COMPITO DI ALGEBRA 1

10 luglio 2018

Esercizio 1. Siano p e q due numeri primi distinti.

1. Determinare in funzione di p e di q il minimo intero positivo n tale che S_n ammette un sottogruppo abeliano di ordine pq.
2. Determinare in funzione di p e di q il minimo intero positivo n tale che S_n ammette un sottogruppo di ordine pq.

Esercizio 2. Sia G un gruppo di ordine $20825 = 5^2 \cdot 7^2 \cdot 17$.

1. Mostrare che G contiene un sottogruppo di ordine $1225 = 5^2 \cdot 7^2$.
2. Mostrare che G è abeliano.

Esercizio 3. Sia A un anello commutativo con identità e sia x un'indeterminata su A.

1. Sia $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \in A[x]$. Mostrare che $f(x)$ è nilpotente se e solo se $a_0, \dots, a_n$ sono nilpotenti.
2. Per ogni I ideale di A consideriamo l'insieme $I[x]$ dei polinomi di $A[x]$ con tutti i coefficienti in I. Mostare che $I[x]$ è un ideale di $A[x]$ e che $A[x]/I[x] \cong (A/I)[x]$.
3. Dimostare che $\sqrt{I[x]} = \sqrt{I}[x]$.

Esercizio 4. Sia $\mathbb{K}$ il campo $\mathbb{Q}(t)$ ed $f(X)$ il polinomio $X^4 - 2(t^2+1)X^2 + t^2(t^2+1)$.

1. Mostrare che $f(X)$ è irriducibile su $\mathbb{K}$ e descrivere con un insieme di generatori il suo campo di spezzamento L.
2. Calcolare il gruppo di Galois di L su $\mathbb{K}$.
3. Descrivere le estensioni intermedie $\mathbb{K} \subset E \subset L$ e per ciascuna determinare, se esiste, un polinomio $g(X) \in \mathbb{K}[X]$ di cui E è campo di spezzamento.

Lo svolgimento degli esercizi 1 e 3 va fatto in un foglio separato.