Esercizio 1

Per ogni elemento $g \in G$ chiamo $\bar{g}$ la sua proiezione in $G/[G,G]$. Chiamo inoltre

$$\bar{S} = \{ \bar{s} \mid s \in S \}.$$

Risulta che $G/[G,G]$ è generato da $\bar{S}$: infatti un elemento di $G/[G,G]$ è della forma $\bar{g}$ con $g \in G$. Ma g si può scrivere come

$$g = s_1^{\alpha_1} \cdots s_k^{\alpha_k}$$

con $s_1, , s_k \in S$ eventualmente anche coincidenti

e con $\alpha_1, , \alpha_k \in \mathbb{Z}$.

Allora $\bar{g} = \bar{s}_1^{\alpha_1} \cdots \bar{s}_k^{\alpha_k}$.

Resta da dimostrare che $\bar{S}$ è composto da un solo elemento. Siano $s_1, s_2 \in S$: dimostreremo che $\bar{s}_1 = \bar{s}_2$. Infatti per ipotesi posso scrivere $s_1 = h s_2 h^{-1}$. Allora $\bar{s}_1 = \bar{h} \bar{s}_2 \bar{h}^{-1}$

Ma dalla teoria sappiamo che $G/[G,G]$ è abeliano.
Allora $\bar{s}_1 = \bar{h} \bar{s}_2 \bar{h}^{-1} \overset{!}{=} \bar{s}_2$.