

COMPITO DI ALGEBRA 1

7 giugno 2013

1. Siano $\sigma = (1, 2)(3, 4)(5, 6, 7)$ e $\tau = (1, 2)(8, 9, 10)$. Determinare il centralizzatore di $\langle \sigma \rangle$ e il centralizzatore di $\langle \sigma, \tau \rangle$ in \mathcal{S}_{10} .

2. Classificare i gruppi di ordine 20 a meno di isomorfismo.

3. Per ogni anello commutativo con identità R indichiamo con J_R il suo radicale di Jacobson, cioè l'intersezione di tutti i suoi ideali massimali.
 - a) Dimostrare che $x \in J_R$ se e solo se $1 + xy$ è invertibile in R , per ogni $y \in R$.
 - b) Sia $f : A \rightarrow B$ un omomorfismo surgettivo di anelli commutativi con identità. Dimostrare che $f(J_A) \subseteq J_B$.

4.
 - a) Determinare il gruppo di Galois su \mathbb{Q} del campo di spezzamento del polinomio $f(x) = x^4 - 12$.
 - b) Sia K un'estensione finita di \mathbb{Q} . Determinare i possibili gradi del campo di spezzamento di $f(x)$ su K ed esibire un esempio per ogni grado possibile.