

COMPITO DI ALGEBRA 1

13 luglio 2021

Esercizio 1.

Sia G un gruppo di ordine $7^2 \cdot 13^2$.

1. Dimostrare che il centro di G ha cardinalità multipla di 7.
2. Determinare le possibili cardinalità di $Z(G)$.

Esercizio 2.

Consideriamo il gruppo $G = \text{GL}_3(\mathbb{F}_3)$ e l'insieme

$$X = \{L \text{ sottospazio vettoriale di } \mathbb{F}_3^3 \text{ di dimensione } 1\}.$$

Il gruppo G agisce su X secondo la formula $g \cdot L = g(L)$, dove $g(L)$ è l'immagine del sottospazio vettoriale L tramite l'applicazione lineare corrispondente alla matrice g .

1. Dimostrare che il gruppo $\text{Stab}_G(L)$ ha cardinalità indipendente da $L \in X$, e calcolare il valore comune di queste cardinalità.
2. Dimostrare che $Z(G) = \bigcap_{L \in X} \text{Stab}_G(L)$.
3. Determinare il più piccolo intero positivo n per cui $G/Z(G)$ si immerge in S_n .

Esercizio 3.

Sia A l'anello $\mathbb{Z}[i]$.

1. Calcolare la cardinalità e la caratteristica dell'anello $A/(i + 18)$.
2. Determinare gli ideali primi di A che contengono $(i + 18)$.

Esercizio 4.

Sia $K = \mathbb{Q}(i, \sqrt[3]{5})$ e indichiamo con L la più piccola estensione di K che sia normale su \mathbb{Q} .

1. Determinare, a meno di isomorfismo, il gruppo di Galois di L/\mathbb{Q} .
2. Determinare un elemento primitivo di K/\mathbb{Q} .