

## COMPITO DI ALGEBRA 1

13 luglio 2021

### Esercizio 1.

Sia  $G$  un gruppo di ordine  $7^2 \cdot 13^2$ .

1. Dimostrare che il centro di  $G$  ha cardinalità multipla di 7.
2. Determinare le possibili cardinalità di  $Z(G)$ .

### Esercizio 2.

Consideriamo il gruppo  $G = \text{GL}_3(\mathbb{F}_3)$  e l'insieme

$$X = \{L \text{ sottospazio vettoriale di } \mathbb{F}_3^3 \text{ di dimensione } 1\}.$$

Il gruppo  $G$  agisce su  $X$  secondo la formula  $g \cdot L = g(L)$ , dove  $g(L)$  è l'immagine del sottospazio vettoriale  $L$  tramite l'applicazione lineare corrispondente alla matrice  $g$ .

1. Dimostrare che il gruppo  $\text{Stab}_G(L)$  ha cardinalità indipendente da  $L \in X$ , e calcolare il valore comune di queste cardinalità.
2. Dimostrare che  $Z(G) = \bigcap_{L \in X} \text{Stab}_G(L)$ .
3. Determinare il più piccolo intero positivo  $n$  per cui  $G/Z(G)$  si immerge in  $S_n$ .

### Esercizio 3.

Sia  $A$  l'anello  $\mathbb{Z}[i]$ .

1. Calcolare la cardinalità e la caratteristica dell'anello  $A/(i + 18)$ .
2. Determinare gli ideali primi di  $A$  che contengono  $(i + 18)$ .

### Esercizio 4.

Sia  $K = \mathbb{Q}(i, \sqrt[3]{5})$  e indichiamo con  $L$  la più piccola estensione di  $K$  che sia normale su  $\mathbb{Q}$ .

1. Determinare, a meno di isomorfismo, il gruppo di Galois di  $L/\mathbb{Q}$ .
2. Determinare un elemento primitivo di  $K/\mathbb{Q}$ .