SOLUZIONI DEL COMPITO DI ALGEBRA 1

7 giugno 2013

1. Siano $\sigma = (1,2)(3,4)(5,6,7)$ e $\tau = (1,2)(8,9,10)$. Determinare il centralizzatore di $\langle\sigma\rangle$ e il centralizzatore di $\langle\sigma,\tau\rangle$ in $\mathcal{S}_{10}$.

Soluzione esercizio 1. Dalla formula delle classi sappiamo che $|Z(\langle\sigma\rangle)| = \frac{|S_{10}|}{|C_\sigma|}$, dove C_σ è la classe di conuigio di σ in S_{10} cioè l'nsieme delle permutazioni di tipo $2+2+3$. Si calcola che $|C_\sigma| = \binom{10}{2}\binom{8}{2}\frac{1}{2}\binom{6}{3}2!$, quindi $|Z(\langle\sigma\rangle)| = 144$.
Sappiamo che tutte le permutazioni disgiunte da σ e tutti i cicli che compongono la permutazione σ commutano con σ perché commutano con ognuno dei suoi cicli; ne segue che $A = \langle(1,2),(3,4),(5,6,7),(8,9),(8,9,10)\rangle \subseteq Z(\langle\sigma\rangle)$. Osserviamo che $A = \langle(1,2)\rangle \times \langle(3,4)\rangle \times \langle(5,6,7)\rangle \times \langle(8,9),(8,9,10)\rangle$ (infatti le permutazioni dei sottogruppi trovati commutano tra loro, quindi A è prodotto diretto di tali sottogruppi) quindi $|A| = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 6 = 72$ e ha quindi indice 2 nel centralizzatore. Osserviamo ora che la permutazione $(1,3)(2,4)$ commuta con σ in quanto scambia tra loro i cicli $(1,2)$ e $(3,4)$ e commuta con $(5,6,7)$ essendo disgiunta da questa. D'altra parte non appartiene a A perché le permutazioni di A commutano con tutti i cicli di σ. Possiamo quindi concludere che $Z(\langle\sigma\rangle) = \langle A,(1,3)(2,4)\rangle$.

Sia ora $H = \langle\sigma,\tau\rangle$; chiaramente $Z(H) = Z(\langle\sigma\rangle) \cap Z(\langle\tau\rangle)$. Osserviamo che $Z(H) \subseteq A$ in quanto $Z(\langle\sigma\rangle) \setminus A = (1,3)(2,4)A$ e le permutazioni di questa classe laterale mandano $(1,2)$ in $(3,4)$ e quindi non commutano con τ. D'altra parte si verifica facilmente che $B = \langle(1,2),(3,4),(5,6,7),(8,9,10)\rangle \subseteq Z(H)$. Ora, poiché $|B| = 36$, si ha che $Z(H) = A$ oppure $Z(H) = B$, ma dato che $(8,9)$ non commuta con τ si può concludere che $Z(H) = B$.

2. Classificare i gruppi di ordine 20 a meno di isomorfismo.

Soluzione esercizio 2. Sia G un gruppo di ordine $20 = 2^2\cdot 5$; indichiamo con P_2 e con P_5 rispettivamente un suo 2-Sylow e un suo 5-Sylow. Se n_5 è il numero dei 5-Sylow si ha che $n_5 \equiv 1 \pmod 5$ e $n_5|4$ quindi $n_5 = 1$. Ne segue che il 5-Sylow è sempre normale e $G = P_5 \rtimes P_2$. Chiaramente $P_5 =< y >\cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ e $P_2 \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ oppure $P_2 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, e quindi esistono 2 gruppi abeliani di ordine 20 che sono $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ che non sono isomorfi tra loro perché il secondo non è ciclico.
Per classificare i prodotti semidiretti occorre vedere quanti sono i possibili omomorfismi $\varphi : P_2 \to \mathrm{Aut}(P_5)$ e vedere quali tra questi danno gruppi non isomorfi. Sappiamo che $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ è ciclico di ordine 4, possiamo quindi indicare i suoi elementi come $\{id,\gamma,\gamma^2,\gamma^3\}$ dove γ è l'automorfismo definito da $y \to y^2$.
Se $P_2 = \langle x\rangle \equiv \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ abbiamo che l'omomorfismo φ è definito dal valore di $\varphi(x) = \gamma^i$ con $i = 1,2,3$ ($i \neq 0$ in quanto abbiamo già preso in considerazione il prodotto diretto). Dico che i casi $i = 1$ e $i = 3$ (cioè i casi in cui $\varphi(x)$ ha ordine 4) danno gruppi isomorfi, mentre per $i = 2$ ottengo un altro gruppo. Indichiamo i 3 omomorfismi con φ_1, φ_2 e φ_3 ($\varphi_i(x) = \gamma^i$), e per ogni

i sia G_i il gruppo $P_5 \rtimes_{\varphi_i} P_2$. Nel gruppo G_2 si ha che $x^2 \in Z(P_5)$ mentre in G_1 e in G_3 si ha $Z(P_5) = P_5$, quindi G_2 non è isomorfo a G_1 o a G_3. I gruppi G_1 e G_3 sono invece isomorfi in quanto l'assegnamento $x \to x$ e $y \to y^4$ si estende ad un isomorfismo $G_1 \to G_3$.
Se $P_2 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ abbiamo che l'omomorfismo φ manda 2 elementi di ordine 2 in γ^2 e il terzo nell'identità. A meno di isomorfismo, si può supporre che il nucleo di φ sia $\langle(1,0)\rangle$. Quindi si ottiene un solo gruppo, che si vede facilmente essere isomorfo a D_{10}.
Possiamo quindi concludere che ci sono 5 gruppi di ordine 20 a meno di isomorfismo.

3. Per ogni anello commutativo con identità R indichiamo con J_R il suo radicale di Jacobson, cioè l'intersezione di tutti i suoi ideali massimali.
a) Dimostrare che $x \in J_R$ se e solo se $1 + xy$ è invertibile in R, per ogni $y \in R$.
b) Sia $f : A \to B$ un omomorfismo surgettivo di anelli commutativi con identità. Dimostrare che $f(J_A) \subseteq J_B$.
Soluzione esercizio 3. a) Sia $x \in J_R$, sia $y \in R$ e sia m un ideale massimale di R. Poiché $x \in m$ si ha che l'elemento $1 + xy \notin m$ in quanto altrimenti 1 apparterrebbe a m. Poiché questo vale per ogni ideale massimale m ho che $1 + xy$ è invertibile. Viceversa, supponiamo che $\forall y \in R$ l'elemento $1 + xy$ sia invertibile. Sia m un ideale massimale di R; osserviamo che l'ideale $(m, x) \subsetneq R$ in quanto altrimenti avrei $1 = a + xy$ con $a \in m$ e $y \in R$ e quindi $a = 1 - xy \in m$ sarebbe invertibile. Ne segue che $x \in m$ per ogni ideale massimale m di R, cioè $x \in J_R$.

b) Sia $x \in J_A$, voglio mostrare che $f(x) \in J_B$ e per il punto (a) questo è equivalente a dire che $1 + f(x)b$ è invertibile per ogni $b \in B$. Fissiamo $b \in B$, poiché f è surgettiva $b = f(a)$ per qualche $a \in A$, allora $1 + f(x)b = f(1 + xa)$ è immagine di un elemento invertibile di A e quindi è invertibile in B.

4.a) Determinare il gruppo di Galois su $\mathbb{Q}$ del campo di spezzamento del polinomio $f(x) = x^4 - 12$.
b) Sia K un'estensione finita di $\mathbb{Q}$. Determinare i possibili gradi del campo di spezzamento di $f(x)$ su K ed esibire un esempio per ogni grado possibile.
Soluzione esercizio 4. a) Le radici del polinomio $f(x)$ in una chiusura algebrica di $\mathbb{Q}$ sono $\pm\sqrt[4]{12}, \pm i\sqrt[4]{12}$, il campo di spezzamento di $f(x)$ su $\mathbb{Q}$ è quindi $F = \mathbb{Q}(\pm\sqrt[4]{12}, \pm i\sqrt[4]{12}) = \mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{12})$. Abbiamo $[F : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{12}) : \mathbb{Q}(\sqrt[4]{12})][\mathbb{Q}(\sqrt[4]{12}) : \mathbb{Q}]$; ora il grado di $\sqrt[4]{12}$ su $\mathbb{Q}$ è 4: infatti $\sqrt[4]{12}$ è radice di $f(x)$ che è il suo polinomio minimo in quanto è irriducibile su $\mathbb{Z}$ perché di Eisenstein rispetto al primo 3 e di conseguenza anche su $\mathbb{Q}$ per il lemma di Gauss. Inoltre $[\mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{12}) : \mathbb{Q}(\sqrt[4]{12})] = 2$ perche' il gardo di i è al massimo 2 in quanto i è radice di $x^2 + 1$ e le due estensioni non coincidono perchè $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{12}) \subset \mathbb{R}$ mentre $i \notin \mathbb{R}$. Ne segue che $[F : \mathbb{Q}] = 8$. Inoltre si ha $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q}) \cong D_4$: infatti sappiamo che il gruppo di Galois di un polinomio di grado 4 è isomorfo ad un sottogruppo di S_4, ma un sottogruppo di ordine 8 di S_4 ne è un 2-Sylow, quindi i sottogruppi di ordine 8 di S_4 sono tutti tra loro isomorfi. Poiché D_4 si immerge in S_4 (basta mandare un elemento di D_4 nella corrispondente permutazione dei vertici del quadrato), necessariamente $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q}) \cong D_4$

b) Il campo di spezzamento di $f(x)$ su K è $KF = K(i, \sqrt[4]{12})$; mostriamo che il suo grado su K può essere solo $1, 2, 4, 8$. Vediamo per prima cosa che tali numeri sono possibili: questi possono infatti essere ottenuti rispettivamente per $K = F$, $K = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{12})$, $K = \mathbb{Q}(i)$ e $K = \mathbb{Q}$.
D'altra parte, $[K(i, \sqrt[4]{12}) : K] = [K(i, \sqrt[4]{12}) : K(\sqrt[4]{12})][K(\sqrt[4]{12}) : K]$ e di questi gradi sappiamo che ovviamente $[K(i, \sqrt[4]{12}) : K(\sqrt[4]{12})] \leq 2$, e $[K(\sqrt[4]{12}) : K] \leq 4$. Osserviamo però che $[K(\sqrt[4]{12}) : K] \neq 3$ in quanto il polinomio $f(x)$ ha due coppie di radici opposte, quindi se K contiene una radice di $f(x)$ ne contiene anche un'altra. I possibili gradi sono quindi quelli elencati.
Nota: Più in generale si può mostrare che, poiché $F/\mathbb{Q}$ è normale $[FK : K] = [F : F \cap K] | [F : \mathbb{Q}]$.