

## COMPITO DI ALGEBRA 1

2 luglio 2019

1. Sia  $G$  un gruppo di ordine  $2^k d$ , con  $d$  dispari e  $k$  positivo. Supponiamo che  $G$  contenga un unico sottogruppo di ordine  $2^k$  e che questo sottogruppo, che denotiamo  $P$ , sia ciclico.

(a) Dimostrare che  $P$  è contenuto nel centro di  $G$ .

(b) Dimostrare che  $G$  contiene un sottogruppo di indice 2.

(c) Dimostrare che  $G$  è isomorfo al prodotto diretto  $P \times H$  per un opportuno gruppo  $H$  di ordine  $d$ .

*Nota.* È possibile usare senza dimostrazione il fatto – visto in classe – che un gruppo di ordine  $2d$  con  $d$  dispari possiede un sottogruppo di ordine  $d$ .

2. Sia  $G$  un gruppo di ordine  $8p^2$ , dove  $p$  è un numero primo. Dimostrare che  $G$  non è semplice.

3. Sia  $A$  un dominio ad ideali principali.

(a) Dimostrare che ogni ideale primo  $P$  di  $A[X]$  tale che  $P \cap A = \{0\}$  è principale.

(b) Sia  $I$  un ideale di  $A[X]$  tale che  $I \cap A = (m)$  dove  $m \neq 0$  è “libero da quadrati”, ossia prodotto di primi distinti. Dimostrare che  $I$  può essere generato da al più 2 elementi.

4. Sia  $g(x) \in \mathbb{F}_2[x]$  il polinomio  $g(x) = x^4 + x + 1$  e sia  $\beta$  una radice di  $g(x)$  in una opportuna estensione di  $\mathbb{F}_2$ . Determinare, per ogni  $n \geq 1$ , il grado di  $\mathbb{F}_2(\beta^n)$  su  $\mathbb{F}_2$ .