ESERCIZIO 1

Esercizio 1) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e siano $U, W \subset V$ due sottospazi.
a) Dimostrare che per ogni $\underline{u} \in U \backslash W$ esiste $g \in \mathrm{Ann}(W)$ tale che $g(\underline{u}) \neq 0$.
b) Dimostrare che $\mathrm{Ann}(W) \subset Ann(U) \Rightarrow U \subset W$.
c) Sia $\underline{v} \in V$ e si supponga che esistano $\underline{w}_1, \underline{w}_2 \in W$, con $\underline{w}_1 \neq \underline{w}_2$ che verificano la seguente proprietà: se $f \in V^*$ è tale che $f(\underline{w}_1) = f(\underline{w}_2)$, allora $f(\underline{v}) = 0$. Mostrare che $\underline{v} \in W$ (in particolare $\underline{v} \in Span(\underline{w}_1 - \underline{w}_2)$).

a) Sia $\{w_1, \dots, w_k\}$ base di W, allora $\{w_1, \dots, w_k, u\}$ è lin indip, infatti:

supponiamo $a_1 w_1 + \dots + a_k w_k + a_{k+1} u = 0$, se $a_{k+1} \neq 0$ allora $u \in Span\{w_1, \dots, w_k\} = W$, assurdo quindi $\boxed{a_{k+1} = 0}$, ma allora dato che $w_1, \dots, w_k$ sono lin indip vale anche $\boxed{a_1 = \dots = a_k = 0}$ $\square$

Estendiamo a una base di V $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_k, u, v_1, \dots, v_j\}$, sia $g: V \to \mathbb{K}$ tale che $g(w_1) = \dots = g(w_k) = 0$ e $g(u) = g(v_1) = \dots = g(v_j) = 1$, allora g è ben definita perché l'abbiamo definita su una base di V e infine $g \in \mathrm{Ann}\, W$ e $g(u) = 1 \neq 0$

b) Supponiamo $\mathrm{Ann}\, W \subseteq \mathrm{Ann}\, U$. Sia $u \in U$, se per assurdo $u \notin W$ allora $u \in U \setminus W$
Per il punto a) allora $\exists\, g \in \mathrm{Ann}\, W$ t.c. $g(u) \neq 0$, ma questo è assurdo perché per ipotesi $\mathrm{Ann}\, W \subseteq \mathrm{Ann}\, U$ quindi $g(u) = 0$ $\lightning$

c) La proposizione $\left(\forall f \in V^* \quad f(w_1) = f(w_2) \Rightarrow f(v) = 0 \right)$ è equivalente a $\mathrm{Ann}(Span(w_1 - w_2)) \subseteq \mathrm{Ann}(Span(v))$. Per il punto b) allora $Span(v) \subseteq Span(w_1 - w_2)$, da cui $v \in Span(w_1 - w_2) \subseteq W$

ESERCIZIO 2

Esercizio 2) Sia $n \geq 1$ un intero fissato. Per $a, t \in \mathbb{K}$, sia $A_{a,t} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ la matrice quadrata di ordine $n+1$ con coefficienti a_{ij} tali che $a_{ij} = a$ se $i > j$, $a_{ij} = t^{j-i}$ se $i \leq j$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 & \dots & t^n \\ a & 1 & t & \dots & t^{n-1} \\ a & a & 1 & \dots & t^{n-2} \\ . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ a & a & a & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Al variare di $a, t \in \mathbb{K}$, calcolare il determinante di $A_{a,t}$.
b) Al variare di $a, t \in \mathbb{K}$, calcolare il rango di $A_{a,t}$.

Osserviamo che sommare a una riga un multiplo di un'altra riga non cambia il determinante (infatti stiamo moltiplicando per una matrice della forma $\begin{pmatrix} 1 & & \lambda \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ che ha determinante uguale a 1)

a) L'idea è di sottrarre a ogni riga t-volte la successiva

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 & \cdots & t^n \\ a & 1 & t & \cdots & t^{n-1} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & t^2 \\ \vdots & & & & t \\ a & \cdots & & a & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_1 - tA_2} \begin{pmatrix} (1-at) & 0 & \cdots & & 0 \\ a & 1 & t & \cdots & t^{n-1} \\ a & a & 1 & t \cdots & t^{n-2} \\ \vdots & & & \ddots & \\ a & \cdots & & & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_2 - tA_3} \begin{pmatrix} (1-at) & 0 & \cdots & & 0 \\ (a-at) & (1-at) & 0 & \cdots & 0 \\ a & a & 1 & \cdots & t^{n-2} \\ \vdots & & & \ddots & \\ a & \cdots & & & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[A_i - tA_{i+1}]{} \cdots \longrightarrow \begin{pmatrix} (1-at) & & & & 0 \\ (a-at) & (1-at) & & & \\ \vdots & (a-at) & (1-at) & & \\ & & (a-at) & \ddots & \\ (a-at) & \cdots & & (a-at) & (1-at) \\ a & \cdots & & a & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det A = (1-at)^n$$

b) Se $at \neq 1$ allora $\det A \neq 0$ quindi $rg\, A = n+1$

Se $at = 1$:
- $t = 1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow rg\, A = 1$
- $t \neq 1 \Rightarrow 1 - at = 0$ e $a - at \neq 0$ (dato che $a \neq 0$ perché $at = 1$ e dato che $t \neq 1$) $\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ (a-at) & 0 & & & \\ \vdots & (a-at) & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ (a-at) & \cdots & & (a-at) & 0 \\ a & \cdots & & a & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow rg\, A = n$

ESERCIZIO 3

Esercizio 3) Sia $A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & k-2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Per $k = 2$ e $k = 3$ trovare gli autovalori e gli autovettori di A_k.
b) Sia $f_k : \mathbb{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ l'endomorfismo definito da $f_k(X) = A_k X$. Per $k = 2$ e $k = 3$ indicare gli autovalori di f_k con le loro relative molteplicità algebriche e geometriche.

a) $\boxed{K=2}$ $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, il polinomio caratteristico è

$$p_{A_2}(\lambda) = \det(A_2 - \lambda Id) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^3 - (2-\lambda) = (2-\lambda)\left((2-\lambda)^2 - 1\right) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = (2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-3)$$

e le radici sono gli autovalori: $\lambda = 1$, $\lambda = 2$, $\lambda = 3$

Calcoliamo gli autovettori di $\lambda = 1$: $\overset{\neq 0}{v}$ è autovettore di 1 $\iff A_2 v = 1 \cdot v \iff (A_2 - Id \cdot 1)v = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y=0 \\ z=0 \end{cases} \iff v = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} \iff v \in Span\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $v \neq 0$

Calcoliamo gli autovettori di $\lambda = 2$: $\overset{\neq 0}{v}$ è autovettore di 2 $\iff A_2 v = 2 \cdot v \iff (A_2 - Id \cdot 2)v = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} y+z=0 \\ x=0 \end{cases} \iff v = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -y \end{pmatrix} \iff v \in Span\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $v \neq 0$

Calcoliamo gli autovettori di $\lambda = 3$: $\overset{\neq 0}{v}$ è autovettore di 3 $\iff A_2 v = 3 \cdot v \iff (A_2 - Id \cdot 3)v = 0 \iff \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x+y+z=0 \\ x-y=0 \\ z=0 \end{cases} \iff v = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \iff v \in Span\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $v \neq 0$

$\boxed{K=3}$ $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, il polinomio caratteristico è

$$p_{A_3}(\lambda) = \det(A_3 - \lambda Id) = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)\left((3-\lambda)^2 - 1\right) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 8) = (2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-4)$$

e le radici sono gli autovalori: $\lambda = 2$, $\lambda = 4$

Calcoliamo gli autovettori di $\lambda = 2$: $\overset{\neq 0}{v}$ è autovettore di 2 $\iff A_3 v = 2 \cdot v \iff (A_3 - Id \cdot 2)v = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x+y+z=0 \iff v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \iff v \in Span\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

Calcoliamo gli autovettori di $\lambda = 4$: $\overset{\neq 0}{v}$ è autovettore di 4 $\iff A_3 v = 4 \cdot v \iff (A_3 - Id \cdot 4)v = 0 \iff \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x+y+z=0 \\ x-y+z=0 \\ z=0 \end{cases} \iff v = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \iff v \in Span\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) Osserviamo che $\{\text{autovalori di } f_K\} = \{\text{autovalori di } A_K\}$, infatti

$\boxed{\subseteq}$ Sia λ autovalore di f_K, allora $\exists X \neq 0$ t.c. $\underset{A_K \cdot X}{f_K(X)} = \lambda X$. Sappiamo che $X \neq 0$ quindi ha almeno una colonna non nulla, ad esempio la prima. Guardando la prima colonna si ha che $A_K X^{(1)} = \lambda X^{(1)}$, quindi λ è autovalore di A_K.

$\boxed{\supseteq}$ Sia λ autovalore di A_K, allora $\exists v \neq 0$ t.c. $A_K v = \lambda v$, ma allora $A_K \cdot (v|v|v) = \lambda(v|v|v)$ quindi $f_K((v|v|v)) = \lambda(v|v|v)$, quindi λ è autovalore di f_K $\square$

$\boxed{K=2}$ Gli autovalori di f_2 sono quindi $\lambda = 1, 2, 3$

Scelto un autovalore λ e un autovettore v di A_2, sicuramente $(v|v|v)$, $(0|v|v)$, $(0|0|v)$ sono tre autovettori linearmente indipendenti di f_2 per l'autovalore λ.

Quindi per $\lambda = 1, 2, 3$ la molteplicità geometrica è ≥ 3, d'altra parte la dimensione dello spazio è 9 e quindi, dato che autovettori rispetto a autovalori diversi sono linearmente indipendenti, la molteplicità geometrica è esattamente 3 per $\lambda = 1, 2, 3$.

Sappiamo che la molteplicità algebrica è maggiore o uguale di quella geometrica, e inoltre il polinomio caratteristico ha grado 9, quindi la molteplicità algebrica è esattamente 3 per $\lambda = 1, 2, 3$

$\boxed{K=3}$ Gli autovalori di f_3 sono quindi $\lambda = 2, 4$

Per $\lambda = 2$, sicuramente

$\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix} \middle| \begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix} \middle| \begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(0 \middle| \begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix} \middle| \begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(0 \middle| 0 \middle| \begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$,

$\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix} \middle| \begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix} \middle| \begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(0 \middle| \begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix} \middle| \begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(0 \middle| 0 \middle| \begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$

sono sei autovettori linearm. indip. di f_3 per l'autovalore $\lambda = 2$

Quindi la molteplicità geometrica di $\lambda = 2$ è ≥ 6

Per $\lambda = 4$, sicuramente

$\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix} \middle| \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix} \middle| \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(0 \middle| \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix} \middle| \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(0 \middle| 0 \middle| \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$

sono tre autovettori linearm. indip. di A_3 per l'autovalore $\lambda = 4$
Quindi la molteplicità geometrica di $\lambda = 4$ è ≥ 3
Come prima, dato che la dimensione dello spazio è 9, la molteplicità geometrica di $\lambda = 2$ è esattamente 6 e di $\lambda = 4$ è esattamente 3
Come prima, dato che la molteplicità algebrica è maggiore o uguale di quella geometrica, la molteplicità algebrica di $\lambda = 2$ è 6 e di $\lambda = 4$ è 3

ESERCIZIO 4

Esercizio 4) Sia $V = \mathbb{R}_3[x]$ lo spazio dei polinomi a coefficienti reali di grado ≤ 3 e sia $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ la base canonica di V.
a) Consideriamo l'applicazione lineare $d : V \to V$ data dalla derivata (cioè $d(p(x)) = p'(x)$). Scrivere la matrice di d in base $\mathcal{B}$.
b) Determinare il polinomio caratteristico di d.
c) Calcolare gli autovalori e gli autovettori di d.

a) $d(1) = 0$, $d(x) = 1$, $d(x^2) = 2x$, $d(x^3) = 3x^2$, quindi

$$\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(d) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Il polinomio caratteristico di d è $p_d(\lambda) = \det\left(\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(d) - \lambda \, Id\right) =$

$$= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = (-\lambda)^4 = \lambda^4$$

c) Dato che $p_d(\lambda) = \lambda^4$ allora l'unico autovalore è 0.
Sia $p(x) \overset{\neq 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ un autovettore di d per l'autovalore 0, allora
$0 = d(p(x)) = a_1 + a_2 \cdot 2 \cdot x + a_3 \cdot 3 \cdot x^2 \Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0$
Ma allora gli autovettori sono $\text{Span}(1) \setminus \{0\}$, cioè le costanti non nulle

ESERCIZIO 5

Esercizio 5) La matrice $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$? E su $\mathbb{C}$?
Ogni matrice $\begin{bmatrix} 0 & z \\ w & 0 \end{bmatrix}$, $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$?

a) Caso Reale: Il polinomio caratteristico di $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ è $p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1$
che su $\mathbb{R}$ non ha radici. Quindi $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ su $\mathbb{R}$ non ha autovalori, in particolare non è diagonalizzabile

Caso Complesso: Il polinomio caratteristico di $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ è $p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i)$
Quindi $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ su $\mathbb{C}$ ha due autovalori distinti, quindi dato che $1 \leq$ "molteplicità geometrica" $\leq$ "molteplicità algebrica" allora la molteplicità geometrica di $-i$ e di i è 1.
Quindi per il criterio di diagonalizzabilità, è diagonalizzabile

b) Il polinomio caratteristico di $\begin{pmatrix} 0 & z \\ w & 0 \end{pmatrix}$ è $p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & z \\ w & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - zw = (\lambda - \sqrt{zw})(\lambda + \sqrt{zw})$
Come prima, dato che i due autovalori sono distinti ($\sqrt{zw} \neq -\sqrt{zw}$ perché $z, w \neq 0$), allora hanno molteplicità geometrica 1 e quindi per il criterio di diagonalizzabilità, è diagonalizzabile

ESERCIZIO 6

Esercizio 6) Data l'equazione

$$z + \frac{1}{z} = w$$

a) Per z che varia in $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ dire come varia w.
b) Dire per quali $w \in \mathbb{C}$ tutte le soluzioni z sono reali.
c) Dire per quali $w \in \mathbb{C}$ tutte le soluzioni z sono immaginarie pure.

a) $|z| = 1 \Rightarrow \begin{cases} z = e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta \\ \frac{1}{z} = e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \end{cases} \Rightarrow z + \frac{1}{z} = 2\cos\theta$, quindi w varia in $[-2, 2] \subseteq \mathbb{R}$

b) Tutte le soluzioni z sono reali $\Leftrightarrow w \in \mathbb{R}$ e $w \leq -2 \vee w \geq 2$

$\boxed{\Rightarrow}$ Sia z una soluzione reale, allora $w = z + \frac{1}{z}$ è reale. Ma allora $z + \frac{1}{z} = w \Rightarrow$
$\Rightarrow z^2 - zw + 1 = 0 \Rightarrow z = \frac{w \pm \sqrt{w^2 - 4}}{2}$ ed è reale $\Leftrightarrow w^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow w \leq -2 \vee w \geq 2$

z

$\boxed{\Leftarrow}$ Sia z una soluzione, allora $z^2 - 2w + 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{w \pm \sqrt{w^2-4}}{2}$

Dato che $w \in \mathbb{R}$ e $w \leq -2 \vee w \geq 2$ allora $w^2 - 4 \geq 0$ quindi $z \in \mathbb{R}$

c) Tutte le soluzioni z sono immaginarie pure $\Leftrightarrow$ w è immaginario puro

$\boxed{\Rightarrow}$ Sia $z = ix$ con $x \in \mathbb{R}$ soluzione immaginaria pura, allora $w = z + \frac{1}{z} = ix + \frac{1}{ix} = ix + \frac{-i}{x} = i\left(x - \frac{1}{x}\right)$

$\boxed{\Leftarrow}$ Sia $w = ik$ con $k \in \mathbb{R}$ e sia z una soluzione, allora $z = \frac{w \pm \sqrt{w^2-4}}{2} = \frac{ik \pm \sqrt{-k^2-4}}{2} = \frac{ik \pm i\sqrt{k^2+4}}{2} = i\left(\frac{k \pm \sqrt{k^2+4}}{2}\right)$

ESERCIZIO 7

Esercizio 7) Scrivere una matrice M a coefficienti reali di ordine 2 tale che M sia diagonalizzabile su $\mathbb{C}$ ma non su $\mathbb{R}$.

La matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dell'esercizio 5 è un esempio