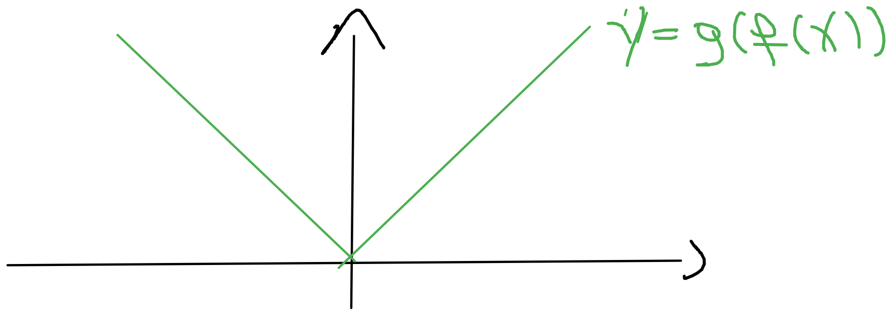
Ora

- $(f|_{I^+} \circ g^+)(y) = f|_{I^+}\left(\sqrt{arctg|_{[0,+\infty)}(y)}\right) = tg\left(\left|arctg|_{[0,+\infty)}(y)\right|\right) =$
$= tg\left(arctg|_{[0,+\infty)}(y)\right) = y$, dove ho usato che $arctg|_{[0,+\infty)}(y) \geq 0$ per togliere il modulo.
- $(g^+ \circ f|_{I^+})(x) = g^+(tg(x^2)) = \sqrt{arctg|_{[0,+\infty)}(tg(x^2))} = \sqrt{x^2} = |x| = x$, dove ho usato che $x \in [0, \sqrt{\frac{\pi}{2}})$ per togliere il modulo.

Dunque $g^+$ è l'inversa di $f|_{I^+}$. L'inversa di $f|_{I^-}$ si trova in maniera analoga.

Perché continuo a scrivere $\sqrt{x^2} = |x|$? Ricordo che $f(x) = x^2$ come $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non è invertibile, occorre considerare $f|_{[0,+\infty)} : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$. A questo punto la funzione $g : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ $g(y) = \sqrt{y}$ è la sua inversa.

Come è fatto il grafico di $g \circ f : \mathbb{R} \to [0,+\infty)$? Noto che $g(f(x))$ non può essere uguale ad $x$ se $x$ è negativo ($g$ è a valori in $[0,+\infty)$). In effetti $\sqrt{x^2} = -x$ se $x$ è negativo e quindi $g(f(x)) = |x|$.




<u>Esercizio 20</u> Estremamente simile al 19, che può tranquillamente essere utilizzato come guida per risolverlo (avevo voglia di scriverlo? Palesemente no, ma spero si capisca!).