Esercizio a) Trovare il grado di $\mathbb{Q}\left(\cos\frac{\pi}{12}\right)$ su $\mathbb{Q}$

b) Calcolare il polinomio minimo di $\cos\frac{\pi}{12}$ su $\mathbb{Q}$

Risoluzione.

a) Osserviamo che $\quad \cos\frac{\pi}{12} = \dfrac{\zeta_{24} + \zeta_{24}^{-1}}{2}$.

Come sappiamo dalla teoria $\left[\mathbb{Q}(\zeta_{24}) : \mathbb{Q}\right] = \varphi(3)\varphi(8) = 8$

Inoltre $\left[\mathbb{Q}(\zeta_{24}) : \mathbb{Q}\left(\zeta_{24} + \zeta_{24}^{-1}\right)\right] = 2$.

Infatti tale grado è ≥ 2 perché $\mathbb{Q}\left(\zeta_{24} + \zeta_{24}^{-1}\right) \subseteq \mathbb{R}$ e dunque è $\subsetneq \mathbb{Q}(\zeta_{24})$, ma è anche ≤ 2 perché ζ_{24} è radice del polinomio di grado 2

$$\left(x - \zeta_{24}\right)\left(x - \zeta_{24}^{-1}\right) = x^2 - \left(\zeta_{24} + \zeta_{24}^{-1}\right)x + 1$$

che è a coefficienti in $\mathbb{Q}\left(\zeta_{24} + \zeta_{24}^{-1}\right)$.

Per il teorema delle torri di estensioni risulta dunque che $\mathbb{Q}\left(\cos\frac{\pi}{12}\right) = \mathbb{Q}\left(\zeta_{24} + \zeta_{24}^{-1}\right)$ ha grado 4 su $\mathbb{Q}$.

b) Osserviamo che $\quad \cos\frac{2\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Allora $\quad 2\cos^2\frac{\pi}{12} - 1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

da cui si ricava

$$16 \cos^4\left(\frac{\pi}{12}\right) - 16 \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + 1 = 0$$

Dunque, per ragioni di grado,

$16x^4 - 16x^2 + 1$ è irriducibile su $\mathbb{Q}$

ed è il polinomio cercato.