COMPITO DI ALGEBRA 1

14 settembre 2021

Esercizio 1.
Siano p un numero primo, $A = \mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ e $\pi : A \to B$ un omomorfismo di gruppi surgettivo.

1. Dimostrare che B è abeliano.
2. Sia $B \cong \mathbb{Z}/p^{f_1}\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/p^{f_k}\mathbb{Z}$ con $f_i \geq 1$ per ogni $i = 1, \ldots, k$. Mostrare che $k \leq 3$.
3. Dimostrare che B **non** può essere isomorfo a $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$.

Esercizio 2.

1. Sia $n > 4$ e sia H un sottogruppo di S_n. Dimostrare che se $[S_n : H] > 2$, allora $[S_n : H] \geq n$.
2. Determinare per quali interi positivi dispari d il gruppo S_6 ammette un sottogruppo di indice d.

Esercizio 3. Sia K un campo e sia $S = \{f \in K[x] \bigm| f \text{ non ha radici in } K\}$.

1. Dimostrare che S è una parte moltiplicativa di $K[x]$.
2. Sia $A = S^{-1}K[x]$. Mostrare che gli ideali massimali di A sono tutti e soli quelli del tipo $S^{-1}(x - a)$ con $a \in K$.
3. Mostrare per ogni ideale massimale M di A si ha $A/M \cong K$.

Esercizio 4. Per ogni numero primo p sia K_p il campo di spezzamento su $\mathbb{Q}$ del polinomio $x^p - 2$.

1. Contare i sotto-campi di K_{11} di grado 2, 5 e 10 su $\mathbb{Q}$ e dimostrare che sono tutti contenuti in $\mathbb{Q}(\zeta_{11})$.
2. Dimostrare che K_7K_{11} è un'estensione di Galois di $\mathbb{Q}$ e che $\mathrm{Gal}(K_7K_{11}/\mathbb{Q}) \cong \mathrm{Gal}(K_7/\mathbb{Q}) \times \mathrm{Gal}(K_{11}/\mathbb{Q})$.