COMPITO DI ALGEBRA 1

15 giugno 2021

Esercizio 1.
Sia G un gruppo finito, p un primo che divide $|G|$, e P, P' due p-Sylow di G. Dato un sottogruppo H di G, chiamiamo $N_G(H)$ il suo normalizzatore in G.

1. Dimostrare che se $P \neq P'$ i sottogruppi $N_G(P), N_G(P')$ sono coniugati ma diversi.
2. Dimostrare che $N_G(N_G(P)) = N_G(P)$.

Esercizio 2.
Sia G un gruppo del tipo $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 \rtimes_\psi S_3$. Determinare le possibili cardinalità del centro di G al variare di ψ, mostrando in particolare che il centro non può essere banale.

Esercizio 3. Siano S e T le parti moltiplicative di $\mathbb{Z}[x]$ definite da $S = \mathbb{Z}[x] \setminus (x)$ e $T = \mathbb{Z}[x] \setminus (x+1)$. Poniamo $A = S^{-1}\mathbb{Z}[x] \times T^{-1}\mathbb{Z}[x]$.

1. Caratterizzare gli elementi invertibili di A.
2. Mostrare che gli ideali di A sono tutti principali e descrivere ogni ideale mediante un generatore.

Esercizio 4.
Sia K il campo di spezzamento su $\mathbb{Q}$ del polinomio $f(x) = (x^3 - 2)(x^3 - 3)$. È noto che $[K : \mathbb{Q}] = 18$.

1. Descrivere il gruppo di Galois di $K/\mathbb{Q}$ come prodotto semidiretto di gruppi abeliani.
2. Mostrare che le sottoestensioni L di K contenenti $\mathbb{Q}(\zeta_3)$ e tali che $[L : \mathbb{Q}(\zeta_3)] = 3$ sono tutte del tipo $\mathbb{Q}(\zeta_3, \sqrt[3]{d})$ e descriverle dando per ognuna un valore di d.