

COMPITO DI ALGEBRA 1

11 febbraio 2013

Esercizio 1. Dimostrare che il gruppo $\text{Aut}(S_3 \times S_3)$ è isomorfo ad un prodotto semidiretto di $S_3 \times S_3$ e $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Esercizio 2. Sia G il gruppo delle funzioni $f : \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ definite da $f(x) = ax + b$ $\forall x \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ con $a, b \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ e $a \neq 0$ e consideriamo il suo sottogruppo $H := \{f \in G \mid f(x) = 2^t x + b \text{ con } t \in \mathbb{Z}\}$. Determinare le classi di coniugio in G e in H degli elementi $f(x) = x + 1$ e $g(x) = 2x + 1$ ed indicarne esplicitamente la cardinalità.

Esercizio 3. Sia A un anello commutativo con identità e sia x un'indeterminata. Dimostrare che $f(x) \in A[x]$ è nilpotente se e solo se tutti i suoi coefficienti sono nilpotenti.

Esercizio 4. Determinare, al variare del parametro intero a , il gruppo di Galois del campo di spezzamento del polinomio $(x^4 - 3)(x^2 - a)$ su \mathbb{Q} e su $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.