Soluzioni del Compitino di Algebra 1 del 15/11/2019.

Esercizio 1) Dare risposte sintetiche ad ogni domanda, come indicato, utilizzando solo lo spazio subito sotto.

a) Si consideri il sottogruppo H di $\mathbb{Z}^4$ generato dagli elementi $(1,2,2,4)$, $(0,4,8,2)$, $(1,-2,8,0)$. Descrivere $\mathbb{Z}^4/H$. [rispondere e spiegare sinteticamente come si è arrivati alla risposta] RISPOSTA: $\mathbb{Z}^4/H \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}$

$\mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\4\\8\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\8\\0\end{pmatrix}\right)$ coincide, a meno di un cambio intero di base, con lo Span dei vettori ottenuti calcolando la forma di Smith della matrice $\begin{pmatrix}1&0&1\\2&4&-2\\2&8&8\\4&2&0\end{pmatrix}$. Tale forma è $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}$.

Dunque $\mathbb{Z}^4/H \cong \{0\}\times\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}$.

b) Si consideri la seguente successione esatta corta di gruppi abeliani:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\theta} C \longrightarrow 0$$

e sia $g\colon C \longrightarrow B$ un omomorfismo tale che $\theta \circ g = Id$. Dimostrare che l'omomorfismo

$$\gamma\colon A \oplus C \longrightarrow B$$

dato da $\gamma((a,c)) = \varphi(a) + g(c)$ è iniettivo/suriettivo. [scrivere qui la breve dimostrazione]

<u>Iniettivo</u>: Sia $\gamma((a,c)) = 0$. Allora $\varphi(a) + g(c) = 0$.
Applico ϑ e ottengo $\vartheta(\varphi(a)) + \vartheta(g(c)) = 0$.
Ora per esattezza $\vartheta(\varphi(a)) = 0$ dunque $\vartheta(g(c)) = 0$.
Ma per ipotesi $\vartheta \circ g(c) = c$, dunque $c = 0$.
La condizione $\varphi(a) + g(c) = 0$ diventa allora $\varphi(a) = 0$, da cui $a = 0$ dato che φ è iniettiva per esattezza. Dunque $(a,c) = (0,0)$ $\square$

<u>Surgettivo</u>: Sia $b \in B$. Considero $g(\vartheta(b))$.
$b - g(\vartheta(b)) \in \mathrm{Ker}\,\vartheta$. Infatti: $\vartheta(b - g(\vartheta(b))) = \vartheta(b) - \vartheta\circ g(\vartheta(b))$ $= \vartheta(b) - \vartheta(b) = 0$. Ma $\mathrm{Ker}\,\vartheta = \mathrm{Im}\,\varphi$ per esattezza, allora $\exists\, a$ tc $\varphi(a) = b - g(\vartheta(b))$. Dunque $\gamma(a, \vartheta(b)) = \varphi(a) + g(\vartheta(b)) = b$ $\square$

c) Sia $\sigma = (1,2,3,4,5) \in A_5$. Quanti elementi ha l'orbita di σ rispetto all'azione di A_5 su se stesso per coniugio?[scrivere il numero e motivare] RISPOSTA: 12

L'orbita in S_5 è composta da tutti i $4!$ 5-cicli.

Poiché un 5-ciclo è costituito da un unico ciclo di lunghezza dispari, la sua orbita si spezza in due orbite di cardinalità 12 in A_5.

Sia X l'insieme dei sottogruppi di A_5 di cardinalità 5. Quanto vale $|X|$? [scrivere il numero e motivare] RISPOSTA: 6

I 5-cicli sono 24, e ogni s.gruppo di cardinalità 5 ne contiene 4. Tali s.gruppi si intersecano a due a due solo in $\{e\}$. Dunque $|X| = 24/4 = 6$

Quanti elementi ha l'orbita di $<\sigma>$ in X rispetto all'azione di A_5 per coniugio su X? [scrivere il numero e motivare] RISPOSTA: 6

I s. gruppi in X sono i 5-Sylow di A_5, dunque formano un'unica orbita rispetto al coniugio in A_5.

Esercizio 2)

a) Classificare i gruppi di ordine 66.

b) Mostrare che vi sono almeno 4 prodotti semidiretti tra loro non isomorfi della forma $\mathbb{Z}_3^2 \rtimes \mathbb{Z}_4$.

Traccia della soluzione:

a) Il numero 66 si fattorizza come $2 \times 3 \times 11$. Essendo 11 il primo più grande che divide 66 sappiamo che un gruppo di ordine 66 ha un sottogruppo normale di ordine 11 ed uno normale di ordine 33. Inoltre poiché $3 \nmid 11 - 1$ sappiamo anche che un gruppo di ordine 66 contiene un sottogruppo normale di ordine 3.

Sia dunque G un gruppo di ordine 66 e siano $P_3 \simeq \mathbb{Z}_3$ e $P_{11} \simeq \mathbb{Z}_{11}$ due suoi sottogruppi di Sylow relativi ai primi 3 e 11. Essi sono dunque entrambi normali e, preso $P_2 \simeq \mathbb{Z}_2$ un sottogruppo di Sylow relativo al primo 2 possiamo scrivere

$$G \simeq (\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{11}) \rtimes \mathbb{Z}_2.$$

Abbiamo che $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{11}) \simeq \mathbb{Z}_3^* \times \mathbb{Z}_{11}^* \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{10}$ e ci sono 4 possibili omomorfismi da $\mathbb{Z}_2$ a $\mathbb{Z}_3^* \times \mathbb{Z}_{11}^*$, che mandano il generatore di $\mathbb{Z}_2$ rispettivamente in $(1,1)$, $(2,1)$, $(1,10)$,$(2,10)$. Nel primo caso il gruppo G è abeliano. Nel secondo caso il gruppo G è isomorfo a $D_3 \times \mathbb{Z}_{11}$ e ha centro isomorfo a $\mathbb{Z}_{11}$, nel terzo caso il gruppo G è isomorfo a $D_{11} \times \mathbb{Z}_3$ ed ha centro isomorfo a $\mathbb{Z}_3$, nel quarto caso il gruppo G è isomorfo a D_{33} ed ha centro banale. Vi sono quindi 4 possibili gruppi di ordine 66.

b) Il gruppo $H = \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_3^2) \simeq GL_2(\mathbb{Z}_3)$ ha 48 elementi. In particolare contiene un elemento di ordine 1 (l'identità $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$), due elementi di ordine 2 tra loro non coniugati ($a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ che non sono coniugati perché sono matrici con traccia diversa) ed un elemento di ordine 4 (la matrice $c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$). Fissato $x \in \{e, a, b, c\}$, la funzione $f : \mathbb{Z}_4 \to H$ data da $i \mapsto x^i$ è un omomorfismo di gruppi e definisce quindi un particolare prodotto semidiretto della forma $\mathbb{Z}_3^2 \rtimes_f \mathbb{Z}_4$.

Per $x = e$ il gruppo ottenuto è $\mathbb{Z}_3^2 \times \mathbb{Z}_4$, che è abeliano. Nei rimanenti casi non lo è. Per $x = a$ il gruppo ottenuto è della forma $\mathbb{Z}_3 \times (\mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_4)$ ed ha centro isomorfo a $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$. Per $x = b$ il gruppo ottenuto ha centro isomorfo a $\mathbb{Z}_2$. Per $x = c$ il gruppo ottenuto ha centro banale. Abbiamo quindi descritto 4 gruppi tra loro non isomorfi della forma $\mathbb{Z}_3^2 \rtimes \mathbb{Z}_4$.

Esercizio 3) Sia $\sigma = (1, 2, 3, 4, 5)(6, 7, 8, 9, 10)$ un elemento di S_{10}.

a) Determinare la cardinalità del centralizzatore Z_σ di σ in S_{10}.

b) Determinare la cardinalità del normalizzatore N_σ di σ in S_{10}.

c) Descrivere i sottogruppi di Sylow di N_σ e dire se uno di essi è normale in N_σ.

Soluzione:

a) In S_{10} possiamo scegliere una permutazione che è prodotto di 2 2-cicli disgiunti in $\frac{1}{2!}\binom{10}{5}4!\binom{5}{5}4!$ modi, ovvero in $\frac{10!}{2\cdot 5^2}$ modi. Poiché tutti i 2-2-cicli sono tra loro coniugati e la cardinalità dell'orbita di σ è pari a $\frac{|S_{10}|}{|Z_\sigma|}$, ne segue che il centralizzatore di σ ha cardinalità $2 \cdot 5^2$.

b) Poiché σ genera un gruppo ciclico, il suo centralizzatore ha indice nel normalizzatore pari a $|\operatorname{Aut}(\langle\sigma\rangle)| = |\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}_5^*)| = 4$. Quindi la cardinalità di N_σ è $2^3 \cdot 5^2$.

c) Visto che i 5-cicli $\sigma_1 = (1, 2, 3, 4, 5)$ e $\sigma_2 = (6, 7, 8, 9, 10)$ generano un gruppo di ordine 5^2 costituito da elementi che commutano con σ, e visto che la permutazione $\tau = (1, 6)(2, 7)(3, 8)(4, 9)(5, 10)$ commuta anch'essa con σ e normalizza il gruppo generato da σ_1, σ_2, possiamo dire che il centralizzatore di σ è il gruppo $Z_\sigma = \langle\sigma_1, \sigma_2\rangle \rtimes \langle\tau\rangle \simeq \mathbb{Z}_5^2 \rtimes \mathbb{Z}_2$, che ha cardinalità $2 \cdot 5^2$. Il prodotto semidiretto è determinato dall'azione per coniugio di τ su $\langle\sigma_1, \sigma_2\rangle$, che scambia i due generatori. Inoltre sappiamo che $N_\sigma \simeq Z_\sigma \rtimes \operatorname{Aut}(\langle\sigma\rangle)$.

Un automorfismo di ordine 4 del gruppo $\langle\sigma\rangle$ è dato da $\sigma^i \mapsto \sigma^{2i}$ e può essere ottenuto tramite il coniugio con $\rho = (2, 3, 5, 4)(7, 8, 10, 9) \in N_\sigma$. La permutazione ρ e il suo quadrato non commutano con σ, quindi $\langle\rho\rangle \cap Z_\sigma = \{e\}$. Inoltre τ e ρ commutano, quindi $P = \langle\tau, \rho\rangle$ è un sottogruppo di N_σ di ordine 8, e quindi è un suo 2-Sylow, ed è isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$. Notiamo che P non è normale in N_σ in quanto i suoi elementi fissano tutti 1, mentre $\sigma\tau\sigma^{-1}$ non fissa 1.

Il gruppo $Q = \langle\sigma_1, \sigma_2\rangle \simeq \mathbb{Z}_5^2$ è un sottogruppo di N_σ di ordine 25 e dunque è un suo 5-Sylow. Poiché il coniugio con τ permuta i generatori di Q e il coniugio con ρ manda Q in sè, abbiamo che Q è normale in N_σ. Osservazione aggiuntiva: che un 5-Sylow in N_σ è normale si deduce anche dai teoremi di Sylow perché il numero n_5 dei 5-Sylow deve dividere 8 e deve esesre congruo a 1 modulo 5, dunque è uguale a 1.