

COMPITO DI ALGEBRA 1

12 giugno 2015

Esercizio 1.

Sia G un gruppo finito e sia $G' = [G, G]$ il suo sottogruppo dei derivati.

a) Mostrare che se M è un sottogruppo massimale di G allora

$$Z(G) \leq M \text{ oppure } G' \leq M.$$

b) Dare un esempio di un gruppo non abeliano G e di un suo sottogruppo massimale M tale che $G' \subseteq M$ e $Z(G) \not\subseteq M$.

Esercizio 2.

a) Mostrare che $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_5)$ contiene un sottogruppo isomorfo a Q_8

b) Dimostrare che S_5 non è isomorfo a $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_5)$.

Esercizio 3.

Sia A l'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{13}]$.

a) Verificare che $18 + 5\sqrt{13}$ è invertibile e che A^* è infinito.

b) Verificare che gli elementi $2, 3 + \sqrt{13}$ sono irriducibili in A .

c) Dimostrare che l'anello A non è a fattorizzazione unica.

Esercizio 4.

Sia K il campo di spezzamento su \mathbb{Q} del polinomio $f(x) = x^5 - 5$.

a) Determinare il grado di K/\mathbb{Q} .

b) Determinare tutte le sottoestensioni di K/\mathbb{Q} individuando quelle normali su \mathbb{Q} .