**Primo compitino di Algebra 1**
12 novembre 2021

Cognome e nome: ....................................................

Numero di matricola: ............... Aula: ...........................

<u>IMPORTANTE:</u> Non si possono consultare libri e appunti. Non si possono usare calcolatrici, computer o altri dispositivi elettronici. Non si può scrivere con la matita. Ogni passaggio va motivato (eccetto che nel quiz).

**Esercizio 1.** QUIZ rapido (1 punto, date la risposta senza dimostrazione): scrivere un campo $K$ e un polinomio $p(x)$ irriducibile che abbia radici multiple in una estensione di $K$.

$K = \mathbb{Z}/_q(t)$ con $q$ primo

$p(x) = x^q - t$

**Esercizio 2.** (5 punti, con dimostrazione)

1. Scrivere in una delle forme canoniche il gruppo abeliano finito $Aut(\mathbb{Z}_{900})$.
2. Quanti sottogruppi di ordine 20 ha il gruppo $Aut(\mathbb{Z}_{900})$?
3. Dati i vettori $v_1 = (2, 8, 2, 2), v_2 = (2, 14, 8, 8)$ in $\mathbb{Z}^4$, trovare un vettore $v_3 \in \mathbb{Z}^4$ tale che, posto $H = Span_{\mathbb{Z}}(v_1, v_2, v_3)$, valga $\mathbb{Z}^4/H \cong \mathbb{Z} \times Aut(\mathbb{Z}_{900})$.

*(per scrivere la soluzione potete usare anche la facciata dietro, che è vuota)*

1) $Aut(\mathbb{Z}/_{900}) \cong Aut(\mathbb{Z}/_4 \times \mathbb{Z}/_{25} \times \mathbb{Z}/_9)$

$\cong Aut(\mathbb{Z}/_4) \times Aut(\mathbb{Z}/_{25}) \times Aut(\mathbb{Z}/_9)$

$\cong \mathbb{Z}/_2 \times \mathbb{Z}/_{20} \times \mathbb{Z}/_6$

(dato che $\forall p$ primo dispari e $\alpha \geq 1$ $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/_{p^\alpha}) \cong \mathbb{Z}/_{p^{\alpha-1}(p-1)}$

e $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/_{2^\alpha}) \cong \mathbb{Z}/_2 \times \mathbb{Z}/_{2^{\alpha-2}}$ per $\alpha \geq 2$

$$\cong \mathbb{Z}/_2 \times (\mathbb{Z}/_4 \times \mathbb{Z}/_5) \times (\mathbb{Z}/_2 \times \mathbb{Z}/_3)$$
$$\cong (\mathbb{Z}/_2 \times \mathbb{Z}/_2 \times \mathbb{Z}/_4) \times \mathbb{Z}/_3 \times \mathbb{Z}/_5$$

2) Scrivo il gruppo nella forma canonica qui sopra.

Un elemento $v = (a, b, c, d, e)$ ha ordine 20 se e solo se $e \neq 0$ (quattro scelte), $d = 0$, $c = \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases}$, $b = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$, $a = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$.

In totale ci sono $4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ elementi di ordine 20.
In ogni gruppo ciclico $\cong \mathbb{Z}/_4 \times \mathbb{Z}/_5 \cong \mathbb{Z}/_{20}$ ci sono $\varphi(20) = 8$ elementi di ordine 20. Dunque abbiamo $\frac{32}{8} = 4$ s.gruppi $H$ isomorfi a $\mathbb{Z}/_{20}$.
Ma un gruppo $K$ di ordine 20 può essere isomorfo anche a $(\mathbb{Z}/_2 \times \mathbb{Z}/_2) \times \mathbb{Z}/_5$. Sia $K$ sia $\mathrm{Aut}(900)$ hanno un solo 5-Sylow, dunque entrambi contengono $(0,0,0,0,1)$. Allora $K$ è determinato dal s.gruppo di $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/_{900})$ isomorfo a $\mathbb{Z}/_2 \times \mathbb{Z}/_2$ che contiene. Questi sono tanti quanti i s.gruppi ISOMORFI a $\mathbb{Z}/_2 \times \mathbb{Z}/_2$ in $\mathbb{Z}/_2 \times \mathbb{Z}/_2 \times \mathbb{Z}/_4$, ossia 7 (ho $\binom{7}{2} = 21$ modi di scegliere due elementi di ordine 2, ma a tre a tre queste scelte individuano lo stesso s.gruppo).
Dunque la risposta è $4 + 7 = 11$.

3) Noto che $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 8 & 14 \\ 2 & 8 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{MOSSA INTERA DI COLONNA}} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 8 & 6 \\ 2 & 6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ Questo mi suggerisce di prendere $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}$

INFATTI $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 8 & 14 & 0 \\ 2 & 8 & 20 \\ 2 & 8 & 20 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & 6 & 0 \\ 2 & 6 & 20 \\ 2 & 6 & 20 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{MOSSE INTERE DI RIGA}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Allora $\mathbb{Z}^4 / \mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{20} \times \mathbb{Z} \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{900}) \times \mathbb{Z}$

**Esercizio 3.** (10 punti, con dimostrazione)

1. Per ognuno dei seguenti gruppi di ordine 24, dire se sono del tipo $\mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_2^3$ o del tipo $\mathbb{Z}_3 \rtimes Q_8$ o nessuno dei due:

   (a) $\mathbb{Z}_4 \times D_3$ è del tipo[1] NESSUNO perché il suo 2-Sylow è isomorfo a $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$

   (b) $\mathbb{Z}_2 \times A_4$ è del tipo[2] NESSUNO perché non ha un solo 3-Sylow (esempio: $0 \times \langle(1,2,3)\rangle$ e $0 \times \langle(1,2,4)\rangle$)

   (c) $\mathbb{Z}_2 \times D_6$ è del tipo[3] $\mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_2^3$ perché il 3-Sylow è unico: $0 \times \langle r^2 \rangle$ e un 2-Sylow è isomorfo a $\mathbb{Z}_2^3$ (esempio: il generato da $(1,e)$, $(0,r^3)$, $(0,s)$) dove $r, s$ generano $D_6$ con la notazione solita.

[1] scrivere il tipo o scrivere "NESSUNO" se non è di nessuno dei due tipi
[2] scrivere il tipo o scrivere "NESSUNO" se non è di nessuno dei due tipi
[3] scrivere il tipo o scrivere "NESSUNO" se non è di nessuno dei due tipi

(d) $\mathbb{Z}_2^2 \times D_3$ è del tipo[4] $\mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_2^3$ perché come sopra, il 3-Sylow è unico: $(0,0) \times (r)$ e un 2-Sylow è isomorfo a $\mathbb{Z}_2^3$ (esempio: generato da $((1,0),e)$, $((0,1),e)$, $((0,0),s)$).

NOTA: i gruppi (c) e (d) SONO ISOMORFI.

(e) $SL(2, \mathbb{Z}_3)$ è del tipo[5] NESSUNO perché il 3-Sylow non è unico. Per esempio $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{Z}_3 \right\}$ e

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \middle| b \in \mathbb{Z}_3 \right\}$ sono due sottogruppi di cardinalità 3.

[4]scrivere il tipo o scrivere "NESSUNO" se non è di nessuno dei due tipi

[5]scrivere il tipo o scrivere "NESSUNO" se non è di nessuno dei due tipi

2. Dire quanti sono, a meno di isomorfismo, i prodotti semidiretti del tipo $\mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_2^3$.

Considero i possibili $\tau : \mathbb{Z}_2^3 \to Aut(\mathbb{Z}_3) \cong \mathbb{Z}_2$

Sono applicazioni $\mathbb{Z}_2$-lineari. Pertanto sono univocamente determinate dal loro Ker. Se il Ker $= \mathbb{Z}_2^3$ ho il caso $\tau$ banale e dunque ho $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2^3$. Siano ora $\tau_1$ e $\tau_2$ tali che $Ker\, \tau_1 \neq Ker\, \tau_2$ e $Ker\, \tau_1 \neq \mathbb{Z}_2^3 \neq Ker\, \tau_2$

Noto che $Ker\, \tau_1$ e $Ker\, \tau_2$ sono due piani in $\mathbb{Z}_2^3$ (hanno dimensione 2). Trovo certamente un automorfismo $\beta \in Aut(\mathbb{Z}_2^3) = GL(\mathbb{Z}_2^3)$ che manda l'uno nell'altro (prendo per esempio una base $v_1, v_2$ di $Ker\, \tau_1$ e una base $w_1, w_2$ di $Ker\, \tau_2$, completo ciascuna di esse ad una base di $\mathbb{Z}_2^3$ aggiungendo uno $z \notin Ker\, \tau_1 \cup Ker\, \tau_2$ e definisco $\beta$ ponendo

$$\beta(v_1) = w_1, \quad \beta(v_2) = w_2, \quad \beta(z) = z.)$$

Allora per il noto LEMMA,

$$\tau_2 = \tau_1 \circ \beta \quad \text{e dunque} \quad \mathbb{Z}_3 \rtimes_{\tau_1} \mathbb{Z}_2^3 \cong \mathbb{Z}_3 \rtimes_{\tau_2} \mathbb{Z}_2^3.$$

Tutti i $\tau$ con $Ker\, \tau \neq \mathbb{Z}_2^3$ originano dunque un solo prodotto semidiretto (a meno di ISO). La risposta è dunque 2: INFATTI $\mathbb{Z}_3 \rtimes_{\tau_1} \mathbb{Z}_2^3$ e $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2^3$ NON SONO ISO FRA LORO (potete USARE il lemma "CONDIZIONE NECESSARIA" o vedere che il primo non è abeliano).

3. Dire quanti sono, a meno di isomorfismo, i prodotti semidiretti del tipo $\mathbb{Z}_3 \rtimes Q_8$.

Considero i possibili $\tau: Q_8 \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_3) \cong \mathbb{Z}_2$

Se $\tau$ è banale ho il prodotto diretto $\mathbb{Z}_3 \times Q_8$.

Altrimenti $\tau$ è caratterizzato dal suo Ker, che è un s. gruppo di ordine 4 di $Q_8$. Ci sono solo 3 s. gruppi di ordine 4: $(i), (j), (k)$.

Consideriamo per esempio $\tau_1$ tale che $\mathrm{Ker}\,\tau_1 = (i)$ e $\tau_2$ tale che $\mathrm{Ker}\,\tau_2 = (j)$.

Da quello che sappiamo su $\mathrm{Aut}(Q_8)$, esiste $\varphi \in \mathrm{Aut}(Q_8)$ tale che $\varphi(i) = j$ e $\varphi(j) = i$

Allora $\tau_2 \circ \varphi = \tau_1$ (hanno lo stesso Ker) e per il NOTO LEMMA $\mathbb{Z}_3 \rtimes_{\tau_1} Q_8 \cong \mathbb{Z}_3 \rtimes_{\tau_2} Q_8$.

Analogamente si dimostra che $\mathbb{Z}_3 \rtimes_{\tau_3} Q_8 \cong \mathbb{Z}_3 \rtimes_{\tau_1} Q_8$ dove $\tau_3$ è l'omomorfismo con $\mathrm{Ker}\,\tau_3 = (k)$.

Dunque, oltre al prodotto diretto, esiste solo un prodotto semidiretto del tipo $\mathbb{Z}_3 \rtimes Q_8$. I DUE GRUPPI NON SONO ISO FRA LORO (PER IL LEMMA "CONDIZIONE NECESSARIA").