COMPITO DI ALGEBRA 1

14 luglio 2015

Esercizio 1.
Sia G un gruppo finito; ricordiamo che l'esponente di G è il minimo intero positivo d tale che $x^d = 1 \ \forall x \in G$.
a) Dimostrare che l'esponente di G è uguale all'ordine di G se e solo se tutti i sottogruppi di Sylow di G sono ciclici.
b) Dimostrare che se G è abeliano l'esponente di G concide con il massimo ordine di un elemento di G.

Esercizio 2.
a) Dimostrare che S_7 non ha sottogruppi abeliani di ordine 16 nè di ordine 14.
b) Dimostrare che i possibili ordini di un sottogruppo abeliano di S_7 sono 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12.

Esercizio 3.
a) Descrivere l'insieme degli interi a per cui l'ideale $I = (7, x^2 + a)$ è primo in $\mathbb{Z}[x]$.
b) Indichiamo con S la parte moltiplicativa $\mathbb{Z}[x] - (7, x^2+4)$. Per quali valori del parametro $\lambda \in \mathbb{Z}$ il polinomio $f_\lambda(x) = x^4 + \lambda x^2 + 5$ è invertibile in $S^{-1}\mathbb{Z}[x]$?

Esercizio 4.
Sia $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{2})$.
a) Determinare un elemento primitivo di $K/\mathbb{Q}$.
b) Sia L la più piccola estensione di K che è normale su $\mathbb{Q}$. Determinare il gruppo di Galois di $L/\mathbb{Q}$.