

COMPITINO DI ALGEBRA 1

16 dicembre 2020

Esercizio 1.

Sia

$$A = \frac{\mathbb{Z}[i][x]}{(7, (x^2 + 1)(x - 1)(x + 6))}.$$

Determinare la cardinalità di A , il numero degli elementi invertibili di A , e il numero dei nilpotenti in A .

Esercizio 2.

Sia K il campo di spezzamento di $x^6 - 2$ su \mathbb{Q} e sia $L = \mathbb{Q}(\zeta_{16})$.

1. Elencare le sotto-estensioni quadratiche di K .
2. Calcolare il grado $[K \cap L : \mathbb{Q}]$.

Esercizio 3.

Sia L/K un'estensione normale finita, sia $f(x) \in K[x]$ un polinomio irriducibile di grado $n \geq 2$ e siano $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ le sue radici (tutte distinte) in una chiusura algebrica di L .

1. Mostrare con un esempio che $L(\alpha_i)$ e $L(\alpha_j)$ non sono necessariamente isomorfi su L .
2. Mostrare che per ogni i e j i campi $L(\alpha_i)$ e $L(\alpha_j)$ sono isomorfi su K .
3. Dimostrare che in $L[x]$ il polinomio $f(x)$ si spezza in d fattori di grado n/d per un certo $d \geq 1$.