FATTI UTILI GRUPPI

mercoledì 11 ottobre 2023 15:25

Per dim che una funzione $f \in Aut(G)$ devo far vedere che: f è ben def.
f è omo $\to f(xy) = f(x)f(y)$
f è inj $\to Ker f = \{e\}$
f è surj $\to \forall y \in G \ \exists x \in G$ t.c. $f(x) = y$

Vari modi per vedere la normalità

1) $H \trianglelefteq G \iff \forall g \in G, \ \forall h \in H$ si ha che $ghg^{-1} \in H$?
$\iff gHg^{-1} = H$?

2) $H \trianglelefteq G \iff H$ è invariante per automorfismi interni
$\iff \forall \varphi_g \quad \varphi_g(H) \subseteq H$
$\qquad\qquad\quad \| $
$\qquad\quad gHg^{-1} \subseteq H$

3) $H \trianglelefteq G \iff N_G(H) = G$ dove $N_G(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$ (o equiv $\iff N_G(H) \supseteq$ insieme $g_1, \dots, g_n$ di generatori di $G \iff g_i H g_i^{-1} = H \ \forall i = 1, \dots, n$)

4) $H \trianglelefteq G \Leftarrow [G:H] = 2$

5) $N \trianglelefteq G \iff orb(N) = \{N\}$

6) $H \trianglelefteq G$ è t.c. ogni φ_g (aut. interno) $\varphi_g : \begin{array}{l} G \to G \\ x \mapsto gxg^{-1} \end{array}$ soddisfa $\varphi_g(H) = H$

Un sgr. di indice il più piccolo primo che divide l'ordine di G è normale

$\begin{cases} N < G \text{ è caratt. se } \forall \varphi \in Aut(G) \quad \varphi(N) = N \\ H \text{ caratt} \Rightarrow H \text{ normale} \quad \text{(non vale il viceversa)} \end{cases}$

Fatti utili

- $Aut(S_n) \cong S_n$ se $n > 2$ e $n \neq 6$
- $Z(S_3) = \{e\}$
- Se $H \trianglelefteq G$ e K è caratt. in H cioè $\underset{\text{caratt.}}{K} < H \trianglelefteq G \Rightarrow K \trianglelefteq G$
- $\mathbb{Z}_{pq}^*$ p, q primi $\neq 2$ e $(p,q) = 1$ $\mathbb{Z}_{pq}^*$ non è ciclico
- Sia $K < S_n \Rightarrow K < A_n$ oppure K ha metà elt pari e metà elt dispari
- Se G è abeliano $\Rightarrow$ ogni sgr è normale.
- Se $H \trianglelefteq G$ e $K \trianglelefteq G \Rightarrow H \cap K \trianglelefteq G$.
- Sia $n \geq 5$ $\sigma \in A_n$, $\sigma \neq e \Rightarrow \sigma$ ha un coniugato σ', $\sigma \neq \sigma'$ t.c. $\sigma(i) = \sigma'(i)$ per qualche $i = 1, \dots, n$.
- Gli unici sgr normali di S_n sono $\{e\}, A_n, S_n$.
- Sia $m \geq 5$ Allora in S_n $\nexists$ sgr di indice K con $2 < K < n$.
- Se $K < H < G$ K l'unico sgr di ordine m in $H \Rightarrow N(H) \subseteq N(K)$
- $G \curvearrowright X$ $x, y \in \mathcal{O}$-orbita ($x, y \in$ alla stessa orbita) $\Rightarrow Stab(x)$ e $Stab(y)$ sono coniugati.

Semplicità:

def

Un gruppo G si dice semplice se gli unici suoi sgr normali sono $\{e\}$ e G

- Teo indice $\to$ Se $\exists\, H < G$ t.c. $|G/H| = h$ t.c. $|G| \nmid h! \Rightarrow G$ non è semplice

- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ è semplice $\Leftrightarrow n$ è primo
- S_n non è semplice $\forall\, n \geq 3$
- Gruppi abeliani di # non primo non sono semplici
- A_n è semplice $\forall\, n \geq 5$
  $\hookrightarrow A_4$ non è semplice.
- G gruppo semplice con $|G| = n$ con n non primo e sia p primo t.c. $p \mid n \Rightarrow n \leq n_p!$
- G gruppo semplice con $|G| = n \geq 3$ Se n è pari $\Rightarrow 4 \nmid n$
- A_5 è l'unico (a meno di isomorfismo) gruppo semplice di ordine 60
- G gruppo semplice con $|G| = n$ con n non primo e sia p primo t.c. $p \mid n \Rightarrow n \leq n_p!$

Sylow.

$\boxed{n_p = \frac{|G|}{|N(H)|}}$ $\boxed{n_p \mid |G|}$

$$\boxed{|orb(H)| = \frac{|G|}{|Stab(H)|} = \frac{|G|}{|N(H)|}}$$

$\hookrightarrow$ è il $N(H)$ dato che l'azione è il coniugio

$$\boxed{n_p = |orb(H)| = \frac{|G|}{|N(H)|}}$$

- Se $\exists$ un solo p-Sylow cioè $n_p = 1 \Rightarrow$ il p-Sylow è normale in quanto l'unico coniugato è se stesso

Classificazione

$|G| = pqr$ distinti $\Rightarrow$ G ammette un sgr normale di ordine primo
G ammette un sgr normale di indice primo

$|G| = 4K + 2 \Rightarrow$ G ammette un sgr norm. di indice 2.

$H < G$ $|H| = 2$ H normale $\Leftrightarrow H < Z(G)$

$K < H \trianglelefteq G$ K caratt. in $H \Rightarrow K \trianglelefteq G$

perché gli elementi di ordine 2 generano D15,

Equivalentemente, per ogni ordine pari diverso da 30 esistono più sottogruppi di quell'ordine.
Dimostreremo ciò facendo vedere che un tale sottogruppo H non è normale.

$D_k \hookrightarrow D_n \quad \forall k | n$ ci sono $\frac{n}{k}$ copie $\quad n = k \cdot t$

$\varphi: D_K \longmapsto D_n$

$r \longmapsto r'$ rotaz. di ordine K $\quad (r'^t)$

$s \longmapsto s'$

$srs^{-1} \longmapsto (r^{-1})'$

$\frac{ord(r')}{(t, ord(r'))} = \frac{n}{(\frac{n}{k}, n)} = \frac{n}{\frac{n}{k}} = k$

$(r')^{-T}$

Lombardo

$\varphi: G \longrightarrow S(X)$

$g \longmapsto \varphi_g$

un'azione si dice transitiva se $\forall x, y \in X \ \exists g \in G$ t.c. $\varphi_g(x) = y$

se $orb(x) = X \quad \forall x \in X$

Se $X = \{N \mid N \leq G\}$ φ è l'az. di coniugio su X $\quad \forall N \in X \quad St(N) = N_G(N)$

$orb(N) = Cl(N) = \{gNg^{-1} \mid g \in G\}$

G gruppo, $H \leq G$ t.c. $[G:H] = 2$

se $K < G \Rightarrow [K : H \cap K] \in \{1, 2\}$

G sgr ab di S_n, se G è trans $\Rightarrow |G| = n$.

$\tilde{\tau} \in N_G(\langle \sigma \rangle) \Rightarrow H = \langle \sigma \rangle \langle \tilde{\tau} \rangle$ dato che $\langle \sigma \rangle \langle \tilde{\tau} \rangle < H$ che ha la sua stessa #

G, $N \triangleleft G$, N contiene ogni elt $x \in G$ t.c. $(ord(x), [G:N]) = 1$

$H \leq S_n \quad n \geq 5$ se $[S_n : H] = n \Rightarrow H \cong S_{n-1}$

Siano p, q, primi distinti

G un p-gr., H un q-gr.

consideriamo $X_1 = G \rtimes_{\varphi_1} H \qquad X_2 = G \rtimes_{\varphi_2} H$

con $\varphi_1, \varphi_2 : H \to Aut(G)$

Se $Ker\varphi_1 \neq Ker\varphi_2 \Rightarrow X_1 \not\cong X_2$

A5 ha 5-2Sylow