Scritto-08set-parte1.

(1) **grp-finiti-v1-sett**
Sia G un gruppo semplice di ordine 660 Determinare il numero di elementi di G di ordine 11.
- 120 ✓

(2) **grp-finiti-v2-sett**
Sia G un gruppo semplice di ordine 168. Determinare il numero di elementi di G di ordine 7.
- 48 ✓

(3) **omomor-v1-sett**
Determinare il numero di sottogruppi di $Q_8 \times \mathbb{Z}_8$ isomorfi al gruppo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$.
- 7 ✓

(4) **omomor-v2-sett**
Determinare il numero di sottogruppi di $S_3 \times \mathbb{Z}_8$ isomorfi al gruppo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$.
- 3 ✓

(5) **campi-finiti-v1-sett**
Calcolare il numero di polinomi irriducibili di grado 4 a coefficienti in $\mathbb{F}_3$.
- 18 ✓

(6) **campi-finiti-v2-sett**
Calcolare il numero di polinomi irriducibili di grado 4 a coefficienti in $\mathbb{F}_5$.
- 150 ✓

(7) **est-campi-v1-sett**
Quante sono le sotto-estensioni reali del campo $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\zeta_{21})$ su $\mathbb{Q}$ distinte da $\mathbb{Q}$?
- 3 ✓

(8) **est-campi-v2-sett**
Quante sono le sotto-estensioni reali del campo $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\zeta_{77})$ su $\mathbb{Q}$ distinte da $\mathbb{Q}$?
- 7 ✓

(9) **galois-v1-sett**
Determinare il grado su $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(x^5)$ della più piccola estensione di Galois di $\mathbb{F}$ contenente $\mathbb{Q}(x)$.
- 20 ✓

(10) **galois-v2-sett**
Determinare il grado su $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(x^4)$ della più piccola estensione di Galois di $\mathbb{F}$ contenente $\mathbb{Q}(x)$.
- 8 ✓

Scritto-08set-parte2.

(1) **es-gruppi-sett**
(a) Sia G un gruppo di ordine 340. Mostrare che G contiene un sottogruppo di ordine 85.
(b) Classificare a meno di isomorfismo i gruppi di ordine 340.

Soluzione:

(a) Vale la fattorizzazione $340 = 2^2 \cdot 5 \cdot 17$. Poiché il numero n_5 di 5-Sylow deve dividere $2^2 \cdot 17$ e $n_5 \equiv 1 \mod 5$ deve essere $n_5 = 1$. Analogamente il numero n_{17} di '7-Sylow deve dividere $2^2 \cdot 5$ e $n_{\cdot 7} \equiv 1 \mod 17$ deve essere $n_{17} = 1$. Quindi vi è un unico 5-Sylow P ed un unico 17-Sylow Q, entrambi normali. Il loro prodotto $N = PQ$ è dunque un sottogruppo normale di ordine 85 e $N \simeq \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{17}$.

(b) Il gruppo G contiene un 2-Sylow H di ordine 4 e poiché N è normale abbiamo quindi che $G \simeq N \rtimes H$.
Notiamo che il 5-Sylow e il 17-Sylow sono unici e quindi sono anche sottogruppi caratteristici di N. Dunque un automorfismo di N si restringe ad automorfismi di P e di Q e tali restrizioni lo determinano perché P e Q generano N.
Tutti i 2-Sylow sono tra loro isomorfi e poiché hanno ordine 4 possono aversi due casi distinti: $H \simeq \mathbb{Z}_4$ oppure $H \simeq \mathbb{Z}_2^2$.
- Nel primo caso ($H \simeq \mathbb{Z}_4$) H può agire in 3 modi distinti su $\mathbb{Z}_5$ ed in 4 modi distinti su $\mathbb{Z}_{17}$. Infatti $\mathbb{Z}_5^* \simeq \mathbb{Z}_4$ e quindi un generatore di H può agire su $\mathbb{Z}_5$ in modo banale, come automorfismo di ordine 2 o come automorfismo di ordine 4 (ce ne sono 2). Analogamente $\mathbb{Z}_{17}^* \simeq \mathbb{Z}_{16}$ e quindi un generatore di H può agire su $\mathbb{Z}_{17}$ in modo banale, come automorfismo di ordine 2 o come automorfismo di ordine 4 (ce ne sono 2). Possiamo quindi descrivere 16 diversi omomorfismi $H \to \mathrm{Aut}(N)$.

In 4 di questi casi l'immagine di un generatore è uguale a quella del suo inverso. Notiamo infine che l'automorfismo non banale di $\mathbb{Z}_4$ scambia i due generatori e dunque a meno di isomorfismo otteniamo 10 casi distinti: uno con $Z(G) = \mathbb{Z}_{340}$ ($G = \mathbb{Z}_{340}$), uno con $Z(G) = \mathbb{Z}_{34}$, uno con $Z(G) = \mathbb{Z}_{10}$, uno con $Z(G) = \mathbb{Z}_2$, uno con $Z(G) = \mathbb{Z}_5$ ($G = \mathbb{Z}_5 \times (\mathbb{Z}_{17} \rtimes \mathbb{Z}_4)$), uno con $Z(G) = \mathbb{Z}_{17}$ ($G = \mathbb{Z}_{17} \times (\mathbb{Z}_5 \rtimes \mathbb{Z}_4)$), quattro con $Z(G) = \{e\}$. Di questi ultimi quattro, uno con $C_G(P) = \mathbb{Z}_2$ e $C_G(Q)$ banale, uno con $C_G(Q) = \mathbb{Z}_2$ e $C_G(P)$ banale, due con $C_G(P)$ e $C_G(Q)$ banali. Di questi, in un caso un elemento di ordine 4 di G che agisca (per coniugio) su P come elevamento al quadrato agisce allo stesso modo anche su Q, mentre nell'altro caso un elemento di ordine 4 di G che agisca su P come elevamento al quadrato non agisce su Q come elevamento al quadrato. Essendo la proprietà considerata invariante per automorfismo, questi due gruppi non sono isomorfi tra loro. In tutto abbiamo contato 10 gruppi di ordine 340 non isomorfi tra loro.

- Nel secondo caso ($H \simeq \mathbb{Z}_2^2$), ciascun fattore $\mathbb{Z}_2$ può agire in due modi su P e in due modi su Q. Il nucleo del quoziente dell'omomorfismo $\phi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ che descrive il semidiretto può avere ordine 4 ($G = \mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_{85}$), o ordine 2 o 1. Se $\ker \phi$ ha ordine 2 allora a meno di automorfismi di H possiamo supporre che ϕ sia indotto da un omomorfismo banale sul primo fattore $\mathbb{Z}_2$ ed un omomorfismo non banale $\mathbb{Z}_2 \to \mathrm{Aut}(N)$ sul secondo fattore. Poiché $\mathrm{Aut}(N) \simeq \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{16}$ contiene 3 elementi di ordine 2 questo caso corrisponde a 3 possibili gruppi, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \times D_{17}$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{17} \times D_5$, $\mathbb{Z}_2 \times D_{85}$ con centro rispettivamente $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{17}$, $\mathbb{Z}_2$. Infine se il nucleo di ϕ è banale allora ϕ è un isomorfismo tra H e il sottogruppo di $\mathrm{Aut}(N)$ generato dagli elementi di ordine 2 e dunque a meno di automorfismi di H otteniamo un unico gruppo, isomorfo a $D_5 \times D_{17}$, che ha centro banale. In tutto abbiamo contato 5 gruppi non isomorfi tra loro.

Concludiamo dunque che abbiamo 15 possibili gruppi di ordine 340.

(2) **es-campi-sett**

(a) Calcolare il grado di $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ su $\mathbb{Q}$.

(b) Calcolare il polinomio minimo di $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ su $\mathbb{Q}$.