TEOREMI DI GERSCHGORIN

domenica 4 dicembre 2022 17:25

I Teoremi di Gerschgorin servono a calcolare tutti gli autovalori di una matrice A

I TEOREMA DI GERSCHGORIN

Sia $A=(a_{i,j})$ una matrice $m \times m$ a valori in $\mathbb{R}$ o in $\mathbb{C}$

Gli autovalori di $A \in \bigcup_{i=1}^{n} K_i$ dove $K_i = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z-a_{ii}| \le \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} |a_{i,j}| \right\}$

- Inoltre se $v=(v_i)$ è autovettore per λ cioè $Av=\lambda v \Rightarrow \lambda \in K_k$ dove k è tale che $|v_k| = \max_i |v_i|$
- I K_i per $i=1,\dots,m$ sono i cerchi di Gerschgorin nel piano complesso
- Ogni cerchio K_i ha per centro l'elt. diagonale corrispondente a_{ii} e per raggio $\sum_i$ |elt. non diagonali sulla stessa riga|

idea dimostrazione

1 $A\vec{v} = \lambda \vec{v} \xrightarrow{\text{i-esima componente}} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} v_j = \lambda v_i \xrightarrow{\text{estrarre elt } a_{ii}} (a_{ii}-\lambda) v_i = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} a_{ij} v_j \xrightarrow{\text{passo ai moduli} + \Delta}$

2 Prendere $i=k$ per cui $|v_k| > |v_j|$ cioè la componente di mod max $\longmapsto$ dividere per $|v_k|$ $\longmapsto$ ⚠ $\frac{|v_j|}{|v_k|} \le 1$

3 Conclusione $\longmapsto$ $\lambda \in K_k$

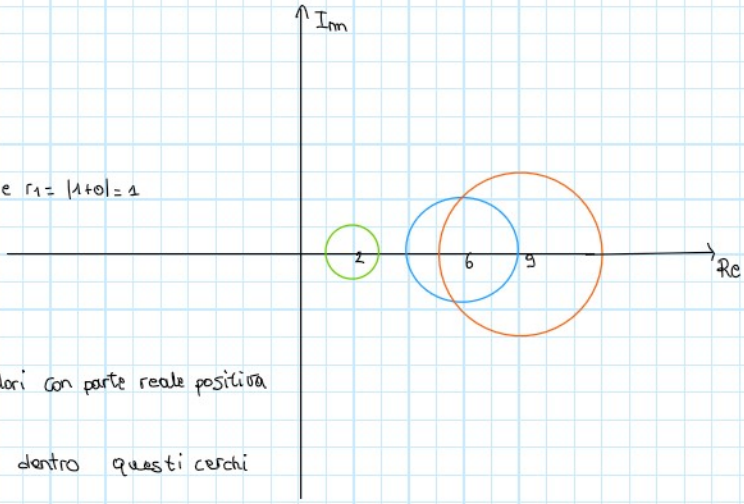
Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & -1 \\ 1 & -2 & 9 \end{pmatrix}$$

$K_1 = B_1(2) = (\underset{\text{centro}}{c_1}, \underset{\text{raggio}}{r_1})$ dove $c_1 = 2$ e $r_1 = |1+0| = 1$

$K_2 = B_2(6)$

$K_3 = B_3(9)$



Si vede che A ha tutti autovalori con parte reale positiva e modulo > 1

Ricorda Gli autovalori stanno dentro questi cerchi

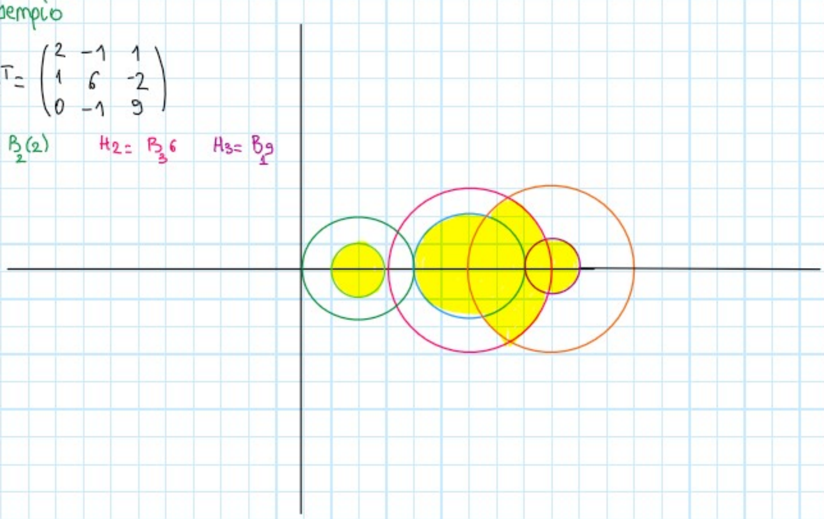
Conseguenza

- A e A^T hanno gli stessi autovalori
- Se applico il Teo ad A^T si ha che gli autovalori di A^T $\in \bigcup_{i=1}^{n} H_i$ con $H_i = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z-a_{ii}| \le \sum_{\substack{i=1 \\ i \ne j}}^{n} |a_{i,j}| \right\}$
  = gli autovalori di A ; H_i ↳ cerchi di A^T
- Gli autovalori di $A \in \left(\bigcup_{i=1}^{n} K_i\right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} H_i\right)$

Esempio

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 6 & -2 \\ 0 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

$H_1 = B_2(2)$ $H_2 = B_3 6$ $H_3 = B_1 9$



II TEOREMA DI GIERSCHGORIN

Si assuma che $\bigcup$ cerchi di Gierschgorin sia formata da due sottoinsiemi disgiunti M_1 e M_2, cioè $\bigcup_i K_i = M_1 \cup M_2 = \emptyset$ dove M_1 è formato da m_1-cerchi e M_2 è formato da m_2-cerchi con $m_1 + m_2 = m$.

Allora in M_1 ci sono m_1 autovalori e in M_2 ci sono m_2 autovalori

idea dimostrazione

1 Hp: M_1 ha m_1 cerchi

2 Ragionamento per continuità

2A $A(t) = D + t(A - D)$ dove D ha gli stessi elt. diagonali di A (diagonale)

2B combinazione convessa $0 \le t \le 1$

2C CLAIM: gli autovalori di $A(t)$ dipendono in modo continuo da t

2C1 gli zeri di un pol sono f. continue dei coeff $\Rightarrow$ gli autov. della matrice sono f. continue delle entrate cioè gli aut. sono gli zeri del pol. caratt. $= \det(A(t) - \lambda Id)$

3 Cerchi $K_i = \underset{tri}{B}(a_{ii})$

a) $0 \le t \le 1 \rightarrow$ i primi m_1 cerchi sono disgiunti dai rimanenti $\# \{spec\, A(t)\}$ in M_1 è costante

b) Gli autovalori non possono saltare da M_1 a M_2 perchè si spostano in modo continuo ⚠ M_1 e M_2 sconnessi $\Rightarrow \nexists\, \gamma$ f. continua che li unisce

c) $t=0$ la matrice è Diagonale $\Rightarrow$ autov = centro

4 Conclusione M_1 ha m_1 autovalori tanti quanti i centri

Conseguenze

- Se K_i è un cerchio disgiunto da tutti gli altri $\Rightarrow K_i$ ha un solo autovalore
- Se A è reale e K_i è un cerchio disgiunto da tutti gli altri $\Rightarrow K_i$ ha un autovalore reale

⌈ λ non reale, λ e $\bar{\lambda}$ compaiono a coppie $\Rightarrow \bar{\lambda}$ è autovalore e K_i infatti è simm. rispetto all'asse reale. Assurdo per II Teo ⌋

Esempio

Nell'esempio di prima K_1 è disgiunto da K_2 e K_3 e A è reale $\Rightarrow \exists$ solo un autov. λ reale in $[1,3]$

Definizione

Una matrice A è **fortemente dominante diagonale** se $|a_{ij}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} |a_{i,j}|$ per $i = 1, \dots, n$

Conseguenze

- Una matrice fortemente dominante diagonale è **non singolare** per il 1 Teo, infatti poichè il raggio di ogni cerchio è minore della distanza del centro dall'origine, nessun cerchio interseca l'origine e quindi 0 non può essere autovalore di A

Definizione

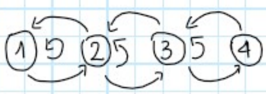
A si dice **riducibile** se $\exists\, P$ matrice di permutazione t.c. $PAP^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$ dove A_{11}, A_{22} sono $\square$.
Cioè se $\exists$ una permutazione di righe e colonne che porta A in forma triangolare a blocchi

Definizione

Data A considero **$G[A]$** il **grafo** diretto formato da n-nodi nel quale un arco orientato unisce il nodo i al nodo j se $a_{i,j} \ne 0$

Esempio

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & & \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & 0 & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & & & -1 & 2 \end{pmatrix} = B$$



$a_{11} \ne 0$ $1 \circlearrowleft$ $a_{12} \ne 0$ $1 \to 2$ $a_{21} \ne 0$ $2 \to 1$

Definizione

Un grafo diretto si dice fortemente connesso se per ogni coppia di nodi (i,j) $\exists$ una successione di archi orientati che connette il nodo i al nodo j

Cioè se è possibile transitare per tutti i nodi percorrendo un cammino di archi orientati

Esempio
Il grafo sopra è fortemente connesso

Teorema

Una matrice è irriducibile $\Leftrightarrow$ il suo grafo associato è fortemente connesso.

idea dim

1 Introduzione (a) Se P è di permutazione $\Rightarrow G[A]$ e $G[\overset{PAP^T}{\overset{\shortparallel}{B}}]$ differiscono per numerazione dei nodi

(b) $a_{i,j} = b_{\sigma(i),\sigma(j)}$ con σ permutazione associata a P

$\Leftarrow$ Per R.A.A.
def di riducibile + triang. a blocchi $\begin{array}{cc} & J \\ i & \left[\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right]\end{array}$ B non ha archi $\underset{m}{\overset{}{i}} \rightsquigarrow \underset{\hat{m}}{J}$ $B = \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ 0 & B_{2,2} \end{bmatrix} \begin{array}{l}]m \\ ]n-m \end{array}$

$\Rightarrow$ Per RAA.

(a) (p,q) $p \not\rightsquigarrow q$

(b) $\mathcal{P} = \{$nodi ragg. da $p\}$ e $\mathcal{Q} = \{$nodi non ragg da $p\}$ $\Rightarrow q \in \mathcal{Q}$ per (a)

(c) $\nexists$ archi $\mathcal{P} \rightsquigarrow \mathcal{Q}$
Riordino righe e colonne di A $\begin{array}{ccc} & Q & P \\ Q & \left[\begin{array}{c|c} & \\ \hline 0 & \end{array}\right] \\ P & & \end{array}$ testa indici di $\mathcal{Q}$ coda nodi di $\mathcal{P}$

(d) Conclusione avendo il blocco di 0 A non è irriducibile ↯

III TEOREMA DI GERSCHGORIN

Supp. che λ sia autovalore di A con la seguente proprietà: se $\lambda \in K_i \Rightarrow \lambda \in \overbrace{\partial K_i}^{\text{bordo}}$
Se la matrice è irriducibile $\Rightarrow \lambda \in \bigcup K_i \Rightarrow \lambda \in \bigcap \partial K_i$

idea dimostrazione

1 Si ripercorre la dim del I Teo di G.

2 Uso l'hp. $\lambda \in \partial K_K \Rightarrow$ vale l'= nella disuguaglianza $\Leftrightarrow \frac{|x_j|}{|x_K|} = 1$

3 Uso l'hp A irriducibile $\Rightarrow G[A]$ fortemente connesso cioè $k_i \rightsquigarrow k_{i+1}$ $\forall i \Rightarrow a_{k_i,k_{i+1}} \neq 0$

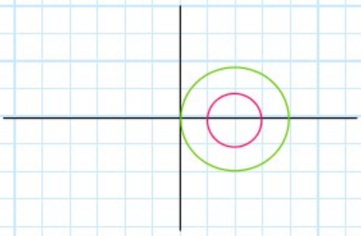
3A CLAIM ogni componente del vettore è di mod max

3B $\{K_J\}$ con $K_1 = K \overset{G[A] \text{ f. conn.}}{\Rightarrow} a_{K_1,K_2} = a_{K,K_2} \neq 0 \Rightarrow$ cioè $\left|\frac{x_K}{x_{K_2}}\right| = 1 \Rightarrow \lambda \in K_2$ cerchio
+ itero

4 Conclusione $\lambda \in \bigcup K_i \overset{\lambda \in \partial K_i \ \forall i}{\Rightarrow} \lambda \in \bigcap \partial K_i$

Esempio

B come sopra , $K_1 = B_1(2)$, $K_2 = B_2(2)$, $K_3 = B_2(2)$, —, $K_{n-1} = B_2(2)$, $K_n = B_1(2)$



0 è autovalore di B?

Con il I e II Teo non possiamo dire nulla perché $0 \in \bigcup_{i=1}^{n} K_i$

in particolare $0 \in \bigcup_{i=2}^{n-1} \partial K_i$

B è irriducibile poiché il grafo è fortemente connesso.

Per il $\overline{\text{III}}$ Teo $0 \in \bigcap_{i=1}^{n} \partial K_i$ $0 \notin \partial K_1 \wedge 0 \notin \partial K_n$

Quindi 0 non è autovalore di B

Definizione

A è ==irriducibilmente dominante diagonale== se:

1. A è irriducibile
2. $|a_{i,i}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|$ vale la dominanza debole.
3. $\exists$ K t.c. $|a_{K,K}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq K}}^{n} |a_{K,j}|$ $\exists$ K per cui vale la dominanza stretta

Esempio

La mat. B è irrid. dom. diag.