

## COMPITO DI ALGEBRA 1

13 settembre 2013

1. a) Calcolare il centralizzatore in  $S_6$  e in  $A_6$  della permutazione  $\sigma = (1, 2, 3)(4, 5, 6)$ .  
b) Determinare le classi di coniugio di  $A_5$ .
  
2. Dimostrare che un gruppo di ordine  $p^4$  ha sempre un sottogruppo abeliano di ordine  $p^3$ .
  
3. Siano  $A$  e  $R$  anelli commutativi con identità con  $A \subseteq R$ . Il conduttore  $C$  di  $A$  in  $R$  è definito da  $C := \{\alpha \in R \mid \alpha R \subseteq A\}$ .  
a) Dimostrare che  $C$  è un ideale sia di  $R$  che di  $A$ .  
b) Dimostrare che  $C$  è il più grande ideale di  $A$  che sia anche ideale di  $R$ .  
c) Determinare il conduttore di  $A$  in  $R$  per  $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$  e  $R = \mathbb{Z}[\zeta_3]$  dove  $\zeta_3 = (-1 - \sqrt{-3})/2$ .
  
4. Sia  $\zeta_{11}$  una radice 11-esima primitiva dell'unità e sia  $K = \mathbb{Q}(\zeta_{11}, \sqrt{11})$ . Determinare il gruppo di Galois e il reticolo delle sottoestensioni dell'estensione  $K/\mathbb{Q}$ .