

## COMPITO DI ALGEBRA 1

11 febbraio 2013

**Esercizio 1.** Dimostrare che il gruppo  $\text{Aut}(S_3 \times S_3)$  è isomorfo ad un prodotto semidiretto di  $S_3 \times S_3$  e  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

**Esercizio 2.** Sia  $G$  il gruppo delle funzioni  $f : \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$  definite da  $f(x) = ax + b$   $\forall x \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$  con  $a, b \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$  e  $a \neq 0$  e consideriamo il suo sottogruppo  $H := \{f \in G \mid f(x) = 2^t x + b \text{ con } t \in \mathbb{Z}\}$ . Determinare le classi di coniugio in  $G$  e in  $H$  degli elementi  $f(x) = x + 1$  e  $g(x) = 2x + 1$  ed indicarne esplicitamente la cardinalità.

**Esercizio 3.** Sia  $A$  un anello commutativo con identità e sia  $x$  un'indeterminata. Dimostrare che  $f(x) \in A[x]$  è nilpotente se e solo se tutti i suoi coefficienti sono nilpotenti.

**Esercizio 4.** Determinare, al variare del parametro intero  $a$ , il gruppo di Galois del campo di spezzamento del polinomio  $(x^4 - 3)(x^2 - a)$  su  $\mathbb{Q}$  e su  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ .