COMPITO DI ALGEBRA 1

16 gennaio 2015

Esercizio 1.
Per ogni $n \geq 3$, determinare il più piccolo sottogruppo normale di S_n che contiene un n-ciclo.

Esercizio 2.
Sia G un gruppo di ordine $5^2 \cdot 7 \cdot 17$. Mostrare che:
a) G ha un 5-Sylow S normale;
b) $S \subseteq Z(G)$;
c) G è abeliano.

Esercizio 3.
Sia p un numero primo e sia

$$A = \{(a_1, a_2, a_3, \dots) \,|\, a_i \in \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z},\ a_{i+1} \equiv a_i \pmod{p^i}\ \forall i \geq 1\}.$$

L'insieme A munito delle operazioni componente per componente è un anello commutativo con identità.
a) Quali sono gli elementi di A^*?
b) Mostrare che A possiede un unico ideale massimale M e che questo è principale.
c) Mostrare che ogni ideale non nullo di A è del tipo M^k per un certo $k \geq 0$.

Esercizio 4.
Sia $T = X^3 + X^{-3}$, consideriamo l'estensione di campi $\mathbb{C}(X) \supset \mathbb{C}(T)$.
a) Determinare il grado dell'estensione.
b) Mostrare che l'estensione è di Galois e determinare il gruppo di Galois.
c) Determinare le sottoestensioni e per ciascuna calcolare un elemento primitivo.