

Zeri di funzioni

Dario A. Bini, B. Meini, Università di Pisa

19 novembre 2020

Sommario

Questo modulo didattico contiene risultati relativi ai metodi per approssimare numericamente gli zeri di una funzione continua.

Un problema interessante dal punto di vista computazionale consiste nel calcolare le soluzioni di una equazione o di un sistema di equazioni non lineari. Nelle applicazioni questo problema si incontra in diverse forme. Ad esempio, nella progettazione di robot industriali per l'assemblaggio di oggetti costituiti da più parti, la configurazione che il robot deve assumere per poter svolgere le sue funzioni dipende dalla soluzione di un sistema di equazioni.

Infatti, date le coordinate del punto dello spazio che l'estremità del braccio di un robot deve raggiungere, occorre determinare i parametri che definiscono la configurazione del robot, tipo gli angoli tra i segmenti che costituiscono il braccio e lunghezze di tali segmenti, in modo che l'estremità del braccio occupi il punto che ha quelle coordinate. Questi parametri e le coordinate del punto di arrivo sono legati da un sistema di equazioni tipicamente non lineare.

Ad esempio, nel disegno in figura 1 è rappresentato un robot semplificato formato da due bracci. Il primo, di lunghezza u fissata, può ruotare nel piano attorno all'origine. Il secondo, di lunghezza $v < u$ fissata, può ruotare sempre nel piano attorno all'estremità libera del primo braccio. All'estremità del secondo braccio, di coordinate (a, b) è collocata la pinza del robot. È evidente che

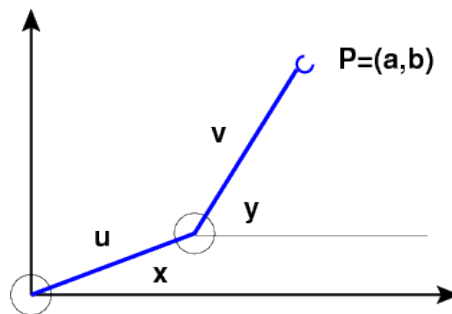


Figura 1: Robot costituito da due bracci articolati

la pinza del robot può occupare tutti i punti della corona circolare di centro l'origine e raggi $u-v$ e $u+v$. Se chiamiamo con x e y rispettivamente gli angoli che il primo e il secondo braccio formano con una retta orizzontale, valgono le relazioni

$$\begin{cases} a = u \cos x + v \cos y \\ b = u \sin x + v \sin y \end{cases}$$

Se, dati a e b vogliamo determinare gli angoli x e y per fare raggiungere alla pinza del robot la posizione (a, b) dobbiamo risolvere il sistema non lineare di due equazioni e due incognite descritto sopra.

Purtroppo solo in rari casi siamo in grado di dare delle formule esplicite che ci permettono di rappresentare le soluzioni di una equazione o di un sistema. Si pensi ad esempio al caso dei familiari polinomi $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ in una variabile x . Se il grado n è 1 o 2 sappiamo esprimere le radici di $p(x)$ con delle formule esplicite.

Nel caso di equazioni cubiche e di equazioni quartiche esistono formule esplicite pubblicate da Girolamo Cardano nel 1545. La soluzione nel caso $n = 3$ fu comunicata a Cardano da Niccolò Tartaglia, mentre la soluzione nel caso $n = 4$ fu trovata da Scipione del Ferro, studente di Cardano.

Nel caso di polinomi di grado maggiore o uguale a 5 non esistono formule che permettano di esprimere le radici in termini di radicali e operazioni aritmetiche. Questo segue dalla Teoria di Galois

Quindi dal punto di vista computazionale occorre individuare dei metodi che permettano di *approssimare* le soluzioni di una equazione o di un sistema di equazioni attraverso la generazione di successioni che ad esse convergano.

In questo articolo ci occupiamo del progetto ed analisi di metodi per generare tali successioni, assieme all'introduzione di strumenti generali per la loro analisi.

1 Zeri di funzioni continue da \mathbb{R} in \mathbb{R}

Ci occupiamo qui del caso più semplice che si può incontrare: il caso in cui è data una funzione $f(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua sull'intervallo $[a, b]$, tale che $f(a)f(b) < 0$. Con queste ipotesi, per un noto teorema dell'analisi, esiste almeno un punto $\alpha \in [a, b]$ per cui $f(\alpha) = 0$. Vogliamo allora generare una successione $\{x_k\}_k$ che converga ad α .

Uno dei metodi più semplici per fare ciò è il metodo della *bisezione* detto anche *metodo dicotomico*. Esso si basa su una strategia antica e universale che viene generalmente applicata con successo in molte situazioni, dall'arte militare (dai tempi di Giulio Cesare) alla politica e all'informatica: la strategia del *divide et impera* che in letteratura anglosassone diventa *divide-and-conquer*.

Il metodo funziona nel modo seguente:

- si pone $a_0 = a$, $b_0 = b$
- per $k = 0, 1, \dots$, si calcola il punto medio $c_k = (a_k + b_k)/2$ del segmento $[a_k, b_k]$, assieme al valore di $f(c_k)$

- se $f(c_k) = 0$ abbiamo trovato una soluzione $\alpha = c_k$ e abbiamo finito; altrimenti, se $f(c_k)f(a_k) < 0$, deduciamo che la funzione si annulla in almeno un punto α del sottointervallo di sinistra $[a_k, c_k]$; se invece $f(c_k)f(a_k) > 0$ si deduce che la funzione si annulla in un punto α_k del sottointervallo di destra $[c_k, b_k]$;
- nel primo caso ripetiamo il procedimento applicandolo all'intervallo $[a_k, c_k]$, cioè poniamo $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = c_k$, nel secondo caso lo applichiamo all'intervallo $[c_k, b_k]$, cioè poniamo $a_{k+1} = c_k$, $b_{k+1} = b_k$, finché non abbiamo ottenuto un intervallo di ampiezza sufficientemente piccola, cioè finché $b_{k+1} - a_{k+1} < \epsilon$.

È evidente che con questa strategia l'ampiezza dell'intervallo corrente si riduce della metà ad ogni passo che viene fatto. In questo modo, dopo k passi abbiamo un intervallo di ampiezza $b_k - a_k = \frac{1}{2^k}(b - a)$. Quindi la quantità $\epsilon_k = b_k - a_k$, maggiorazione dell'errore di approssimazione di α , converge a zero in modo esponenziale.

Apparentemente la convergenza esponenziale a zero di ϵ_k denota una "velocità" di convergenza alta. In effetti non è proprio così visto che più tardi introdurremo dei metodi in cui l'errore di approssimazione converge a zero in modo *doppiamente esponenziale* cioè è limitato superiormente da

$$\beta^p \quad \text{con } 0 < \beta < 1, \quad p \geq 2.$$

Dal punto di vista computazionale il metodo di bisezione conviene implementarlo nel modo descritto nel codice *Octave* del listato 1.

In particolare, poiché il calcolo viene svolto in aritmetica floating point, la condizione di arresto viene data sull'errore relativo mediante la disuguaglianza $b - a \leq \epsilon \min\{|a|, |b|\}$. Inoltre viene messo un limite massimo al numero di passi di bisezione. Un'altra caratteristica dell'implementazione è che vengono usate solo due variabili **a**, **b** per generare gli intervalli di inclusione: di fatto viene mantenuto solo l'ultimo intervallo generato e la storia passata viene dimenticata. Poiché il segno della funzione $f(x)$ nell'estremo sinistro degli intervalli generati è sempre lo stesso, così come il segno della funzione nell'estremo destro, è sufficiente calcolarsi questo segno una volta per tutte usando la variabile **fa** e calcolare ad ogni passo solamente il valore di $f(c)$ da confrontarsi con **fa**. In questo modo il costo di ogni iterazione si riduce al calcolo del punto c e del valore di $f(c)$. Il codice presuppone che sia stata definita una function **f(x)**.

In una esecuzione in aritmetica floating point del metodo di bisezione i valori effettivamente calcolati di $f(x)$ sono affetti da errore. Se supponiamo che il valore effettivamente calcolato sia compreso tra $f(x) - \delta$ e $f(x) + \delta$, dove $\delta > 0$ è una quantità nota, allora il problema del calcolo degli zeri di $f(x)$ si trasforma in quello del calcolare le intersezioni tra la striscia di piano formata dai punti $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x) - \delta \leq y \leq f(x) + \delta\}$ e l'asse delle x , come mostrato in figura 2.

Allora in questa forma alla soluzione α del problema originale viene sostituito l'intervallo di incertezza rappresentato in figura dal segmento verde. Se $f(x)$ è

Listing 1: Function bisezione

```
function alfa=bisezione(a,b)
% applica il metodo di bisezione per approssimare uno zero
% della funzione f(x) sull'intervallo [a,b] dove f(x) e' una
% funzione predefinita tale che f(a)f(b)<0
maxit = 100;
fa = f(a);
if fa*f(b)>0
    disp('Dati inconsistenti')
    break
end
for k=1:maxit
    c = (a+b)/2;
    fc = f(c);
    if fc*fa<=0
        b = c;
    else
        a = c;
    end
    if b-a < eps*min(abs(a),abs(b))
        break
    end
end
if k==maxit
    disp('attenzione: raggiunto il numero massimo di iterazioni')
end
alfa=c;
```

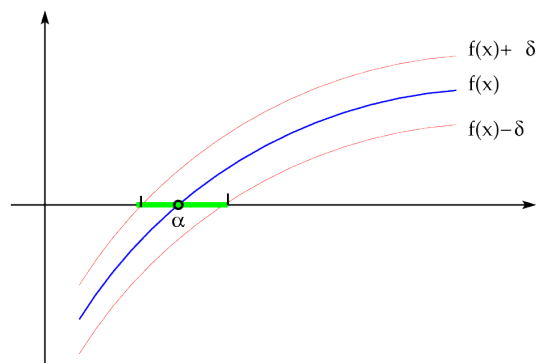


Figura 2: Problema degli zeri in caso di incertezza numerica

derivabile con continuità si riesce a dare una approssimazione dell'intervallo di incertezza sostituendo al grafico di $f(x) + \delta$ e di $f(x) - \delta$ la loro approssimazione lineare data dalle rette con coefficiente angolare $f'(\alpha)$ passanti rispettivamente per (α, δ) e $(\alpha, -\delta)$. Infatti è semplice verificare che le intersezioni di queste rette con l'asse delle x sono date da $\alpha - \delta/f'(\alpha)$ e $\alpha + \delta/f'(\alpha)$.

L'intervallo

$$\left[\alpha - \frac{\delta}{f'(\alpha)}, \alpha + \frac{\delta}{f'(\alpha)}\right]$$

fornisce l'approssimazione al primo ordine in δ dell'*intervallo di incertezza*. In queste condizioni di incertezza numerica dove la $f(x)$ non può essere nota in modo esatto, l'obiettivo del calcolo consiste nel trovare un punto dentro l'intervallo di incertezza. Il metodo di bisezione fa esattamente questo.

È interessante osservare che più piccola in valore assoluto è la derivata prima $f'(\alpha)$ e tanto più ampio è l'intervallo di incertezza. In altri termini il reciproco della derivata prima $f'(\alpha)$ fornisce una misura del condizionamento numerico del problema del calcolo dello zero α di $f(x)$. Intuitivamente, più è orizzontale il grafico della curva nel punto in cui interseca l'asse x e tanto più ampia è l'intersezione della striscia di piano individuata da $f(x) \pm \delta$ e l'asse delle x .

2 Metodi del punto fisso

Sebbene il metodo di bisezione sia efficace e robusto, non sempre è adatto per il calcolo numerico di zeri di funzioni. Infatti, il numero di passi che esso richiede può essere molto elevato e ciò diventa un grosso inconveniente quando il costo del calcolo del valore di $f(x)$ è alto. In questo caso i *metodi del punto fisso* sono più efficaci.

I metodi del punto fisso si ottengono trasformando il problema $f(x) = 0$ del calcolo di zeri di una funzione in un problema "del punto fisso" del tipo

$$x = g(x)$$

che consiste nel trovare quei numeri α che sono trasformati dalla funzione $g(x)$ in sé stessi e per questo detti *punti fissi* di $g(x)$.

La trasformazione da $f(x) = 0$ in $x = g(x)$ si può ottenere in infiniti modi diversi. Ad esempio, data una qualsiasi funzione $h(x) \neq 0$ si può porre

$$g(x) = x - f(x)/h(x).$$

La formulazione data in termini di problema di punto fisso permette di generare in modo naturale una successione di punti che, se convergente, converge ad un punto fisso di $g(x)$ purché $g(x)$ sia una funzione continua. Tale successione è semplicemente data da

$$\begin{cases} x_{k+1} = g(x_k), & k = 0, 1, 2, \dots, \\ x_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (1)$$

Ci riferiamo all'espressione (1) come al *metodo di punto fisso* o *metodo di iterazione funzionale* associato a $g(x)$.

Se $\lim_k x_k = \ell$, nell'ipotesi di continuità di $g(x)$ si ha

$$\ell = \lim_k x_{k+1} = \lim_k g(x_k) = g(\lim_k x_k) = g(\ell).$$

Cioè ℓ è un punto fisso di $g(x)$.

Diventa quindi cruciale poter dare condizioni facilmente verificabili affinché la successione generata $\{x_k\}$ converga per x_0 in un intorno di α . Per questo vale il seguente risultato che enunciamo e dimostriamo in una forma adatta ad un approccio computazionale.

Teorema 1 (del punto fisso) Sia $\mathcal{I} = [\alpha - \rho, \alpha + \rho]$ e $g(x) \in C^1(\mathcal{I})$, dove $\alpha = g(\alpha)$ e $\rho > 0$. Si denoti con $\lambda = \max_{|x-\alpha| \leq \rho} |g'(x)|$. Se $\lambda < 1$ allora per ogni $x_0 \in \mathcal{I}$, posto $x_{k+1} = g(x_k)$, $k = 0, 1, \dots$, vale

$$|x_k - \alpha| \leq \lambda^k \rho,$$

per cui $x_k \in \mathcal{I}$ e $\lim_k x_k = \alpha$. Inoltre α è l'unico punto fisso di $g(x)$ in $[a, b]$.

Dim. Si procede per induzione su k . Per $k = 0$, poiché $x_0 \in \mathcal{I}$, vale $|x_0 - \alpha| \leq \rho = \rho \lambda^0$. Assumiamo che $|x_k - \alpha| \leq \lambda^k \rho$. Allora vale

$$x_{k+1} - \alpha = g(x_k) - g(\alpha) = g'(\xi_k)(x_k - \alpha), \quad |\xi_k - \alpha| < |x_k - \alpha|.$$

Dove abbiamo usato il fatto che $x_{k+1} = g(x_k)$ e $\alpha = g(\alpha)$, e abbiamo usato il teorema del valor medio di Lagrange che è applicabile essendo $x_k \in \mathcal{I}$ per ipotesi induttiva e $\alpha \in \mathcal{I}$. Poiché $x_k \in \mathcal{I}$ è anche $\xi_k \in \mathcal{I}$ e si ha $|g'(\xi_k)| \leq \lambda$ per cui, per l'ipotesi induttiva vale

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq |g'(\xi_k)| |x_k - \alpha| \leq \lambda \cdot \lambda^k \rho = \lambda^{k+1} \rho.$$

Per l'unicità di α si procede per assurdo. Se $\beta \neq \alpha$ fosse un altro punto fisso in $[a, b]$, dalla relazione

$$\alpha - \beta = g(\alpha) - g(\beta) = g'(\xi)(\alpha - \beta)$$

si dedurrebbe che $g'(\xi) = 1$ il che è assurdo. \square

Così come è formulato il teorema 1 non sembra di utilità pratica. Infatti, già la conoscenza degli estremi $\alpha - \rho$ e $\alpha + \rho$ dell'intervallo \mathcal{I} in cui è definita $g(x)$ permette di calcolare il punto fisso α semplicemente prendendone la semisomma. Nella pratica possiamo assumere di avere a disposizione un intervallo $[a, b]$ a cui appartiene α e di sapere che su tale intervallo $|g'(x)| < 1$. Sotto queste ipotesi siamo certi che con almeno una delle due scelte $x_0 = a$, $x_0 = b$ la successione è ben definita e converge al punto fisso α . Infatti se α appartiene alla metà sinistra dell'intervallo $[a, b]$, il teorema vale con $\rho = \alpha - a$ sull'intervallo $[\alpha - \rho, \alpha + \rho]$ di cui a è estremo sinistro. Se α appartiene alla metà destra di $[a, b]$ allora

il teorema vale con $\rho = b - \alpha$ sull'intervallo $[\alpha - \rho, \alpha + \rho]$ di cui b è estremo destro. Dal punto di vista operativo basta scegliere a caso uno dei due estremi e calcolare gli elementi della successione $\{x_k\}$. Se c'è convergenza il problema è risolto. Se invece qualche x_k cade fuori dell'intervallo $[a, b]$ allora si arrestano le iterazioni e si riparte con x_0 uguale all'altro estremo.

Si noti che, a differenza dei metodi iterativi per sistemi lineari in cui la convergenza della successione generata vale per ogni scelta del punto iniziale, per i metodi del punto fisso applicati a funzioni non lineari la convergenza vale in un intorno opportuno del punto fisso α . Questo fatto si usa denotare con l'espressione *convergenza locale*. Mentre col termine *convergenza globale* ci si riferisce al fatto che le successioni generate convergono *qualunque* sia il punto iniziale x_0 .

Nelle situazioni concrete in cui $g(x)$ viene calcolata con l'aritmetica floating point, il risultato fornito dal teorema 1 non vale più. È però possibile dimostrare una versione equivalente valida per l'aritmetica floating point.

Teorema 2 *Nelle ipotesi del teorema 1 sia \tilde{x}_k la successione generata da*

$$\tilde{x}_{k+1} = g(\tilde{x}_k) + \delta_k$$

dove $|\delta_k| \leq \delta$ è l'errore commesso nel calcolo di $g(\tilde{x}_k)$ in aritmetica floating point e δ è una quantità nota a priori. Posto $\sigma = \delta/(1 - \lambda)$, se $\sigma < \rho$ risulta

$$|\tilde{x}_k - \alpha| \leq (\rho - \sigma)\lambda^k + \sigma$$

Dim. Si procede per induzione su k . Per $k = 0$ la disuguaglianza è soddisfatta. Dimostriamo il passo induttivo. Vale

$$\tilde{x}_{k+1} - \alpha = g(\tilde{x}_k) - g(\alpha) + \delta_k = g'(\xi_k)(\tilde{x}_k - \alpha) + \delta_k,$$

dove $|\xi_k - \alpha| < |\tilde{x}_k - \alpha|$. Prendendo i valori assoluti e applicando l'ipotesi induttiva si ha

$$|\tilde{x}_{k+1} - \alpha| \leq \lambda|\tilde{x}_k - \alpha| + \delta \leq \lambda((\rho - \sigma)\lambda^k + \sigma) + \delta$$

La tesi segue dal fatto che $\lambda\sigma + \delta = \lambda\delta/(1 - \lambda) + \delta = \sigma$. □

Il teorema 2 ci dice che la distanza di \tilde{x}_k dal punto fisso α è limitato dalla somma di due parti. La prima converge a zero in modo esponenziale su base λ . La seconda è costante ed è data da $\sigma = \delta/(1 - \lambda)$. Questa seconda parte rappresenta l'intervallo di incertezza sotto il quale non è consentito andare. Si osservi che per la funzione $f(x) = x - g(x)$ che ha α come zero, l'intervallo di incertezza è dato al primo ordine da $[\alpha - \delta/|f'(\alpha)|, \alpha + \delta/|f'(\alpha)|]$. Cioè essendo $f'(x) = 1 - g'(x)$, se $g'(x) > 0$, l'intervallo di incertezza è contenuto in $[\alpha - \sigma, \alpha + \sigma]$.

È utile ricordare dalla dimostrazione del teorema 1 che

$$x_{k+1} - \alpha = g'(\xi_k)(x_k - \alpha). \tag{2}$$

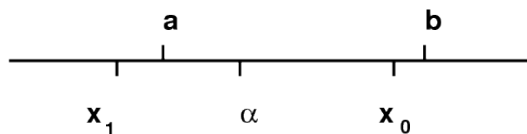


Figura 3: Punto fisso non centrato nell'intervallo

Ciò implica che se $0 < g'(x) < 1$ nell'intervallo $x \in [\alpha - \rho, \alpha + \rho]$ allora, $x_{k+1} - \alpha$ ha lo stesso segno di $x_k - \alpha$. In altri termini, se $x_0 > \alpha$ allora $x_k > \alpha$ per ogni valore di k , inoltre $\alpha < x_{k+1} < x_k$. Cioè la successione è decrescente. Analogamente se $x_0 < \alpha$ la successione $\{x_k\}$ è crescente.

Analogamente, nell'ipotesi $-1 < g'(x) < 0$, segue dalla (2) che se $x_k > \alpha$ allora $x_{k+1} < \alpha$, se $x_k < \alpha$ allora $x_{k+1} > \alpha$. Cioè la successione generata ha un comportamento alternato: le sottosuccessioni $\{x_{2k}\}$ e $\{x_{2k+1}\}$ convergono, una crescendo, l'altra decrescendo, al punto fisso α .

Questa osservazione permette di determinare il comportamento della convergenza mediante lo studio del segno della derivata di $g(x)$. Un'altra osservazione interessante è che se $[a, b]$ è un intervallo qualsiasi che contiene α , non necessariamente centrato in α , e se $g'(x) > 0$ allora per ogni $x_0 \in [a, b]$ la successione generata $\{x_k\}$ converge in modo monotono ad α . Mentre se $g'(x) < 0$ e se $[a, b]$ non è centrato in α può accadere che per un particolare $x_0 \in [a, b]$ risulti $x_1 \notin [a, b]$ anche se più vicino ad α di x_0 . Per cui $g(x)$ può non esistere in x_1 o possono non essere più soddisfatte le ipotesi sulla derivata di $g(x)$. Ciò è mostrato nella figura 3.

È evidente quindi la necessità di mettere nelle ipotesi del teorema 1 la condizione $[a, b] = [\alpha - \rho, \alpha + \rho]$.

Un'altra osservazione interessante è che, come risulta dalla dimostrazione del teorema 1, la quantità ξ_k sta nell'intervallo aperto di estremi α e x_k . Ciò implica che se $x_k \rightarrow \alpha$ allora $\xi_k \rightarrow \alpha$ quindi il fattore di riduzione dell'errore $|g'(\xi_k)|$ si avvicina sempre di più al valore $|g'(\alpha)|$. Questo implica che se $g'(\alpha) = 0$ allora man mano che le iterazioni procedono, il fattore di riduzione dell'errore diventa sempre più vicino a zero. Cioè la convergenza è sempre più rapida. Tra poco formalizzeremo questa proprietà.

L'ultima osservazione che facciamo riguarda l'interpretazione grafica dei metodi del punto fisso. Il fatto che $x_{k+1} = g(x_k)$ ci permette di descrivere graficamente la costruzione della successione come riportato nelle figure 4, 5 che mostrano il caso di una funzione $g(x)$ crescente e di una decrescente in cui la successione $\{x_k\}$ è rispettivamente monotona e alternata. Nelle figure sono riportati i primi due passi dell'iterazione. Il terzo passo porterebbe ad un punto difficilmente distinguibile da α nella risoluzione dello schermo o della stampante.

Un aspetto computazionalmente interessante dei metodi del punto fisso riguarda le condizioni di arresto e la determinazione di limitazioni *a posteriori* dell'errore. È abbastanza naturale per questo considerare la quantità $|x_k - x_{k+1}|$ e arrestare le iterazioni quando $|x_k - x_{k+1}| \leq \epsilon$ per un valore di ϵ fissato. Vediamo

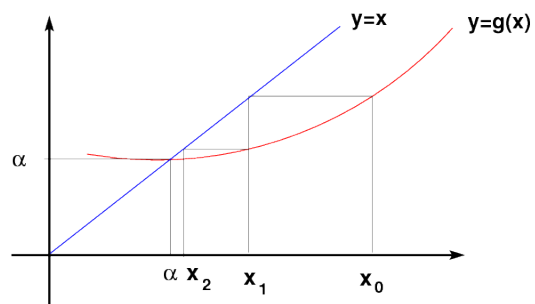


Figura 4: Convergenza monotona

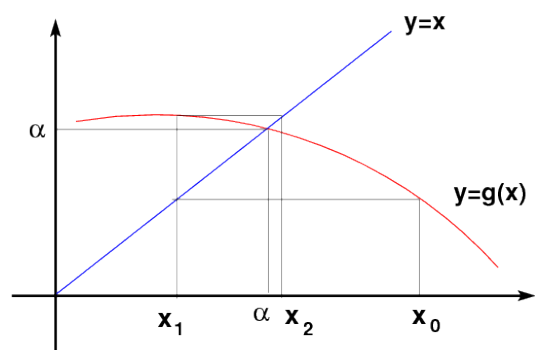


Figura 5: Convergenza alternata

ora come la quantità $|x_k - x_{k+1}|$ sia legata all'errore assoluto di approssimazione $|x_k - \alpha|$. Vale

$$x_k - x_{k+1} = x_k - \alpha - (x_{k+1} - \alpha) = (x_k - \alpha) - g'(\xi_k)(x_k - \alpha) = (1 - g'(\xi_k))(x_k - \alpha),$$

per un opportuno ξ_k tale che $|\xi_k - \alpha| < |x_k - \alpha|$. Da questo si ottiene

$$|x_k - \alpha| = \left| \frac{x_k - x_{k+1}}{1 - g'(\xi_k)} \right|.$$

Quindi la condizione di arresto $|x_k - x_{k+1}| \leq \epsilon$ ci fornisce la limitazione superiore all'errore

$$|x_k - \alpha| \leq \frac{1}{|1 - g'(\xi_k)|} \epsilon.$$

È interessante osservare che se $g'(x) < 0$ allora il denominatore nell'espressione precedente è maggiore di 1 e quindi la condizione di arresto ci fornisce una limitazione dell'errore significativa. Se invece $g'(x) > 0$ allora il denominatore è minore di 1 e può diventare arbitrariamente vicino a zero a seconda di quanto i valori di $g'(x)$ si avvicinano a 1. Quindi nel caso di $g'(x)$ "vicino" a 1 non solo si ha convergenza lenta ma anche la limitazione a posteriori dell'errore è poco significativa nel senso che per avere un errore di approssimazione dell'ordine della precisione di macchina occorre scegliere una condizione di arresto con un valore di ϵ molto più piccolo.

3 Velocità di convergenza

Nella scelta di un metodo iterativo è cruciale avere informazioni sulla velocità di convergenza delle successioni generate dal metodo. Per questo diamo prima alcune definizioni sulla convergenza di successioni che applicheremo alle successioni generate da metodi del punto fisso, e poi dimostriamo alcuni risultati computazionalmente utili.

Definizione 1 Sia $\{x_k\}$ una successione tale che $\lim_k x_k = \alpha$. Supponiamo esista il limite

$$\gamma = \lim_k \left| \frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} \right|. \quad (3)$$

La convergenza di $\{x_k\}$ a α è detta

- lineare (o geometrica) se $0 < \gamma < 1$,
- sublineare se $\gamma = 1$,
- superlineare se $\gamma = 0$.

$x_k - \alpha$	k
$1/k$	10^{16}
$1/2^k$	54
$1/2^{2^k}$	6

Tabella 1

Nel caso di convergenza superlineare, se $p > 1$ è tale che esiste il limite

$$\lim_k \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^p} = \sigma, \quad 0 < \sigma < \infty,$$

si dice che la successione converge con ordine p . Se $p = 2$ si dice che la convergenza è quadratica, se $p = 3$ si dice che la convergenza è cubica.

Ad esempio, se $\gamma < 1$, la successione $x_k = \gamma^k$ ha convergenza lineare a zero. La successione $x_k = \gamma^{p^k}$ converge a zero in modo superlineare e ha ordine di convergenza p . La successione $x_k = 1/k$ converge a zero in modo sublineare. Per apprezzare meglio la differenza tra le velocità di convergenza, riportiamo nella tabella 1 il più piccolo indice k per cui il valore di $|x_k - \alpha|$ è inferiore a 10^{-16} , avendo scelto $\gamma = \sigma = 1/2$, $p = 2$.

Per successioni generate dal metodo del punto fisso è possibile determinare la velocità di convergenza semplicemente calcolando delle derivate come viene mostrato nei seguenti teoremi.

Teorema 3 *Sia $g(x) \in C^1([a, b])$ e $\alpha \in (a, b)$ tale che $g(\alpha) = \alpha$. Se esiste un $x_0 \in [a, b]$ tale che la successione (1) converge linearmente ad α con fattore γ definito in (3) allora $|g'(\alpha)| = \gamma$. Viceversa, se $0 < |g'(\alpha)| < 1$ allora esiste un intorno \mathcal{I} di α contenuto in $[a, b]$ tale che per ogni $x_0 \in \mathcal{I}$ la successione $\{x_k\}$ generata da (1) converge ad α in modo lineare con fattore $\gamma = |g'(\alpha)|$.*

Dim. Se $\{x_k\}$ è la successione definita da $x_{k+1} = g(x_k)$ che converge linearmente al punto fisso α , allora vale $(x_{k+1} - \alpha)/(x_k - \alpha) = (g(x_k) - g(\alpha))/(x_k - \alpha)$, e per il teorema del valor medio segue

$$\frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = g'(\xi_k), \quad \text{con } |\xi_k - \alpha| < |x_k - \alpha|.$$

Per cui, poiché $x_k \rightarrow \alpha$, anche $\xi_k \rightarrow \alpha$. Risulta allora

$$|g'(\alpha)| = \lim_k \left| \frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} \right|, \quad (4)$$

e quindi $0 < |g'(\alpha)| < 1$. Viceversa, se $0 < |g'(\alpha)| < 1$, poiché g' è continua, esiste un intorno $[\alpha - \rho, \alpha + \rho]$ contenuto in $[a, b]$ in cui $|g'(x)| < 1$. Per il teorema del punto fisso, le successioni generate a partire da x_0 in questo intorno

convergono ad α e per queste successioni vale l'analisi fatta per dimostrare la prima parte per cui vale (4). Conseguentemente tutte queste successioni convergono linearmente. \square

Teorema 4 *Sia $g(x) \in C^1([a, b])$ e $\alpha \in (a, b)$ tale che $g(\alpha) = \alpha$. Se esiste un $x_0 \in [a, b]$ tale che la successione (1) converge sublinearmente ad α allora $|g'(\alpha)| = 1$. Viceversa, se $|g'(\alpha)| = 1$, esiste un intorno \mathcal{I} di α contenuto in $[a, b]$ tale che per ogni $x \in \mathcal{I}$, $x \neq \alpha$ è $|g'(x)| < 1$, e $g'(x)$ non cambia segno su \mathcal{I} allora tutte le successioni $\{x_k\}$ generate da (1) con $x_0 \in \mathcal{I}$ convergono ad α in modo sublineare.*

Dim. La prima parte si dimostra nello stesso modo del teorema 3. Per la seconda parte occorre dimostrare prima che le successioni generate a partire da $x_0 \in \mathcal{I}$ convergono ad α . Fatto questo la dimostrazione segue ripercorrendo la traccia data nel teorema 3. Diamo un cenno di come si dimostra la convergenza. Si osserva innanzitutto che se $x_k \in \mathcal{I}$ allora $|x_{k+1} - \alpha| = |g(x_k) - g(\alpha)| = |g'(\xi_k)| |x_k - \alpha| < |x_k - \alpha|$ poiché $|g'(\xi_k)| < 1$. Quindi anche $x_{k+1} \in \mathcal{I}$. Questo permette di dimostrare che tutti i punti x_k appartengono ad \mathcal{I} e che la successione $\{|x_k - \alpha|\}$ è decrescente. Se $g'(x) \geq 0$ sull'intervallo $[a, b]$ allora la successione $\{x_k\}$ è monotona e limitata quindi ha limite β tale che $\beta = g(\beta)$. Se il limite fosse $\beta \neq \alpha$ allora dalla relazione $\alpha - \beta = g(\alpha) - g(\beta) = g'(\xi)(\alpha - \beta)$ si ha un assurdo poiché $g'(\xi) < 1$. Se invece $g'(x) \leq 0$ allora si considera $G(x) = g(g(x))$ e si osserva che $x_{2k+2} = G(x_{2k})$, $x_{2k+1} = g(x_{2k})$. La funzione $G(x)$ è tale che $G(\alpha) = \alpha$ e $G'(x) = g'(g(x))g'(x) \geq 0$. Basta allora applicare il ragionamento precedente alla funzione $G(x)$ e concludere che $\lim_k x_{2k} = \alpha$ e conseguentemente $\lim_k x_{2k+1} = \lim_k g(x_{2k}) = g(\lim_k x_{2k}) = g(\alpha) = \alpha$ per ogni $x_0 \in \mathcal{I}$. \square

Teorema 5 *Sia $g(x) \in C^p([a, b])$ con $p > 1$ intero e $\alpha \in (a, b)$ tale che $g(\alpha) = \alpha$. Se esiste un $x_0 \in [a, b]$ tale che la successione (1) converge superlinearmente ad α con ordine di convergenza p , allora $|g^{(k)}(\alpha)| = 0$ per $k = 1, \dots, p-1$ e $g^{(p)}(\alpha) \neq 0$. Viceversa, se $|g^{(k)}(\alpha)| = 0$ per $k = 1, \dots, p-1$ e $g^{(p)}(\alpha) \neq 0$ allora esiste un intorno \mathcal{I} di α tale che per ogni $x_0 \in \mathcal{I}$ tutte le successioni $\{x_k\}$ generate da (1) convergono ad α in modo superlineare con ordine di convergenza p .*

Dim. Se la successione $\{x_k\}$ converge ad α con ordine p allora $\lim_k |x_{k+1} - \alpha|/|x_k - \alpha|^p = \sigma \neq 0$ finito. Per cui se $0 < q < p$ allora $\lim_k |x_{k+1} - \alpha|/|x_k - \alpha|^q = 0$. Usando questo fatto dimostriamo che $g^{(q)}(\alpha) = 0$ per $q = 1, \dots, p-1$. Procediamo per induzione su q . La tesi è vera per $q = 1$ infatti abbiamo già dimostrato nei teoremi 3 e 4 che $g'(\alpha) = \lim_k |x_{k+1} - \alpha|/|x_k - \alpha|$, che è zero. In generale se $0 = g'(\alpha) = \dots = g^{(q-1)}(\alpha)$, allora sviluppando $g(x)$ in serie di Taylor in un intorno di α si ottiene

$$g(x) = g(\alpha) + \frac{x - \alpha}{1!} g'(\alpha) + \dots + \frac{(x - \alpha)^{q-1}}{(q-1)!} g^{(q-1)}(\alpha) + \frac{(x - \alpha)^q}{q!} g^{(q)}(\xi)$$

dove ξ è un punto del segmento aperto di estremi α e x . Dall'ipotesi induttiva segue

$$\frac{g(x) - g(\alpha)}{(x - \alpha)^q} = \frac{1}{q!} g^{(q)}(\xi).$$

Applicando questa espressione con $x = x_k$ dove ξ viene sostituito da ξ_k , e prendendo il limite in k , poiché ξ_k converge ad α si ottiene $g^{(q)}(\alpha) = 0$. Analogamente, con $q = p$, si deduce che

$$\frac{1}{p!} g^{(p)}(\alpha) = \lim_k \frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^p} = \sigma \neq 0.$$

La dimostrazione della seconda implicazione è più semplice. Infatti dalla convergenza superlineare della successione $\{x_k\}$ si deduce che $g'(\alpha) = 0$ e per il teorema del punto fisso esiste un intorno $\mathcal{I} = [\alpha - \rho, \alpha + \rho]$ per cui tutte le successioni generate a partire da $x_0 \in \mathcal{I}$ convergono ad α . Il fatto che le derivate di $g(x)$ in α sono nulle fino all'ordine $p - 1$, mentre $g^{(p)}(\alpha) \neq 0$, implica che nello sviluppo in serie di $g(x)$ risulta

$$g(x) = g(\alpha) + \frac{(x - \alpha)^p}{p!} g^{(p)}(\xi).$$

Ponendo $x = x_k$ si ottiene $(x_{k+1} - \alpha)/(x_k - \alpha)^p = g^{(p)}(\xi_k)/p!$ da cui, prendendo il limite in k si ottiene la tesi. \square

Da questi risultati si ricava uno strumento utile per capire la velocità di convergenza dei metodi del punto fisso se applicati a funzioni sufficientemente regolari. In particolare, se siamo in grado di costruire un metodo iterativo associato ad una funzione $g(x)$ tale che $g'(\alpha) = 0$ allora disponiamo di un metodo che ha convergenza superlineare. Se poi $g(x)$ è derivabile due volte con continuità e $g''(\alpha) \neq 0$ il metodo costruito avrà convergenza quadratica. Come vedremo tra poco non sarà tanto difficile costruire un metodo che verifica la condizione $g'(\alpha) = 0$ anche se non si conosce α .

Apparentemente si potrebbe dedurre dai risultati precedenti che l'ordine di convergenza debba essere sempre un numero intero. Questo è falso come si può capire dall'esempio in cui $g(x) = x^{4/3}$. Chiaramente $\alpha = 0$ è un punto fisso di $g(x)$, inoltre $|x_{k+1}|/|x_k|^p = |x_k^{4/3}|/|x_k|^p$ per cui il limite $\lim_k |x_{k+1}|/|x_k|^p$ è finito e non nullo se e solo se $p = 4/3$. D'altro canto si vede che le ipotesi del teorema 5 non sono verificate essendo $g \in C^1$ ma $g \notin C^2$. Infatti $g'(x) = \frac{4}{3}x^{1/3}$, $g''(x) = \frac{4}{9}x^{-2/3}$.

In effetti la funzione $g(x)$ non è abbastanza regolare: per poter applicare il teorema avremmo dovuto avere o $g \in C^2$ e $g''(\alpha) \neq 0$, ma non è questo il caso, oppure, $g \in C^1$ e $g'(\alpha) \neq 0$.

Nella definizione data di convergenza lineare, sublineare e superlineare, così come nella definizione di ordine di convergenza, abbiamo assunto l'esistenza di alcuni limiti che in generale possono non esistere. Non è difficile costruire degli esempi in cui queste situazioni si presentano.

La seguente definizione può essere talvolta utile

Definizione 2 La successione $\{x_k\}$ converge ad α con *ordine almeno* p se esiste una costante β tale che

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq \beta|x_k - \alpha|^p.$$

È facile dimostrare che una successione che converge con ordine $q \geq p$ converge anche con ordine almeno p .

È interessante osservare che se una successione x_k converge ad α in modo che l'errore relativo al passo k è limitato da

$$\epsilon_k = |x_k - \alpha|/|\alpha| \leq \beta\gamma^{p^k}$$

allora il numero di cifre significative, dato da $1 + \log_2 \epsilon_k^{-1}$ è tale che

$$1 + \log_2 \epsilon_k^{-1} \geq 1 + \log_2 \beta^{-1} + p^k \log_2 \gamma^{-1}$$

Cioè il numero di cifre significative è dato dalla somma di una parte costante, $1 + \log_2 \beta^{-1}$ e una parte che ad ogni passo aumenta di un fattore moltiplicativo p . In particolare, nel caso di $p = 2$, il numero di cifre corrispondente al secondo addendo *raddoppia* ad ogni passo.

Per un metodo del punto fisso definito da una funzione $g(x)$, diciamo che il metodo ha convergenza superlineare con ordine p se tutte le successioni generate a partire da x_0 in un opportuno intorno di α , $x_0 \neq \alpha$ convergono con ordine p . I teoremi precedenti garantiscono che se la funzione $g(x)$ è sufficientemente regolare allora si può definire l'ordine del metodo. Se invece vogliamo costruire un esempio di metodo iterativo in cui l'ordine di convergenza non è definibile, dobbiamo considerare funzioni che difettano di regolarità quale ad esempio la funzione

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

che ha punto fisso $\alpha = 0$. Infatti, partendo con $x_0 < 0$ la convergenza è lineare e monotona con fattore di convergenza $\gamma = 1/2$. Se invece $x_0 > 0$ la convergenza è monotona superlineare di ordine 2.

Alcuni spunti di riflessione:

- Cosa si può dire sulla convergenza delle successioni generate dalla funzione

$$g(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x \leq 0 \\ -x^2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

per x_0 in un intorno di 0? Sono ancora applicabili le definizioni date?

- Si provi a considerare questa definizione alternativa: la successione $\{x_k\}$ ha convergenza lineare con fattore γ se $\lim_k |x_k - \alpha|^{1/k} = \gamma$. Si osservi che la quantità $(|x_k - \alpha|/|x_0 - \alpha|)^{1/k}$ dà la riduzione media dell'errore sui primi k passi del metodo, dove la media considerata è quella geometrica. Infatti vale

$$\left(\frac{|x_k - \alpha|}{|x_0 - \alpha|}\right)^{1/k} = \left(\frac{|x_1 - \alpha|}{|x_0 - \alpha|} \cdot \frac{|x_2 - \alpha|}{|x_1 - \alpha|} \cdots \frac{|x_k - \alpha|}{|x_{k-1} - \alpha|}\right)^{1/k}.$$

Si verifichi che questa definizione coincide con quella data precedentemente nei casi in cui entrambe le definizioni sono applicabili. Si mostri un esempio in cui la seconda definizione è applicabile mentre la prima non lo è.

- Si definisca convergenza di ordine p se $\lim_k |x_k - \alpha|^{1/p^k} = \beta \neq 0$. Si verifichi che questa definizione coincide con quella data precedentemente nei casi in cui entrambe le definizioni sono applicabili. Si mostri un esempio in cui la seconda definizione è applicabile mentre la prima non lo è.
- Se $g(x)$ individua un metodo superlineare di ordine p , qual è l'ordine di convergenza del metodo dato dalla funzione $g_2(x) = g(g(x))$? E qual è l'ordine del metodo dato dalla funzione $g_q(x) = g(g(\cdots g(x)\cdots))$, dove la composizione viene fatta q volte? E se $g(x)$ ha ordine di convergenza 1 con fattore γ , qual è il fattore del metodo associato a $g_q(x)$?

3.1 Confronto tra metodi

Dati due metodi iterativi del punto fisso definiti da due funzioni $g_1(x)$ e $g_2(x)$ viene naturale chiedersi quale dei due sia più conveniente da usare. I due fattori principali che intervengono nella scelta sono la velocità di convergenza e il costo per passo. Confrontiamo i due metodi "alla pari". Supponiamo cioè che siano tutte e due a convergenza lineare o a convergenza superlineare. Denotiamo con c_1 e c_2 il numero delle operazioni aritmetiche per passo richieste dai due metodi.

Se i due metodi hanno convergenza lineare con fattore di convergenza γ_1 e γ_2 allora la riduzione dell'errore commesso dopo k passi sarà data rispettivamente da $\beta_1\gamma_1^k$ e $\beta_2\gamma_2^k$. I due metodi produrranno la stessa riduzione dell'errore rispettivamente con k_1 e k_2 passi se

$$\beta_1\gamma_1^{k_1} = \beta_2\gamma_2^{k_2}.$$

Prendendo i logaritmi si ha che

$$k_1 \log \gamma_1 = k_2 \log \gamma_2 + \log(\beta_2/\beta_1).$$

In una analisi asintotica nel numero di passi, che ha significato pratico nel caso si debba calcolare la soluzione con precisione elevata, si può trascurare il termine $\log(\beta_2/\beta_1)$, e imporre la condizione

$$k_1 = k_2 \frac{\log \gamma_2}{\log \gamma_1}. \quad (5)$$

Poiché il costo globale dei due metodi applicati rispettivamente con k_1 e con k_2 iterazioni è dato rispettivamente da c_1k_1 e c_2k_2 , il primo metodo risulta più

conveniente se $c_1 k_1 < c_2 k_2$. Quindi, per la (5) ciò accade se

$$\frac{c_1}{c_2} < \frac{\log \gamma_1}{\log \gamma_2}.$$

Si procede in modo analogo nell'analisi del caso di convergenza superlineare. Osserviamo prima che per la convergenza superlineare con ordine p l'errore al passo k è tale che $\epsilon_k \leq \beta \epsilon_{k-1}^p$.

Questo conduce alla disequaglianza

$$\epsilon_k \leq \beta \beta^p \epsilon_{k-2}^{p^2} \leq \dots \leq \beta \beta^p \beta^{p^2} \dots \beta^{p^{k-1}} \epsilon_0^{p^k} = \eta r^{p^k}$$

dove $\eta = \beta^{-1/(p-1)}$, $r = \epsilon_0 \beta^{1/(p-1)}$, e dove si assume ϵ_0 sufficientemente piccolo in modo che $r < 1$.

Nel caso di due metodi con costanti η_1, r_1 e η_2, r_2 , dove $r_1, r_2 < 1$, e di costo per passo c_1 e c_2 , per capire quali dei due è asintoticamente più conveniente occorre confrontare le quantità $c_1 k_1$ e $c_2 k_2$ dove stavolta k_1 e k_2 sono legate dalla relazione

$$\eta_1 r_1^{p_1^{k_1}} = \eta_2 r_2^{p_2^{k_2}}.$$

Prendendo i logaritmi si ha

$$p_1^{k_1} \log r_1 = p_2^{k_2} \log r_2 + \log(\eta_2/\eta_1).$$

In una analisi asintotica nel numero di iterazioni possiamo trascurare la parte additiva che non dipende né da k_1 né da k_2 e quindi imporre la condizione

$$p_1^{k_1} \log r_1 = p_2^{k_2} \log r_2.$$

Cambiando segno e prendendo nuovamente i logaritmi si arriva a

$$k_1 \log p_1 = k_2 \log p_2 + \log(\log r_2^{-1} / \log r_1^{-1}),$$

che, sempre in una analisi asintotica può essere sostituita da

$$k_1 = k_2 \frac{\log p_2}{\log p_1}.$$

Per cui il primo metodo risulta asintoticamente più efficiente del secondo se $c_1 k_1 < c_2 k_2 = c_2 k_1 \log p_1 / \log p_2$, cioè se

$$\frac{c_1}{c_2} < \frac{\log p_1}{\log p_2}.$$

4 Alcuni metodi del punto fisso

Descriviamo ed analizziamo alcuni metodi del punto fisso per l'approssimazione numerica degli zeri di una funzione

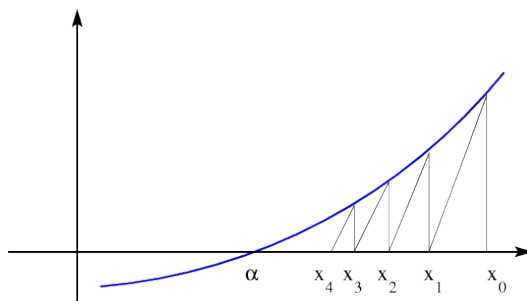


Figura 6: Metodo delle secanti

4.1 Il metodo delle secanti

Sia $f(x) \in C^1([a, b])$ e $\alpha \in [a, b]$ tale che $f(\alpha) = 0$. Il metodo definito dalla funzione

$$g(x) = x - f(x)/m$$

dove m è una opportuna costante è detto metodo delle secanti. Graficamente questo metodo consiste nel tracciare la retta passante per il punto $(x_k, f(x_k))$ di coefficiente angolare m e considerare come x_{k+1} l'ascissa del suo punto di intersezione con l'asse delle ascisse. La figura 6 mostra questa interpretazione geometrica.

Si osserva che $g'(x) = 1 - f'(x)/m$. Quindi una condizione sufficiente di convergenza è che $|1 - f'(x)/m| < 1$ in un intorno circolare di α . Questa condizione è verificata se $0 < f'(x)/m < 2$. Basta quindi scegliere m in modo che abbia lo stesso segno di $f'(x)$ e $|m| > \frac{1}{2}|f'(x)|$. In particolare, se $f'(\alpha)$ fosse nota, la scelta $m = f'(\alpha)$ darebbe una convergenza superlineare. Ma questa informazione molto raramente è disponibile.

Ad esempio, se $f(x) = x^2 - 2$, di modo che $\alpha = \sqrt{2}$ è zero di $f(x)$, la condizione da rispettare è $0 < x/m < 1$. Scegliendo ad esempio $m = 4$, la condizione viene verificata sull'intervallo $(0, 4)$. Inoltre, poiché $f'(x) = 2x$, la derivata prima di $g(x) = x - f(x)/m$ vale $1 - 2x/m = 1 - x/2$ ed è positiva e minore di 1 sull'intervallo $(0, 2)$. Allora per ogni x_0 compreso tra 0 e 2 la successione del punto fisso generata da $x_{k+1} = x_k - (x_k^2 - 2)/4$ converge in modo monotono ad α . La convergenza è lineare con fattore $\gamma = 1 - \sqrt{2}/2 = 0.29289\dots$ Scegliendo $m = 3$, la $g'(x)$ è positiva e minore di 1 in $(0, 3/2)$. Tale intervallo contiene $\sqrt{2}$ visto che $9/4 > 2$. Per cui, la successione generata da $x_{k+1} = x_k - (x_k^2 - 2)/3$ converge in modo monotono per ogni scelta di $x_0 \in (0, 3/2)$. Inoltre la convergenza è lineare con fattore di convergenza $1 - 2\sqrt{2}/3 = 0.05719\dots$

La tabella 2 mostra l'andamento delle successioni generate con $m = 4$, e con $m = 3$ a partire da $x_0 = 3/2$. La maggior velocità di convergenza della seconda successione a $\sqrt{2} = 1.41421356237310\dots$ è evidente.

k	$m = 4$	$m = 3$
1	1.43750000000000	1.41666666666667
2	1.42089843750000	1.41435185185185
3	1.41616034507751	1.41422146490626
4	1.41478281433500	1.41421401430572
5	1.41438021140058	1.41421358821949

Tabella 2: Approssimazioni di $\sqrt{2}$ ottenute col metodo delle secanti

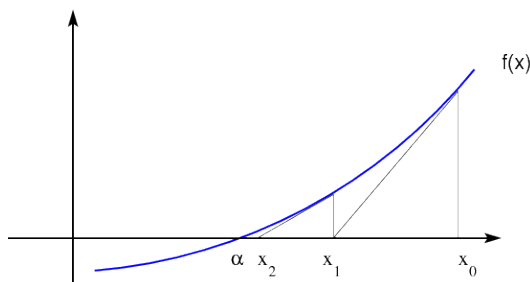


Figura 7: Metodo delle tangenti

4.2 Il metodo delle tangenti di Newton

Una naturale modifica del metodo delle secanti consiste nel variare ad ogni passo l'inclinazione m della retta passante per $(x_k, f(x_k))$ la cui intersezione con l'asse delle x ci fornisce x_{k+1} . Il modo più semplice di fare ciò si ottiene scegliendo come inclinazione quella della retta tangente al grafico di $f(x)$ nel punto $(x_k, f(x_k))$. Questo richiede che la funzione $f(x)$ sia derivabile. L'espressione che troviamo in questo modo, data da

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (6)$$

definisce il *metodo di Newton* detto anche *metodo delle tangenti*.

La figura 7 mostra l'interpretazione geometrica del metodo di Newton.

Giusto per vedere la differenza della velocità di convergenza della successione generata, riportiamo nella tabella 3 i valori ottenuti col metodo di Newton applicato alla funzione $x^2 - 2$ a partire da $x_0 = 3/2$

Se la funzione $f(x)$ è sufficientemente regolare allora è possibile dimostrare facilmente le proprietà di convergenza del metodo di Newton. Ad esempio, supponiamo che $f(x)$ sia almeno di classe C^3 con $f'(\alpha) \neq 0$, di modo che la funzione

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

k	x_k
1	1.41666666666667
2	1.41421568627451
3	1.41421356237469
4	1.41421356237310

Tabella 3: Approssimazioni di $\sqrt{2}$ ottenute col metodo delle tangenti

sia di classe C^2 . Allora, poiché

$$g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}, \quad g''(x) = \frac{f''(x)}{f'(x)} + \frac{f(x)f'''(x)}{f'(x)^2} - 2\frac{f(x)f''(x)^2}{f'(x)^3}$$

risulta $g'(\alpha) = 0$, $g''(\alpha) = f''(\alpha)/f'(\alpha)$. Per cui, per il teorema 5, il metodo di Newton ha convergenza superlineare che è di ordine 2 se $f''(\alpha) \neq 0$, mentre è di ordine almeno 2 se $f'''(\alpha) = 0$.

Possiamo però dare risultati di convergenza sotto ipotesi più deboli di regolarità.

Teorema 6 *Sia $f(x) \in C^2([a, b])$ e $\alpha \in (a, b)$ tale che $f(\alpha) = 0$. Se $f'(\alpha) \neq 0$ esiste un intorno $\mathcal{I} = [\alpha - \rho, \alpha + \rho] \subset [a, b]$ tale che per ogni $x_0 \in \mathcal{I}$ la successione (6) generata dal metodo di Newton converge ad α . Inoltre, se $f''(\alpha) \neq 0$ la convergenza è superlineare di ordine 2, se $f''(\alpha) = 0$ la convergenza è di ordine almeno 2.*

Dim. Poiché $g'(x) = f(x)f''(x)/(f'(x))^2$ risulta $g'(\alpha) = 0$. Per cui, essendo $g'(x)$ continua, esiste un intorno $\mathcal{I} = [\alpha - \rho, \alpha + \rho] \subset [a, b]$ per cui $|g'(x)| < 1$ se $x \in \mathcal{I}$. Per il teorema del punto fisso questo garantisce la convergenza delle successioni generate a partire da $x_0 \in \mathcal{I}$. Per dimostrare la convergenza quadratica si considera il rapporto

$$\frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^2} = \frac{x_k - f(x_k)/f'(x_k) - \alpha}{(x_k - \alpha)^2}. \quad (7)$$

Sviluppando $f(x)$ in un intorno di x_k si ha che

$$0 = f(\alpha) = f(x_k) + (\alpha - x_k)f'(x_k) + \frac{(\alpha - x_k)^2}{2}f''(\xi_k), \quad |\alpha - \xi_k| < |\alpha - x_k|,$$

da cui

$$f(x_k)/f'(x_k) = x_k - \alpha - \frac{(\alpha - x_k)^2 f''(\xi_k)}{2f'(x_k)}$$

Sostituendo nella (7) si ottiene

$$\frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^2} = \frac{(\alpha - x_k)^2 f''(\xi_k)}{2(x_k - \alpha)^2 f'(x_k)}$$

da cui $\lim_k (x_{k+1} - \alpha)/(x_k - \alpha)^2 = f''(\alpha)/(2f'(\alpha))$, che dimostra la tesi. \square

Teorema 7 Sia $f(x) \in C^p([a, b])$ con $p > 2$ e $\alpha \in (a, b)$ tale che $f(\alpha) = 0$. Se $f'(\alpha) = \dots = f^{(p-1)}(\alpha) = 0$, $f^{(p)}(\alpha) \neq 0$, e $f'(x) \neq 0$ per $x \neq \alpha$, allora esiste un intorno $\mathcal{I} = [\alpha - \rho, \alpha + \rho] \subset [a, b]$ tale che per ogni $x_0 \in \mathcal{I}$ la successione (6) generata dal metodo di Newton converge ad α , inoltre α è l'unico zero di $f(x)$ in \mathcal{I} . La convergenza è lineare con fattore di convergenza $1 - 1/p$.

Dim. La funzione $g(x)$ che definisce il metodo di Newton è data da

$$g(x) = \begin{cases} \alpha & \text{se } x = \alpha \\ x - \frac{f(x)}{f'(x)} & \text{se } x \neq \alpha. \end{cases}$$

Dimostriamo che $g(x)$ è di classe C^1 in un intorno di α e che $|g'(\alpha)| < 1$ in modo che la tesi discende dal teorema 1. Dimostriamo nell'ordine la continuità di $g(x)$ in α , la derivabilità in α e la continuità di $g'(x)$ in α . Essendo $f'(x) \neq 0$ per $x \neq \alpha$, la funzione $g(x)$ è continua per $x \neq \alpha$. Per la continuità di $g(x)$ su tutto l'intervallo basta dimostrare che $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = \alpha$, o equivalentemente che $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)/f'(x) = 0$. Per la regola di de L'Hôpital vale $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)/f'(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha} f^{(p-1)}(x)/f^{(p)}(x) = f^{(p-1)}(\alpha)/f^{(p)}(\alpha) = 0$. Per la derivabilità di $g(x)$ in α basta dimostrare che esiste $\lim_{h \rightarrow 0} (g(\alpha+h) - g(\alpha))/h$. Per la definizione di $g(x)$ si ha $\lim_{h \rightarrow 0} (g(\alpha+h) - g(\alpha))/h = 1 - \ell$ dove $\ell = \lim_{h \rightarrow 0} f(\alpha+h)/(hf'(\alpha+h))$. Dagli sviluppi in serie di $f(\alpha+h)$ e $f'(\alpha+h)$

$$\begin{aligned} f(\alpha+h) &= f(\alpha) + hf'(\alpha) + \dots + \frac{h^{p-1}}{(p-1)!} f^{(p-1)}(\alpha) + \frac{h^p}{p!} f^{(p)}(\xi), \\ f'(\alpha+h) &= f'(\alpha) + hf''(\alpha) + \dots + \frac{h^{p-2}}{(p-2)!} f^{(p-1)}(\alpha) + \frac{h^{p-1}}{(p-1)!} f^{(p)}(\eta), \end{aligned} \quad (8)$$

dove ξ, η appartengono all'intervallo aperto di estremi α e $\alpha+h$, si ottiene $f(\alpha+h) = \frac{h^p}{p!} f^{(p)}(\xi)$, $f'(\alpha+h) = \frac{h^{p-1}}{(p-1)!} f^{(p)}(\eta)$. Per cui $\ell = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h^p/p!}{h^{p-1}/(p-1)!} \frac{f^{(p)}(\xi)}{f^{(p)}(\eta)}$. Poiché $\xi, \eta \rightarrow \alpha$ per $x \rightarrow \alpha$ e $f^{(p)}(x)$ è continua, allora $\ell = 1/p$ per cui $g(x)$ è derivabile in α e vale $g'(\alpha) = 1 - \ell = 1 - 1/p$. Per dimostrare la continuità di $g'(x)$ basta dimostrare che $\lim_{x \rightarrow \alpha} g'(x) = 1 - 1/p$. Per $x \neq \alpha$ vale $g'(x) = f(x)f''(x)/(f'(x))^2$ da cui, utilizzando gli sviluppi in serie (8) con $x = \alpha+h$ e quello di $f''(x)$

$$f''(x) = f''(\alpha) + (x-\alpha)f'''(\alpha) + \dots + \frac{h^{p-3}}{(p-3)!} f^{(p-1)}(\alpha) + \frac{h^{p-2}}{(p-2)!} f^{(p)}(\mu),$$

con μ nell'intervallo aperto di estremi x e α , si ha $\lim_{x \rightarrow \alpha} g'(x) = 1 - 1/p$. \square

Un altro utile risultato sulla convergenza delle successioni generate dal metodo di Newton riguarda la monotonia. Se la funzione $f(x)$ è crescente e convessa sull'intervallo $\mathcal{I} = [\alpha, \alpha + \rho]$, con $\rho > 0$, allora per ogni $x_0 \in \mathcal{I}$, la retta tangente al grafico della funzione giace tutta sotto il grafico per la convessità di $f(x)$. Per cui il punto x_1 deve necessariamente stare a destra di α . Non solo, ma il fatto che la $f(x)$ sia crescente implica che x_1 deve stare a sinistra di x_0 . Queste

considerazioni ci portano a concludere, mediante un argomento di induzione, che la successione generata dal metodo di Newton converge decrescendo ad α . Dimostriamo questa proprietà in modo analitico sotto ipotesi più generali.

Teorema 8 *Se la funzione $f(x)$ è di classe C^2 sull'intervallo $\mathcal{I} = [\alpha, \alpha + \rho]$ ed è tale che $f'(x)f''(x) > 0$ per $x \in \mathcal{I}$, allora per ogni $x_0 \in \mathcal{I}$, la successione generata dal metodo di Newton applicato ad $f(x)$ converge decrescendo ad α .*

Dim. Si supponga $f'(x) > 0$, il caso $f'(x) < 0$ si tratta in modo analogo. In questo caso è $f(x) > 0$ per $x > \alpha$, per cui $f(x)/f'(x) > 0$. Risulta quindi $x_1 < x_0$. Inoltre vale $x_1 - \alpha = g'(\xi)(x_0 - \alpha)$ con $\alpha < \xi < x_0$. Poiché $g'(\xi) = f(\xi)f''(\xi)/f'(\xi)^2$ si ha $g'(\xi) > 0$, quindi $x_1 > \alpha$. Ciò permette di dimostrare induttivamente che x_i converge decrescendo a α . \square

Un risultato analogo vale su intervalli del tipo $[\alpha - \rho, \alpha]$.

5 Applicazioni del metodo di Newton

Una semplice ed efficace applicazione del metodo di Newton riguarda il calcolo del reciproco di un numero da svolgere con sole addizioni e moltiplicazioni.

Nella realizzazione di una aritmetica floating point si incontra il seguente problema: dato un numero di macchina a , vogliamo calcolare il numero di macchina che meglio approssima $1/a$. Possiamo assumere senza perdere di generalità che a sia la mantissa del numero, cioè $1/2 \leq a < 1$. Si pone allora $f(x) = a - 1/x$ che si annulla in $\alpha = 1/a$ e si considera il metodo di Newton:

$$x_{k+1} = 2x_k - x_k^2 a \quad (9)$$

si verifica immediatamente che

$$(\alpha - x_{k+1})/\alpha = ((\alpha - x_k)/\alpha)^2. \quad (10)$$

Cioè l'errore relativo di approssimazione viene elevato a quadrato ad ogni passo. Se si sceglie $x_0 = 3/2$, l'errore relativo iniziale è $|3/2 - \alpha|/\alpha \leq 1/2$ per cui dopo soli 6 passi, si ottiene un errore relativo limitato da $2^{-2^6} = 2^{-64}$. Tutte le 53 cifre della rappresentazione in doppia precisione sono corrette.

La tabella 4 mostra i valori che si ottengono per $a = 4/3$. Si può apprezzare la proprietà che ad ogni passo viene raddoppiato il numero di cifre significative dell'approssimazione.

Un'altra utile applicazione riguarda il calcolo della radice p -esima di un numero di macchina a . Ancora possiamo supporre $a \in [1/2, 1]$. consideriamo per semplicità $p = 2$. Applicando il metodo di Newton alla funzione $x^2 - a$ per calcolare $\alpha = \sqrt{a}$, si ottiene la successione

$$x_{k+1} = \frac{x_k^2 + a}{2x_k}$$

k	x_k
1	1.31250000000000
2	1.33300781250000
3	1.3333325386047
4	1.33333333333333

Tabella 4: Calcolo di $4/3$ col metodo di Newton senza svolgere divisioni

generata dalla funzione $g(x) = (x^2+a)/2x$. Poiché $f''(\alpha) \neq 0$ il metodo converge con ordine 2.

Applicando il metodo di Newton alla funzione $x^{-2} - a^{-1}$, si ottiene la successione

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}(3x_k - x_k^3b), \quad b = a^{-1},$$

che, una volta calcolato $b = a^{-1}$ non comporta divisioni. Anche in questo caso l'ordine di convergenza del metodo è 2.

Per calcolare la radice p -esima possiamo applicare il metodo di Newton a una delle seguenti equazioni

$$f_q(x) = (x^p - a)x^{-q} = 0$$

con $q = 0, 1, \dots, p$. Si scriva la funzione $g_q(x)$ corrispondente e si studi la convergenza.

5.1 Metodo di Newton nel campo complesso

Il metodo di Newton è formalmente definito anche per funzioni di variabile complessa purché derivabili, indipendentemente dal fatto che la interpretazione geometrica di metodo delle tangenti viene a mancare. Ad esempio, per un polinomio quale $f(x) = x^3 - 1$ l'espressione $g(x) = x - (x^3 - 1)/(3x^2)$, ottenuta dal metodo di Newton, ha ancora valore per valori complessi di x . La dimostrazione dei teoremi di convergenza che abbiamo dato non è più valida visto che si basa su risultati dell'analisi di funzioni di variabile reale. Però è ancora possibile dimostrare le buone proprietà di convergenza superlineare.

Sia allora $f(x) = (x - \alpha)q(x)$ un polinomio con uno zero α in generale complesso e semplice, cioè tale che il polinomio quoziente $q(x)$ non si annulla in α e inoltre $q'(\alpha) \neq 0$. Scriviamo la funzione $g(x)$ che definisce il metodo di Newton applicato a $f(x)$:

$$g(x) = x - \frac{(x - \alpha)q(x)}{q(x) + (x - \alpha)q'(x)}$$

Vale allora

$$g(x) - \alpha = (x - \alpha)^2 \frac{q'(x)}{q(x) + (x - \alpha)q'(x)} := (x - \alpha)^2 s(x)$$

Poiché $q'(\alpha) \neq 0$, la funzione razionale $s(x)$ è definita in α e, per ragioni di continuità, esiste un intorno \mathcal{U} di α nel piano complesso in cui $|s(x)| \leq \beta$ per β costante positiva. Per cui, per $x \in \mathcal{U}$ vale

$$|g(x) - \alpha| \leq \beta|x - \alpha|^2.$$

Questo implica che $|x_{k+1} - \alpha| \leq \beta|x_k - \alpha|^2$, dove $x_{k+1} = g(x_k)$ è la successione generata dal metodo di Newton a partire da un x_0 sufficientemente vicino ad α , e quindi la convergenza almeno quadratica a zero della successione $|x_k - \alpha|$. Se poi risulta $q'(\alpha) = 0$ allora la convergenza diventa di ordine superiore. La possibilità di definire i metodi del punto fisso anche per valori complessi di x ci porta a introdurre il concetto di *bacino di attrazione*.

5.2 Bacini di attrazione del metodo di Newton

Per capire la dinamica delle successioni generate dai metodi del punto fisso applicati ad esempio con una funzione $g(x)$ che ha dei punti fissi anche nel campo complesso, al variare di $x_0 \in \mathbb{C}$, è conveniente andare a tracciare i bacini di attrazione.

Supponiamo ad esempio di applicare il metodo di Newton al polinomio $x^3 - 1$ che ha tre radici nel campo complesso $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = -1/2 + i\sqrt{3}/2$, $\xi_3 = -1/2 - i\sqrt{3}/2$, dove i è l'unità immaginaria tale che $i^2 = -1$. Abbiamo l'iterazione

$$x_{k+1} = x_k - (x_k^3 - 1)/(3x_k^2).$$

Supponiamo di realizzare idealmente questo procedimento di colorazione dei punti del piano complesso:

- per un valore dell'intero n fissato, ad esempio $n = 400$, considero i numeri complessi $z_{k,j} = 2k/n + 2ij/n$, con $k, j = -n, \dots, n$. Questi punti ricoprono il quadrato del piano complesso centrato in 0 e di semilato 2.
- Per $k, j = -n, \dots, n$, applichiamo il metodo di Newton con $x_0 = z_{k,j}$ (saltando $z_{0,0}$ che è nullo).
- Se la convergenza avviene verso ξ_1 coloriamo il punto di partenza di rosso; se la convergenza avviene verso ξ_2 coloriamo il punto di partenza di blu; se si ha convergenza a ξ_3 si colora di verde.
- Se non si ha convergenza si colora il punto di partenza di nero.

In questo modo nel reticolo di punti scelti abbiamo evidenziato quelli che sono i bacini di attrazione verso le tre radici. Gli insiemi che si ottengono in questo modo sono molto informativi e anche suggestivi da un punto di vista estetico. L'immagine che si ottiene è riportata nella figura 8.

La colorazione la possiamo fare anche in modo più o meno intenso a seconda del numero di passi che sono stati sufficienti per entrare in un intorno fissato di ciascuna radice. È possibile usare colorazioni di fantasia, legate comunque al numero di passi impiegati per entrare in un assegnato intorno dello zero, che danno figure più suggestive. Qui sotto sono riportati alcuni di questi disegni.

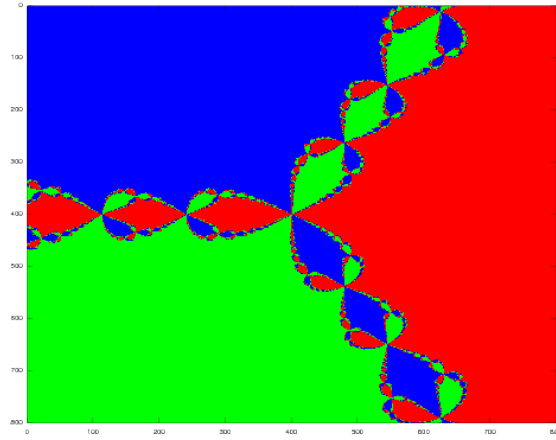


Figura 8: Bacini di attrazione del metodo di Newton applicato alla funzione $x^3 - 1$

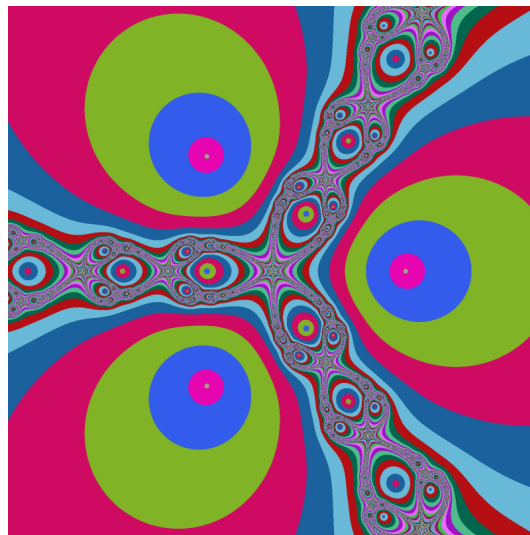


Figura 9: Bacini di attrazione per il metodo di Newton applicato alla funzione $x^3 - 1$, con colorazione di fantasia legata al numero di passi impiegati.

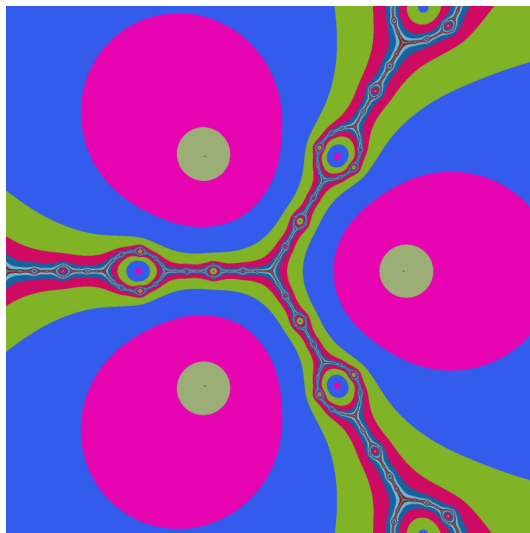


Figura 10: Bacini di attrazione per il metodo di Newton applicato alla funzione $x^2 - 1/x$, con colorazione di fantasia legata al numero di passi impiegati.

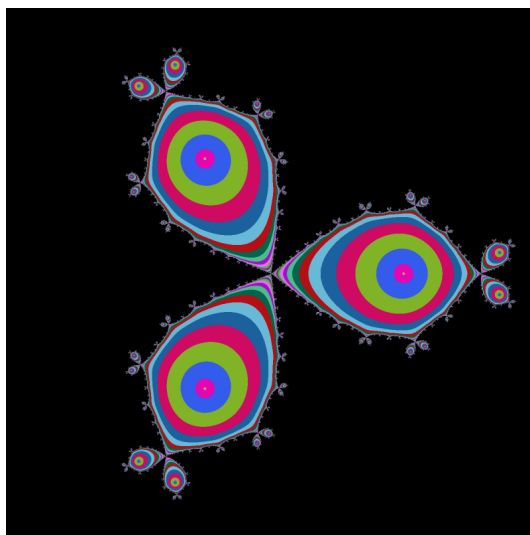


Figura 11: Bacini di attrazione per il metodo di Newton applicato alla funzione $1 - 1/x^3$, con colorazione di fantasia legata al numero di passi impiegati.

5.3 Applicazioni in contesti non numerici

Il metodo di Newton può essere efficacemente usato anche in contesti non numerici. Ad esempio, consideriamo il seguente problema computazionale.

Dati i coefficienti del polinomio $a(t)$ di grado m tale che $a(0) \neq 0$, e dato un intero $n > 0$, calcolare i coefficienti del polinomio $x(t)$ di grado al più $n - 1$ tale che $a(t)x(t) = 1 \pmod{t^n}$.

Si consideri allora l'iterazione (9) riscritta sull'anello dei polinomi di grado al più $n - 1$ con le operazioni modulo t^n :

$$\begin{aligned}x_{k+1}(t) &= 2x_k(t) - ax_k(t)^2 \pmod{t^n} \\x_0(t) &= 1/a(0)\end{aligned}$$

Si verifica facilmente che $x_0(t)a(t) - 1 = 0 \pmod{t}$. Inoltre, come già visto in (10), vale

$$1 - x_{k+1}(t)a(t) = (1 - x_k(t)a(t))^2$$

da cui si deduce induttivamente che

$$1 - x_{k+1}(t)a(t) = 0 \pmod{t^{2^{k+1}}}.$$

In altri termini, il polinomio $x_k(t)$ ha i primi 2^k coefficienti che coincidono con quelli della soluzione cercata. Cioè ad ogni passo il numero dei coefficienti corretti del polinomio $x_k(t)$ raddoppia. Per avere n coefficienti corretti bastano quindi $\lceil \log_2 n \rceil$ passi.

Un risultato analogo lo incontriamo nel calcolo di funzioni di polinomi modulo t^n che si possono scrivere come zeri di funzioni, quali ad esempio la radice p -esima modulo t^n :

$$x(t)^p - a(t) = 0 \pmod{t^n}.$$

Situazioni analoghe si incontrano quando si deve risolvere una equazione sull'anello Z_p^n . Ad esempio, vogliamo calcolare un intero x tale che $3x = 1 \pmod{5^{32}}$. Sappiamo che $x_0 = 2$ soddisfa $3x_0 = 1 \pmod{5}$. Applicando l'iterazione

$$x_{k+1} = 2x_k - 3x_k^2 \pmod{5^{2^{k+1}}}$$

si ottengono dei valori tali che $3x_k = 1 \pmod{5^{2^k}}$ per cui x_5 è la soluzione del nostro problema. I valori ottenuti degli x_k sono riportati nella tabella 5

6 Il caso dei polinomi

Approssimare gli zeri di polinomi in modo efficiente ha un interesse teorico in sé ma è anche importante per le applicazioni. Infatti, mediante i metodi dell'algebra computazionale, si può sempre ricondurre il calcolo delle soluzioni di un sistema di equazioni algebriche al calcolo di tutte le radici di un opportuno polinomio. Una di queste tecniche usa lo strumento delle basi di Groebner.

Esiste una letteratura molto ampia riguardo ai metodi per l'approssimazione degli zeri reali e complessi di un polinomio. Numerosi metodi basati su tecniche

k	x_k
0	2
1	17
2	417
3	260417
4	101725260417
5	15522042910257975260417

Tabella 5

del punto fisso e su altri approcci diversi sono stati introdotti ed analizzati. Riportiamo uno dei metodi della classe dei metodi di iterazione simultanea che è particolarmente efficiente ed è stato usato per la realizzazione del pacchetto MPSolve. MPSolve è un software efficiente che permette di calcolare un numero arbitrario di cifre di polinomi di grado arbitrario con coefficienti arbitrari.

Supponiamo di avere un polinomio $p(x)$ di grado n , monico, cioè in cui il coefficiente di x^n è 1, di cui conosciamo "buone" approssimazioni x_1, \dots, x_{n-1} di $n-1$ zeri. Per calcolare lo zero mancante applichiamo il metodo di Newton alla funzione razionale

$$f(x) = \frac{p(x)}{\prod_{j=1}^{n-1} (x - x_j)}.$$

Se i valori $x_j, j = 1, \dots, n-1$ coincidessero esattamente con gli zeri ξ_1, \dots, ξ_{n-1} di $p(x)$, allora la funzione $f(x)$ sarebbe $x - \xi_n$ e quindi il metodo di Newton fornirebbe la soluzione in un solo passo qualunque sia il punto iniziale. In generale, è facile verificare che il metodo di Newton applicato a $f(x)$ è dato dalla funzione

$$g(x) = x - \frac{p(x)/p'(x)}{1 - \frac{p(x)}{p'(x)} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{x-x_j}}.$$

Il metodo di Ehrlich-Aberth usa questo fatto per approssimare simultaneamente tutti gli zeri di $p(x)$. Il metodo funziona in questo modo

- si scelgono n approssimazioni iniziali $x_j^{(0)}, j = 1, \dots, n$ degli zeri di $p(x)$. Generalmente si pone

$$x_j^{(0)} = \cos(2(j+1/2)\pi/n) + i \sin(2(j+1/2)\pi/n)$$

- per $k = 1, \dots, k_{max}$ si calcola

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - \frac{p(x_i^{(k)})/p'(x_i^{(k)})}{1 - \frac{p(x_i^{(k)})}{p'(x_i^{(k)})} \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{1}{x_i^{(k)} - x_j^{(k)}}}, \quad i = 1, \dots, n.$$

- le iterazioni si arrestano se $|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| \leq \epsilon$ per $i = 1, \dots, n$.

Si può dimostrare che se lo zero ξ_i è semplice allora la sequenza $x_i^{(k)}$ converge con ordine 3 a ξ_i dopo aver riordinato in modo opportuno le componenti $x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}$. La convergenza a zeri multipli avviene linearmente. Non esistono risultati di convergenza globale ma non si conoscono esempi in cui la successione non converge per una scelta dei punti iniziali in un insieme di misura non nulla.

7 Esercizi

Esercizio 1 Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $b > a$, e sia $g(x) \in C^1[a, b]$ tale che $g(\alpha) = \alpha$ con $\alpha \in [a, b]$. Inoltre vale $1/3 \leq g'(x) \leq 1/2$ per ogni $x \in [a, b]$.

a) Si dimostri che per ogni $x_0 \in [a, b]$ la successione $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ definita da $x_{i+1} = g(x_i)$ converge ad α in modo monotono e si determini un intero k tale che $|x_k - \alpha| \leq (b - a)10^{-6}$, $\forall x_0 \in [a, b]$.

b) Per “accelerare” la convergenza della successione $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ si consideri la successione $\{y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ così costruita $y_{i+1} = y_i + \theta(g(y_i) - y_i)$, dove $y_0 \in [a, b]$. Si determinino i valori di θ per cui la successione $\{y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ è convergente e si analizzi la velocità di convergenza.

c) È possibile determinare un valore ottimo di θ per cui ogni $\{y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ ha convergenza più rapida di ogni $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ se $x_0 = y_0$?

Esercizio 2 Si considerino le successioni $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ generate a partire da $x_0 \in \mathbb{R}$ dalla relazione $x_{i+1} = g(x_i)$ dove

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2}{2x} & \text{se } x^2 - 2 \geq 0 \\ 1 + x - \frac{1}{2}x^2 & \text{se } x^2 - 2 < 0 \end{cases}$$

Si dica per quali valori di x_0 la successione generata è convergente e se ne determini il limite. Si determini inoltre l'ordine di convergenza e si dica per quali valori di x_0 la convergenza è monotona.

Soluzione. Cerchiamo intanto i punti fissi di $g(x)$. Siano $g_1(x) = \frac{x^2+2}{2x}$ e $g_2(x) = 1 + x - \frac{1}{2}x^2$. Si osserva che $g_1(x) = x$ se $\alpha_{1,2} = \pm\sqrt{2}$, e $g_2(x) = x$ se $\alpha_{1,2} = \pm\sqrt{2}$, dunque i punti fissi di $g(x)$ sono $\alpha_{1,2} = \pm\sqrt{2}$.

Studiamo le derivate di $g_1(x)$ e $g_2(x)$. Vale

$$g_1'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}, \quad g_2'(x) = 1 - x.$$

Dunque $g_1'(\alpha_{1,2}) = 0$, $g_2'(\alpha_1) = 1 - \sqrt{2}$, $g_2'(\alpha_2) = 1 + \sqrt{2}$. Si osserva inoltre che

$$0 \leq g_1'(x) < \frac{1}{2}, \text{ se } x^2 - 2 \geq 0$$

e

$$\begin{aligned} g_2(x) &> x, & \text{se } \alpha_2 < x < \alpha_1 \\ g_2'(x) &< 0, & \text{se } 1 < x \leq \sqrt{2}. \end{aligned}$$

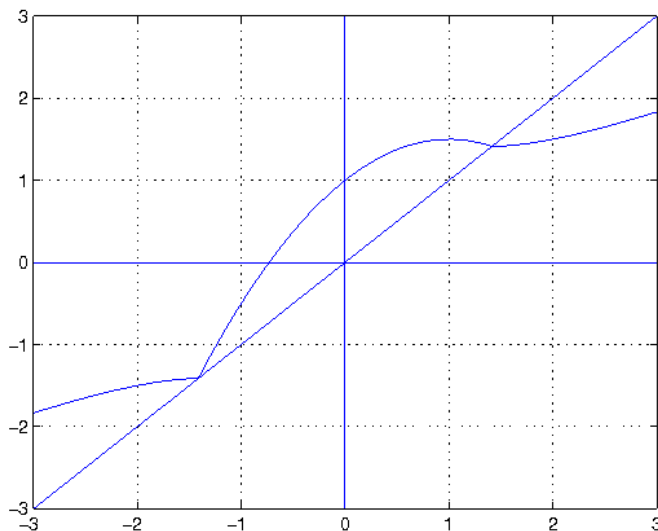


Figura 12: Funzione $g(x)$ dell'Esercizio 2

Dunque la funzione $g(x)$ è continua in \mathbb{R} , ma derivabile solamente in $\mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{2}\}$, e quindi non possiamo applicare i risultati di convergenza validi per funzioni di classe C^1 in un intorno del punto fisso. Il grafico della funzione è riportato in Figura 12.

Studiamo la convergenza per diversi punti iniziali x_0 .

Supponiamo sia $x_0 > \alpha_1$. Allora

$$x_1 - \alpha_1 = g_1(x_0) - g_1(\alpha_1) = g_1'(\xi)(x_0 - \alpha_1)$$

per un opportuno ξ compreso tra x_0 e α_1 , dunque tale che $\xi > \alpha_1$. In particolare $0 < g_1'(\xi) < \frac{1}{2}$, quindi $x_1 - \alpha_1 > 0$ e $x_1 - \alpha_1 \leq \frac{1}{2}(x_0 - \alpha_1)$. Induttivamente, possiamo dimostrare che, se $x_0 > \alpha_1$, allora

$$\alpha_1 < x_{i+1} < x_i, \quad x_i - \alpha_1 < \left(\frac{1}{2}\right)^i (x_0 - \alpha_1), \quad i \geq 0,$$

quindi $\{x_i\}$ converge in modo monotono decrescente a α_1 . Riguardo la velocità di convergenza si ha,

$$\lim_i \frac{x_{i+1} - \alpha_1}{(x_i - \alpha_1)^2} = \lim_i \frac{\frac{x_i^2 + 2}{2x_i} - \sqrt{2}}{(x_i - \sqrt{2})^2} = \lim_i \frac{(x_i^2 + 2 - 2\sqrt{2}x_i)/(2x_i)}{(x_i - \sqrt{2})^2} = \lim_i \frac{1}{2x_i} = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

quindi la convergenza è quadratica.

Supponiamo ora $x_0 < \alpha_2$. Procedendo come nel caso $x_0 > \alpha_1$, si dimostra induttivamente che

$$x_i < x_{i+1} < \alpha_2, \quad \alpha_2 - x_i < \left(\frac{1}{2}\right)^i (\alpha_2 - x_0), \quad i \geq 0,$$

quindi $\{x_i\}$ converge in modo monotono crescente a α_2 . Analogamente, si dimostra che la convergenza è quadratica.

Supponiamo ora $1 \leq x_0 < \alpha_1$. Allora

$$x_1 - \alpha_1 = g_2(x_0) - g_2(\alpha_1) = g_2'(\xi)(x_0 - \alpha_1)$$

per un opportuno ξ compreso tra x_0 e α_1 , dunque tale che $1 < \xi < \alpha_1$. In particolare $g_2'(\xi) < 0$, quindi $x_1 - \alpha_1 > 0$. Dunque x_1 può essere visto come il valore iniziale della successione ottenuta a partire da un punto maggiore di α_1 , e si applicano le considerazioni fatte nel caso $x_0 > \alpha_1$. Dunque la successione $\{x_i\}$ converge a α_1 in modo monotono decrescente per $i \geq 1$, e la convergenza è quadratica.

Supponiamo ora $\alpha_2 < x_0 < 1$. Poiché in questo intervallo aperto è $g(x) > x$, si ha che $x_{i+1} > x_i$ fintanto che $x_0 < x_i < 1$. La successione è quindi crescente finché rimane in $(x_0, 1)$. La successione non può essere contenuta tutta in $(x_0, 1)$ poiché in tal caso essendo crescente e limitata dall'alto dovrebbe avere limite nell'intervallo. Per la continuità di $g(x)$ questo limite dovrebbe essere un punto fisso di $g(x)$. Ma $g(x)$ non ha punti fissi in $[x_0, 1]$. Ci sarà quindi un valore \bar{i} di i per cui $x_{\bar{i}} > 1$. Ci ritroviamo quindi in uno dei due casi precedenti per cui risulta $x_{\bar{i}+1} > \alpha_1$ quindi per $i \geq \bar{i}+1$ la successione converge in modo quadratico e decrescendo a α_1 .

Si osservi che scegliendo x_0 razionale non può accadere che per un certo \bar{i} sia $x_{\bar{i}} = \alpha_1$ essendo α_1 irrazionale.

Esercizio 3 a) Si determini nell'insieme dei polinomi di grado al più 3 con coefficienti razionali un polinomio $g(x)$ tale che la successione generata da $x_{k+1} = g(x_k)$ a partire da x_0 in un intorno di $\sqrt{3}$ converga a $\sqrt{3}$ con massimo ordine di convergenza.

b) Nell'insieme di funzioni del tipo $ax^{-1} + b + cx$ con a, b, c razionali si determini una funzione $h(x)$ tale che la successione generata da $y_{k+1} = h(y_k)$ a partire da y_0 in un intorno di $\sqrt{3}$ converga a $\sqrt{3}$ con massimo ordine di convergenza.

c) Se $x_0 = y_0$ è tale che le successioni $\{x_i\}_i$ e $\{y_i\}_i$ convergono a $\sqrt{3}$, si dica quale delle due successioni converge più velocemente valutando $\lim_n \left| \frac{x_i - \sqrt{3}}{y_i - \sqrt{3}} \right|$.

d) Si assuma che nel punto a) i polinomi abbiano grado al più 2 e coefficienti del tipo p/q con p, q interi di modulo minore di 10. Si individui il polinomio $g(x)$ per cui la successione generata abbia massima velocità di convergenza.

Soluzione.

a) Sia $g(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$, con $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$. La condizione $g(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$

diventa $a + \sqrt{3}b + 3c + 3\sqrt{3}d = \sqrt{3}$. Dunque, uguagliando le parti razionali e non in entrambi i membri, si ottiene $a + 3c = 0$, $b + 3d = 1$.

Se $g'(\sqrt{3}) = 0$, il metodo converge localmente e la convergenza è almeno quadratica. Poiché $g'(x) = b + 2cx + 3dx^2$, uguagliando i termini razionali e non in entrambi i membri dell'equazione $g'(\sqrt{3}) = 0$, si ottiene $b + 9d = 0$ e $c = 0$.

Il sistema lineare definito dalle equazioni $a + 3c = 0$, $b + 3d = 1$, $b + 9d = 0$ e $c = 0$ ha un'unica soluzione, data da $a = 0$, $b = \frac{3}{2}$, $c = 0$, $d = -\frac{1}{6}$.

Dunque esiste un unico polinomio $g(x)$ di grado al più 3 con coefficienti razionali tale che la successione converga a $\sqrt{3}$ con massimo ordine di convergenza. La convergenza è quadratica perché $g''(\sqrt{3}) = -\sqrt{3} \neq 0$.

b) Sia $h(x) = ax^{-1} + b + cx$. La condizione $h(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$ diventa $a\frac{\sqrt{3}}{3} + b + c\sqrt{3} = \sqrt{3}$. Dunque, uguagliando le parti razionali e non in entrambi i membri, si ottiene $b = 0$, $\frac{1}{3}a + c = 1$.

Se $h'(\sqrt{3}) = 0$, il metodo converge localmente e la convergenza è almeno quadratica. Poiché $h'(x) = -ax^{-2} + c$, si ottiene $h'(\sqrt{3}) = -\frac{1}{3}a + c = 0$.

Il sistema lineare definito dalle equazioni $\frac{1}{3}a + c = 1$ e $-\frac{1}{3}a + c = 0$ ha un'unica soluzione data da $a = \frac{3}{2}$, $c = \frac{1}{2}$.

Poiché $h''(\sqrt{3}) \neq 0$, con questi coefficienti il metodo ha convergenza quadratica, ed è l'unico a velocità di convergenza massima.

c) Usando lo sviluppo in serie si ha $x_i - \sqrt{3} = (x_{i-1} - \sqrt{3})^2 \frac{1}{2} g''(\xi_i)$, $y_i - \sqrt{3} = (y_{i-1} - \sqrt{3})^2 \frac{1}{2} h''(\eta_i)$, con ξ_i e η_i opportuni valori negli intervalli aperti di estremi rispettivamente $\sqrt{3}$, x_i , e $\sqrt{3}$, y_i . Quindi

$$\frac{y_i - \sqrt{3}}{x_i - \sqrt{3}} = \left(\frac{y_{i-1} - \sqrt{3}}{x_{i-1} - \sqrt{3}} \right)^2 \frac{h''(\xi_{i-1})}{g''(\eta_{i-1})}.$$

Posto $d_i = \frac{y_i - \sqrt{3}}{x_i - \sqrt{3}}$ e $\gamma_i = \frac{h''(\xi_i)}{g''(\eta_i)}$, si ha allora $d_{i+1} = d_i^2 \gamma_i$, $d_0 = 1$. Da cui

$$d_i = \gamma_{i-1} \gamma_{i-2}^2 \cdots \gamma_0^{2^{i-1}}.$$

Poiché $|g''(\sqrt{3})| = \sqrt{3}$ mentre $|h''(\sqrt{3})| = 1/\sqrt{3}$, è $|h''(\sqrt{3})/g''(\sqrt{3})| = 1/3$. Per cui per ξ, η in un intorno opportuno di $\sqrt{3}$ vale $|h''(\sqrt{3})/g''(\sqrt{3})| \leq \lambda < 1$. Quindi per $x_0 = y_0$ in tale intorno risulta $0 \leq \gamma_i < 1$ per cui

$$\left| \frac{y_i - \sqrt{3}}{x_i - \sqrt{3}} \right| < \lambda^{1+2+\cdots+2^{i-1}}$$

cioè $\lim_i \left| \frac{y_i - \sqrt{3}}{x_i - \sqrt{3}} \right| = 0$. La successione y_i converge allora più velocemente della successione x_i .

d) Sia $g(x) = a + bx + cx^2$. La condizione $g(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$, con $a, b, c \in \mathbb{Q}$, è equivalente a $b = 1$ e $a + 3c = 0$. Poiché $g'(\sqrt{3}) = b + 2\sqrt{3}c$, affinché sia $g'(\sqrt{3}) = 0$, dovrei avere $b = 0$ e $c = 0$, dunque non esistono coefficienti $a, b, c \in \mathbb{Q}$ tali che la successione ha convergenza locale superlineare.

La condizione di convergenza locale è $|g'(\sqrt{3})| < 1$, cioè $|1 + 2\sqrt{3}c| < 1$, e la velocità di convergenza è massima quando $|g'(\sqrt{3})|$ è minimo. Occorre quindi minimizzare $g'(\sqrt{3}) = 1 + 2\sqrt{3}c$ dove $c = p/q$ e $|p|, |q| < 10$. Per $c = -1/(2\sqrt{3})$ vale $g'(\sqrt{3}) = 0$. Poiché $g'(\sqrt{3})$ è funzione lineare di c , il valore di p/q che minimizza $|g'(\sqrt{3})|$ è quello che meglio approssima $-1/(2\sqrt{3}) = -0.28868\dots$, cioè $-2/7 = 0.28571\dots$, e vale $g'(\sqrt{3}) = 0.00296\dots$

Esercizio 4 Sia $g_1(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$, $g_2(x) = \frac{1}{2}x(3 - \frac{x^2}{a})$, dove $a > 0$.

- Si verifichi che \sqrt{a} è punto fisso di g_1 e g_2 .
- Si studi l'ordine di convergenza dei metodi di iterazione funzionale individuati da g_1 e da g_2 .
- Si determinino due costanti α e β tali che $G(x) = \alpha g_1(x) + \beta g_2(x)$ abbia punto fisso α e ordine di convergenza più alto possibile. Dire qual è l'ordine.

Esercizio 5 Per $a \in \mathbb{R}$ sia $f_a(x) = x \log|x + a|$, dove per $a = 0$ si definisce $f_a(0) = 0$. Si determinino gli zeri di $f_a(x)$ e si dica se il metodo di Newton è applicabile per la loro approssimazione. Studiare la convergenza locale del metodo di Newton, se applicabile, determinandone l'ordine.

Soluzione.

Vale $f_a(x) = 0$ quando $x = 0$ oppure $|x + a| = 1$, dunque gli zeri di $f_a(x)$ sono $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1 - a$, $\alpha_3 = -1 - a$.

Sia $a \neq 0$. La funzione non è definita in $x = -a$, e per $x \neq -a$ vale

$$f'_a(x) = \log(|x + a|) + \frac{x}{x + a}, \quad f''_a(x) = \frac{x + 2a}{(x + a)^2}, \quad f'''_a(x) = -\frac{x + 3a}{x + a}.$$

In particolare la funzione è di classe C^∞ su $(-\infty, -a) \cup (-a, +\infty)$.

La funzione è di classe C^∞ in un intorno di ciascun zero α_i , $i = 1, 2, 3$, e vale $f'_a(\alpha_1) = \log(|a|)$, $f'_a(\alpha_2) = 1 - a$, $f'_a(\alpha_3) = 1 + a$. Dunque, se $a \neq \pm 1$, vale $f'_a(\alpha_i) \neq 0$, dunque il metodo di Newton è applicabile e converge localmente a α_1 , α_2 e α_3 , rispettivamente. Poiché $f''_a(\alpha_i) \neq 0$, $i = 1, 2, 3$, la convergenza è quadratica. La Figura 13 riporta il grafico di $f_a(x)$ nel caso $a = 2$.

Se $a = 1$, allora $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ e $\alpha_3 = -2$. Vale $f'_a(\alpha_1) = 0$, $f'_a(x) \neq 0$ in un intorno di α_1 , e $f''_a(\alpha_1) = 2$, dunque il metodo di Newton è applicabile, converge localmente a α_1 , e la convergenza è lineare con fattore di convergenza $1/2$. Poiché $f'_a(\alpha_3) = 2$ e $f''_a(\alpha_3) = 0$, il metodo converge localmente a α_3 , e la convergenza è almeno quadratica; poiché $f'''_a(\alpha_3) = 1$, la convergenza è di ordine 3.

Se $a = -1$, allora $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$ e $\alpha_2 = 2$. In modo analogo al caso $a = 1$, il metodo di Newton converge localmente a α_1 , e la convergenza è lineare con fattore di convergenza $1/2$; inoltre il metodo converge localmente a α_2 , e la convergenza è di ordine 3.

Sia $a = 0$. Se definiamo $f(0) = 0$, allora la funzione $f(x) = x \log|x|$ è continua su \mathbb{R} . I suoi zeri sono $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = -1$. Se $x \neq 0$ vale $f'(x) = \log|x| + 1$, $f''(x) = 1/x$, e in particolare $f(x)$ è C^∞ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. La Figura 14 riporta il grafico di $f_a(x)$ nel caso $a = 0$. La funzione è C^∞ in un

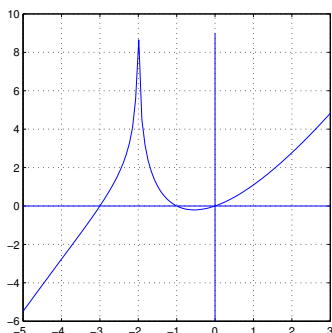


Figura 13: Esercizio 5, $a = 2$

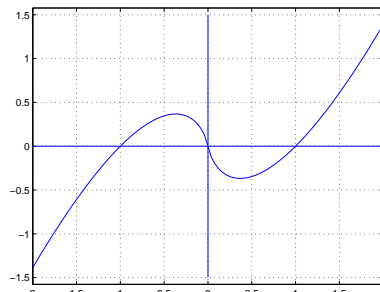


Figura 14: Esercizio 5, $a = 0$

intorno di α_2 e α_3 , dunque il metodo di Newton è applicabile in un intorno di questi due punti. Vale $f'(\alpha_2) \neq 0$, $f''(\alpha_1) \neq 0$ e $f'(\alpha_3) \neq 0$, $f''(\alpha_3) \neq 0$, dunque converge localmente con convergenza quadratica. Consideriamo ora lo zero $\alpha_1 = 0$. Il metodo di Newton è applicabile in ogni punto diverso da 0, e la sua espressione è:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i \log |x_i|}{\log |x_i| + 1} = \frac{x_i}{\log |x_i| + 1}, \quad i \geq 0.$$

Se definiamo

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{\log |x| + 1} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

allora la funzione $g(x)$ è definita e continua in un intorno di 0, e possiamo definire il metodo di Newton in un intorno di 0 mediante l'espressione $x_{i+1} = g(x_i)$. La funzione $g(x)$ è anche derivabile in 0, infatti

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\log |h| + 1} = 0,$$

quindi $g'(0) = 0$. Questo implica che il metodo di Newton converge localmente. Vogliamo valutare l'ordine di convergenza. La funzione $g(x)$ non è di classe C^2 in un intorno di 0, dunque non possiamo applicare i risultati teorici di convergenza. Osserviamo che

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{|x_{i+1}|}{|x_i|} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{\log |x_i| + 1} = 0$$

quindi la convergenza è superlineare. Osserviamo che $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{|x_{i+1}|}{|x_i|^2} = \infty$ e non esiste un $p \in \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{|x_{i+1}|}{|x_i|^p} = \gamma$$

con $0 < \gamma < \infty$, dunque per questa successione l'ordine di convergenza non è definibile. \square

Esercizio 6 Sia $a > 0$ e $f(x) = x + a\sqrt[3]{x^2}$. Per $x \neq 0$ sia $g(x) = x - f(x)/f'(x)$ e, fissato $x_0 \neq 0$ si consideri la successione $\{x_k\}$ definita da $x_{k+1} = g(x_k)$, $k = 0, 1, \dots$. Si dimostri che

- $f(x) = 0$ se e solo se $x \in \{0, -a^3\}$; inoltre $\{x_k\}$ converge quadraticamente a $-a^3$ per x_0 in un intorno di $-a^3$;
- $\{x_k\}$ converge a $-a^3$ per ogni $x_0 < -8/27a^3$ e la convergenza è monotona per $x_0 < -a^3$;
- la convergenza è lineare in un intorno di 0; determinare il fattore di convergenza.

Esercizio 7 Si verifichi che i punti fissi della funzione

$$g(x) = \begin{cases} 1 + (x - 1)^2 & \text{se } x \geq 1 \\ \frac{24}{25} + (x - \frac{4}{5})^2 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

sono $\alpha = 1$ e $\beta = 2$ e si discuta la convergenza della successione generata da $x_{k+1} = g(x_k)$ al variare di x_0 . Più precisamente

- Si dimostri che esiste un intervallo destro U di α tale che per $x_0 \in U$ la successione converge in modo monotono e quadratico; si determini il massimo intorno U per cui vale questa proprietà
- Si dimostri che esiste un intervallo sinistro V di α tale che per $x_0 \in V$ la successione converge in modo monotono e lineare; si determini il massimo intorno V per cui vale questa proprietà
- Determinare gli insiemi \mathcal{A} e \mathcal{B} per cui la successione converge rispettivamente ad α per ogni $x_0 \in \mathcal{A}$ e a β per ogni $x_0 \in \mathcal{B}$. Determinare l'insieme dei valori x_0 per cui non si ha convergenza.

Esercizio 8 Sia $g(x) = a - 1/x$ con $a \geq 0$. Determinare al variare di a i punti fissi di $g(x)$ e discutere la convergenza della successione definita da $x_{k+1} = g(x_k)$, $k = 0, 1, \dots$, al variare di $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. In particolare individuare i casi di convergenza monotona, valutare l'ordine di convergenza e descrivere l'insieme dei valori di x_0 per cui la successione non è definita.

Esercizio 9 Sia $q(x)$ un polinomio di grado al più 2 a coefficienti razionali.

- Sia $g(x) = x - q(x)(x^2 - 2)$. Si trovino condizioni sui coefficienti di $q(x)$ per i quali per ogni x_0 in un opportuno intorno di $\sqrt{2}$ la successione definita da $x_{k+1} = g(x_k)$ sia convergente a $\sqrt{2}$ col massimo ordine di convergenza possibile. Si scriva l'espressione di $g(x)$ e si determini l'ordine di convergenza.
- Nella classe dei metodi così ottenuti se ne individui uno che richieda non più di 4 operazioni aritmetiche per passo (si assume che costanti razionali quali ad esempio $2/3$, siano assegnate a costo zero).
- Si determini un numero $\rho > 0$ tale che la successione generata dal metodo selezionato al punto b) sia convergente per ogni $x_0 \in [\sqrt{2} - \rho, \sqrt{2} + \rho]$, motivando la risposta.
- Si risponda alla domanda a) nel caso di $g(x) = x - (x^2 - 2)/q(x)$.

Esercizio 10 Siano $g_1(x)$ e $g_2(x)$ due funzioni da \mathbb{R} in \mathbb{R} derivabili con continuità. Si consideri la successione generata a partire da $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ dalla relazione $x_{k+1} = g_1(x_k) + g_2(x_{k-1})$, $k = 0, 1, \dots$

a) Si dimostri che se esiste $\lim_k x_k = \alpha$ allora $\alpha = g_1(\alpha) + g_2(\alpha)$ e che per ogni $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ esistono $\xi_k, \eta_k \in \mathbb{R}$ tali che $e_{k+1} = g'_1(\xi_k)e_k + g'_2(\eta_k)e_{k-1}$, per $k = 1, 2, \dots$, dove $e_k = x_k - \alpha$.

b) Riscrivendo l'espressione $e_{k+1} = g'_1(\xi_k)e_k + g'_2(\eta_k)e_{k-1}$ nella forma

$$v^{(k+1)} = \begin{bmatrix} g'_1(\xi_k) & 2g'_2(\eta_k) \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} v^{(k)}, \quad \text{con} \quad v^{(k)} = \begin{bmatrix} e_k \\ \frac{1}{2}e_{k-1} \end{bmatrix}$$

si dimostri che se $|g'_1(\xi)| + 2|g'_2(\eta)| \leq \lambda < 1 \forall \xi, \eta \in \Omega = \{x : |x - \alpha| \leq \rho\}$ allora $\forall x_0, x_1 \in \Omega$ vale $x_k \in \Omega$, $\|v_k\|_\infty \leq \rho \max(1/2, \lambda)^{k-1}$, per $k \geq 1$, e $\lim_k x_k = \alpha$.

c) Sotto le condizioni del punto b) si provi che α è l'unico punto fisso di $g_1(x) + g_2(x)$ in Ω .

d) Dire se la condizione $|g'_1(\xi)| + |g'_2(\eta)| \leq \lambda < 1, \forall \xi, \eta \in \Omega$, è sufficiente per la convergenza.

Esercizio 11 Sia $g(x) : [a, b] \rightarrow [a, b]$ continua tale che $g(\alpha) = \alpha$, dove $a < \alpha < b$. Sia $\{x_k\}_{k \geq 0}$ la successione definita da $x_{k+1} = g(x_k)$ a partire da $x_0 \in [a, b]$.

a) Si dimostri che se valgono le implicazioni $x \in [a, b], x > \alpha \Rightarrow 0 < g(g(x)) - \alpha < x - \alpha$, e $x \in [a, b], x < \alpha \Rightarrow 0 < \alpha - g(g(x)) < \alpha - x$, allora per ogni $x_0 \in [a, b]$ le sottosuccessioni x_{2k} e x_{2k+1} convergono in modo monotono ad α .

b) Si determinino i punti fissi di $g(x) = \gamma x^2 / (3x - 2)$ per $\gamma > 3/4$ e si dica per quali valori di γ la successione $\{x_k\}$ è localmente convergente ai punti fissi. Si determini l'ordine di convergenza. Si studi in particolare il caso $\gamma = 1$.

c) Per $\gamma = 1$ si determini un insieme di punti x_0 per cui la successione x_k converga a 0 e si dica se esiste un intorno di 1 per cui la successione converge a 1 per ogni scelta di x_0 in questo intorno.

Soluzione.

a) Fissiamo x_0 e sia $x_1 = g(x_0)$. Osserviamo che, se $h(x) = g(g(x))$, allora $x_{2(k+1)} = h(x_{2k})$ e $x_{2k+1} = h(x_{2k-1})$, per $k \geq 0$. Sia $x_0 > \alpha$. Allora vale $0 < h(x_0) - \alpha = x_2 - \alpha < x_0 - \alpha$ e, induttivamente su k ,

$$0 < x_{2(k+1)} - \alpha < x_{2k} - \alpha, \quad k \geq 0.$$

Dunque la successione $\{x_{2k}\}_k$ è monotona decrescente e limitata inferiormente da α , quindi convergente a un limite $\beta \geq \alpha$. In modo analogo, se $x_0 < \alpha$, allora la successione $\{x_{2k}\}_k$ è monotona crescente e limitata superiormente da α , quindi convergente a un limite $\beta \leq \alpha$. Nello stesso modo si ragiona sulla successione $\{x_{2k-1}\}_k$

Dimostriamo che $\beta = \alpha$. Supponiamo di essere nel caso $x_0 > \alpha$, dunque $\beta \geq \alpha$. Essendo $h(x)$ continua, deve essere $h(\beta) = \beta$. Se fosse $\beta > \alpha$ avrei $0 < h(\beta) - \alpha < \beta - \alpha$, assurdo perché $h(\beta) = \beta$, dunque $\beta = \alpha$. Negli altri casi si ragiona in modo analogo.

b) Si osserva che la funzione $g(x)$ è definita per $x \neq 2/3$, inoltre $g(x) \neq 2/3$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ poiché $\gamma > 3/4$. I punti fissi di $g(x)$ sono le soluzioni dell'equazione

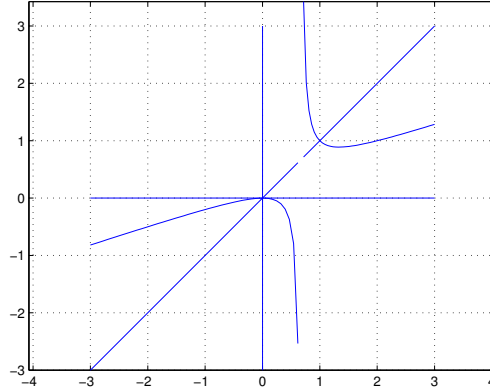


Figura 15: Esercizio 11, funzione $g(x)$, caso $\gamma = 1$

$(\gamma - 3)x^2 + 2x = 0$, dunque se $\gamma = 3$ l'unico punto fisso è $\alpha_1 = 0$, se $\gamma \neq 3$ i punti fissi sono $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_2 = 2/(3 - \gamma)$. La funzione $g(x)$ è C^∞ in un intorno dei punti fissi, e vale

$$g'(x) = \gamma x \frac{3x - 4}{(3x - 2)^2}.$$

Vale $g'(0) = 0$ e $g''(0) \neq 0$ per ogni $\gamma \neq 0$, dunque il metodo converge localmente con convergenza quadratica in un intorno di α_1 . Supponiamo ora $\gamma \neq 3$ e studiamo la convergenza in un intorno di α_2 . Si può verificare che $g'(\alpha_2) = (2\gamma - 3)/\gamma$, quindi se $|2\gamma - 3|/|\gamma| < 1$ ho convergenza locale. La condizione $|2\gamma - 3|/|\gamma| < 1$ è equivalente a $1 < \gamma < 3$; in particolare per $\gamma = 1$ ho $|2\gamma - 3|/|\gamma| = 1$ e $g'(\alpha_2) = 1$, quindi se c'è convergenza locale, questa è sublineare. Se $\gamma = 3/2$ la convergenza è superlineare.

c) Il grafico di $g(x) = \frac{x^2}{3x-2}$ è riportato nella Figura 15. Si può verificare che se $x < 0$ allora $0 < g'(x) < 1$, dunque se $x_0 < 1$ la successione $\{x_i\}_i$ converge in modo monotono a 0. Se $0 < x < 2/3$ allora $g'(x) < 0$, dunque se $0 < x_0 < 2/3$ allora $x_1 < 0$ e si applicano le considerazioni fatte nel caso $x_0 < 0$.

Per la convergenza locale a 1 si applica il risultato del punto a). Infatti basta verificare che la funzione $h(x) = g(g(x))$ è tale che $0 < h'(x) < 1$ per $x \neq 1$ in un opportuno intorno di 1.

□

Esercizio 12 Si dimostri che il polinomio $p(x) = x^3 - 3x + 1$ ha tre zeri reali. Si discuta la convergenza agli zeri di $p(x)$ delle successioni del tipo $x_{i+1} = g(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots$, con $x_0 \in \mathbb{R}$ nel caso in cui

1. $g(x) = (x^3 + 1)/3$

2. $g(x) = (3x - 1)^{1/3}$

$$3. g(x) = x - (x^3 - 3x + 1) \frac{x}{6x-3}$$

Esercizio 13 Sia $g(x) = a \log x$ con $a \neq 0$. Determinare al variare di a il numero di punti fissi di $g(x)$ e discutere la convergenza della successione definita da $x_{k+1} = g(x_k)$, $k = 0, 1, \dots$, al variare di $x_0 \in \mathbb{R}^+$. In particolare, individuare i casi di convergenza monotona, determinare l'ordine di convergenza e l'insieme dei valori di x_0 per cui la successione non è definita.

Esercizio 14 Siano $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$, $a < \alpha < b$ e $f \in C^4[a, b]$ tale che $f(\alpha) = 0$, $f'(\alpha) \neq 0$. Si consideri il metodo iterativo definito dalla funzione $g(x) = x - t(x) - \theta t(x)^2$ con $t(x) = f(x)/f'(x)$ e θ parametro reale.

- Si dimostri che per ogni $\theta \in \mathbb{R}$ il metodo iterativo è localmente convergente ad α con convergenza almeno quadratica.
- Si determini il valore di θ che massimizza l'ordine di convergenza.

Esercizio 15 È data la funzione $g(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $\alpha \in [a, b]$ tale che $g(\alpha) = \alpha$, dove $a < b$ e $\alpha \neq 0$. Sia $G(x) = g(x)(\beta + \gamma g(x)/x)$ con $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Si confrontino le proprietà di convergenza locale delle successioni $\{x_k\}$ e $\{y_k\}$ tali che $x_{k+1} = g(x_k)$, $y_{k+1} = G(y_k)$ con x_0, y_0 in un intorno di α . In particolare:

- dare condizioni su $g(x)$ affinché esistano β, γ tali che $\{y_k\}$ sia localmente convergente ad α ;
- determinare i valori di β e γ per i quali $\{y_k\}$ abbia convergenza locale più elevata possibile e dire in quali casi $\{y_k\}$ converge più velocemente di $\{x_k\}$.
- Sia $g(x) = x - f(x)/f'(x)$ dove $f(x) \in C^p$, $p \geq 2$, $0 = f(\alpha) = f'(\alpha) = \dots = f^{p-1}(\alpha)$, $f^p(\alpha) \neq 0$. Determinare la funzione $G(x)$ che massimizza l'ordine di convergenza.

Esercizio 16 Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e $g_1(x) \in C^1((-\infty, \alpha])$, $g_2(x) \in C^1([\alpha, +\infty))$, tali che $g_1(\alpha) = g_2(\alpha) = \alpha$ e $g_1'(x) \leq 0$, $g_2'(x) \leq 0$, $g_1'(\alpha) \neq g_2'(\alpha)$. Si definisca $g(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $g(x) = g_1(x)$ se $x \leq \alpha$, $g(x) = g_2(x)$ se $x \geq \alpha$, e per $x_0 \in \mathbb{R}$ si definisca $x_{k+1} = g(x_k)$, $k = 0, 1, \dots$

- Si discuta la convergenza e gli ordini di convergenza delle successioni $\{x_{2k}\}$ e $\{x_{2k+1}\}$, assumendo se necessario maggior regolarità di g_1 e di g_2 , in funzione delle derivate prime in α di g_1 e di g_2 .
- Si discuta la convergenza e gli ordini di convergenza della successione $\{x_k\}$.

Esercizio 17 Sia $p_0(x) = x - 1/2$ e si definisca la successione di polinomi $p_k(x)$ di grado $n_k = 3^k$ mediante $p_{k+1}(x) = p_k(x)^3 + x$, $k = 0, 1, \dots$

- Si dimostri che nell'intervallo $[0, 1]$ ogni polinomio $p_k(x)$ ha una sola radice reale ξ_k e che vale $\xi_{k+1} < \xi_k$.
- Si dimostri che il metodo di Newton applicato a $p_k(x)$ con punto iniziale $x_0 = 0$ genera una successione che converge in modo monotono a ξ_k con ordine 2. Si descriva il comportamento della successione ottenuta con $x_0 = \xi_{k-1}$.
- Si determini un algoritmo per il calcolo di un passo del metodo di Newton applicato al polinomio $p_k(x)$ di costo $O(k)$.

Soluzione.

a) Dimostriamo per induzione che: $p'_k(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, $p_k(0) < 0$, $p_k(\xi_{k-1}) > 0$, per $k \geq 1$. Questo implica che esiste unico $0 < \xi_k < \xi_{k-1}$ tale che $p_k(\xi_k) = 0$; in particolare ξ_k è l'unico zero in $[0, 1]$. Per $k = 1$ la tesi vale. Supponiamo valga per $k \geq 1$. È $p'_{k+1}(x) = 3p_k(x)^2 p'_k(x) + 1$, quindi $p'_{k+1}(x) > 0$; inoltre $p_{k+1}(0) = p_k(0)^3 < 0$ e $p_{k+1}(\xi_k) = \xi_k > 0$.

b) Si osserva che $p''_{k+1}(x) = 6p_k(x)p'_k(x)^2 + 3p_k(x)^2 p''_k(x)$, quindi $p''_{k+1}(x) < 0$ se $0 \leq x \leq \xi_{k+1}$. Dunque $p'_{k+1}(x)p''_{k+1}(x) < 0$ se $0 \leq x \leq \xi_{k+1}$, e questo implica la convergenza monotona se $0 \leq x_0 < \xi_{k+1}$. La convergenza è di ordine 2 perché $p'_k(\xi_k) \neq 0$ e $p''_k(\xi_k) \neq 0$.

Il metodo di Newton genera la successione

$$x_{n+1} = x_n - \frac{p_{k-1}(x_n)^3 + x_n}{3p_{k-1}(x_n)^2 p'_{k-1}(x_n) + 1} = \frac{3x_n p_{k-1}(x_n)^2 p'_{k-1}(x_n) - p_{k-1}(x_n)^3}{3p_{k-1}(x_n)^2 p'_{k-1}(x_n) + 1}$$

quindi se $x_0 = \xi_{k-1}$ allora $x_1 = 0$ e ci riconduciamo al caso $x_0 = 0$.

c) Ad ogni passo del metodo di Newton occorre calcolare $p_k(x)$ e $p'_k(x)$. Se usiamo le formula ricorsive $p_k(x) = p_{k-1}(x)^3 + x$ e $p'_k(x) = 3p_{k-1}(x)^2 p'_{k-1}(x) + 1$, il calcolo di $p_k(x)$ e di $p'_k(x)$ può essere effettuato con $o(k)$ operazioni aritmetiche. \square

Esercizio 18 Si analizzi la convergenza della successione $\{x_k\}_{k \geq 0}$ generata dal metodo di Newton applicato alla funzione $f(x) = x - 1 - 1/(x^2 - 1)$, al variare di $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq \pm 1$. In particolare,

- dopo aver dimostrato che la funzione ha tre zeri reali, per ciascuno zero α di $f(x)$ si determini l'ordine di convergenza ad α ;
- per ciascuno zero α di $f(x)$ si determini l'insieme dei valori iniziali x_0 per cui la successione $\{x_k\}_{k \geq 0}$ converge ad α in modo monotono;
- (facoltativo) per ciascuno zero α di $f(x)$ si determini l'insieme dei punti iniziali x_0 per cui la successione converge ad α .

Esercizio 19 Si analizzi la convergenza della successione $\{x_k\}_{k \geq 0}$ generata dal metodo di Newton applicato alla funzione $f(x) = (x^3 - x^2)^{1/3}$, al variare di $x_0 \in \mathbb{R}$. In particolare,

- per ciascuno zero α di $f(x)$ si dica se c'è convergenza locale e si determini l'ordine di convergenza ad α ;
- per ciascuno zero α di $f(x)$ si determini un insieme dei valori iniziali x_0 per cui la successione $\{x_k\}_{k \geq 0}$ converge ad α ; si determini inoltre un insieme dei punti iniziali x_0 per cui la convergenza avviene in modo alternato.

Soluzione.

a) La funzione $f(x)$ è continua su \mathbb{R} . I suoi zeri sono $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_2 = 1$. Vale

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x^3 - x^2)^{-2/3}(3x^2 - 2x),$$

dunque $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = +\infty$. La funzione quindi non è derivabile in 0 e 1. Il grafico è riportato in Figura 16.

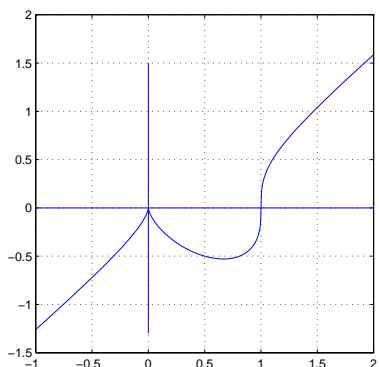


Figura 16: Esercizio 19, $f(x)$

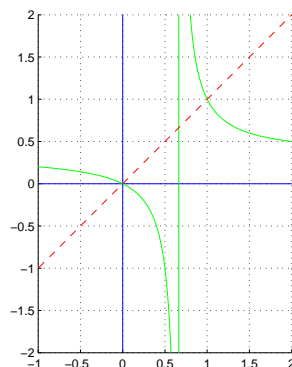


Figura 17: Esercizio 19, $g(x)$

La funzione $f(x)$ è derivabile in ogni punto diverso da 0 e 1 quindi il metodo di Newton è applicabile in ogni punto diverso da questi e da $2/3$ dove la derivata è nulla.

Il metodo di Newton è:

$$x_{n+1} = x_n - 3 \frac{(x_n^3 - x_n^2)^{1/3}}{(x_n^3 - x_n^2)^{-2/3} (3x_n^2 - 2x_n)} = x_n - 3 \frac{x_n^3 - x_n^2}{3x_n^3 - 2x_n} = \frac{x_n}{3x_n - 2}.$$

Definisco

$$g(x) = \frac{x}{3x - 2}.$$

La funzione $g(x)$ è definita in un intorno di 0 e di 1, dunque il metodo di Newton può essere definito in un intorno di 0 e di 1 mediante la funzione $g(x)$. La funzione $g(x)$ è C^∞ in un intorno di 0 e di 1, quindi possiamo applicare i teoremi di convergenza per i metodi del punto fisso. Il grafico della funzione $g(x)$ è rappresentato nella Figura 17. Vale $g'(x) = -\frac{2}{(3x-2)^2}$, quindi $g'(\alpha_1) = -1/2$ e $g'(\alpha_2) = -2$. Dunque il metodo di Newton converge localmente in un intorno di $\alpha_1 = 0$ con convergenza lineare e non converge localmente a $\alpha_2 = 1$.

b) Poiché $g'(x) < 0$ per ogni $x < 2/3$ e $\alpha_1 = 0$, se $x_0 < 0$ vale $x_1 = x_0 - \alpha_1 = g(x_0) - g(\alpha_1) = g'(\xi)x_0 > 0$, per un opportuno $0 < \xi < x_0$. Se $0 < x_0 < 2/3$, ragionando in modo analogo, si trova che $x_1 < 0$. Induttivamente, se $x_0 < 2/3$, possiamo provare che la successione x_n è alternata fin tanto che $x_n < 2/3$.

Studiamo quindi le successioni x_{2n} e x_{2n-1} . Osserviamo che $x_{2n} = h(x_{2(n-1)})$ e $x_{2n+1} = h(x_{2n-1})$, $n \geq 1$, dove $h(x) = g(g(x)) = x/(4-3x)$. Vale $h'(x) = 4/(4-3x)^2$, dunque se $x < 0$ allora $0 < h'(x) < 1/4$, se $0 < x < 2/3$ allora $0 < h'(x) < 1$.

Supponiamo ora $x_0 < 0$. Allora $x_2 = h'(\xi)x_0$ per un opportuno $x_0 < \xi < 0$, dunque $(1/4)x_0 < x_2 < 0$; induttivamente vale $(1/4)^n x_0 < x_{2n} < 0$, dunque la successione x_{2n} converge a 0. Studiamo ora la successione x_{2n-1} . Osserviamo che se $x < 0$ allora $g(x) < 2/3$, quindi $0 < x_{2n-1} < 2/3$ per ogni n . Poiché se $0 <$

$x < 2/3$ allora $1/4 < h'(x) < 1$, vale $0 < x_3 = h'(\eta)x_1 < x_1$, per un opportuno $0 < \eta < 2/3$. Induttivamente, vale $0 < x_{2n+1} < x_{2n-1}$ per $n \geq 1$. Quindi la successione x_{2n-1} , essendo limitata inferiormente e monotona decrescente, ha un limite $\beta \geq 0$ tale che $h(\beta) = \beta$. È necessariamente $\beta = 0$ perché se fosse $\beta > 0$, applicando il teorema di Lagrange si avrebbe $h(\beta) - h(0) = h'(\mu)\beta$ con μ nell'intervallo aperto $(0, \beta)$. Questo è assurdo essendo $0 < h'(\mu) < 1$. Il caso $0 < x_0 < 2/3$ è trattato in modo analogo.

Se $x_0 = 2/3$ il metodo di Newton non è definito.

Se $2/3 < x_0 < 1$ allora $x_1 - 1 = g(x_0) - g(1) = g'(\xi)(x_0 - 1)$ per un opportuno $x_0 < \xi < 1$, ma $g'(x) < -2$ se $2/3 < x < 1$, dunque $x_1 > 1$.

Se $x_0 > 4/3$ allora, dalla definizione di $g(x)$, segue che $x_1 = g(x_0) < 2/3$, dunque si applicano i ragionamenti fatti nel caso $x_0 < 2/3$ e la successione converge a 0.

Non esiste un insieme tale che per ogni x_0 in questo insieme la successione converge a 1. \square

Esercizio 20 Dato un intero $n \geq 2$, e $a_i \in \mathbb{R}$, $a_i \geq 0$, $i = 0, \dots, n$, $a_0 a_n \neq 0$, si ponga $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^i - a_0$.

a) Si dimostrino le seguenti proprietà.

– esiste unico $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, tale che $f(\alpha) = 0$;

– vale $\alpha \leq a$ dove $a = \min\{(a_0/a_i)^{1/i} : i = 1 \leq i \leq n, a_i \neq 0\}$;

– le successioni definite da $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(a)$, $x_0 \in [0, a]$ convergono in modo monotono a α .

b) Assumendo $a_i = 1/i$, $i = 1, \dots, n$, $a_0 = 1$ e $x_0 = 0$, determinare in funzione di n un valore di k tale che $\alpha - x_k < 10^{-15}$.

c) (Facoltativo) Enunciare proprietà analoghe a quelle del punto a) per il polinomio $f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i - a_n x^n$, con $a_n \neq 0$, motivando adeguatamente.

Esercizio 21 Considerare il metodo di Newton applicato alle funzioni $x^2 - a$ e $x^{-2} - a^{-1}$ con $a > 0$ e scrivere le corrispondenti funzioni di punto fisso $g_1(x)$ e $g_2(x)$.

a) Determinare i parametri β, γ in modo che l'iterazione del punto fisso definita dalla funzione $g_3(x) = \beta g_1(x) + \gamma g_2(x)$ generi successioni localmente convergenti a \sqrt{a} col massimo ordine di convergenza possibile.

b) Confrontare le tre iterazioni così ottenute in base al loro costo computazionale per approssimare \sqrt{a} con errore al più ϵ . (Condurre una analisi asintotica per $\epsilon \rightarrow 0$ valutando solo il costo delle moltiplicazioni e divisioni, escluse quelle per potenze intere di 2).

c) Studiare la convergenza monotona delle successioni generate da $g_1(x), g_2(x)$ e $g_3(x)$.

Esercizio 22 Siano $a < \alpha < b$ numeri reali, $f(x) \in C^5([a, b])$, $f(\alpha) = 0$, $f'(\alpha) \neq 0$. Si consideri il metodo iterativo $x_{k+1} = g(x_k)$ definito dalla funzione $g(x) = x - t(x)/(1 - \theta t(x)s(x))$ dove θ è un parametro reale e $t(x) = f(x)/f'(x)$, $s(x) = f''(x)/f'(x)$. Dopo aver osservato che $t'(x) = 1 - s(x)t(x)$, $t(\alpha) = 0$ e $t'(\alpha) = 1$,

- a) si dimostri che il metodo ha ordine di convergenza almeno 2 per ogni θ ;
 b) si determini un valore di θ per cui il metodo ha ordine almeno 3. Valutando il costo per passo in base al numero di valori di funzione e di derivate calcolati, si dimostri che il metodo così ottenuto è più conveniente in termini asintotici del metodo di Newton.
 c) Si determini un valore di θ per cui il metodo ha convergenza superlineare nel caso $f'(\alpha) = 0$, $f''(\alpha) \neq 0$.

Esercizio 23 Si determini al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$ il numero degli zeri reali della funzione $f(x) = x - x \log x - a$. Si analizzi al variare di a la convergenza del metodo di Newton applicato alla funzione $f(x)$ con particolare attenzione all'ordine di convergenza e alla convergenza monotona. Si determini l'insieme dei valori $x_0 \geq 0$ per cui la successione generata dal metodo di Newton converge. Facoltativo: per $a = 0$ si dimostri che il metodo di Newton applicato alla funzione $f(x)/f'(x)$ ha convergenza localmente quadratica.

Esercizio 24 Siano a_i , $i = 1, \dots, n$ numeri reali positivi e $b_1 < b_2 < \dots < b_n$. Si dimostri che

- a) la funzione razionale $f(x) = 1 + \sum_{i=1, n} a_i / (b_i - x)$ ha n zeri reali distinti $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ e si determinino intervalli $[\alpha_i, \beta_i]$, tali che $\alpha_i < x_i < \beta_i$ per $i = 1, \dots, n$ e $\beta_i \leq \alpha_i$ per $i = 1, \dots, n - 1$.
 b) il metodo di Newton applicato a $f(x)$ ha convergenza monotona in almeno uno dei due sottointervalli in cui ogni intervallo $[\alpha_i, \beta_i]$ viene diviso dallo zero in esso contenuto.
 c) la convergenza locale è sempre almeno quadratica.

Esercizio 25 Sia $g(x) = 1/x^2 + 2x - a$ e si consideri il metodo iterativo dato da $x_{k+1} = g(x_k)$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

- a) Al variare di $a \in \mathbb{R}$ studiare il numero di punti fissi di $g(x)$ e la convergenza locale per ciascun punto fisso individuando se esistono casi di convergenza superlineare, sublineare e monotona.
 b) Per $a = 2$ e per ogni punto fisso $\alpha > 0$, determinare gli insiemi dei punti $x_0 > 0$ a partire dai quali le successioni generate convergono ad α e l'insieme dei punti $x_0 > 0$ per i quali non c'è convergenza.
 c) Per $a = 2$ e $x_0 > 1$, si dimostri che $x_{k+1} - 1 < 3(x_k - 1)^2$ e si determini il numero di passi sufficienti ad approssimare il punto fisso $\alpha = 1$ con errore al più 2^{-52} se $x_0 = 13/10$.

Soluzione

a) Cerchiamo i punti fissi di $g(x)$. I punti fissi di $g(x)$ sono gli zeri della funzione $f(x) = 1/x^2 + x - a$. Tale funzione ha un minimo locale in $\bar{x} = 2^{1/3}$ e vale $f(\bar{x}) = 2^{-2/3} + 2^{1/3} - a$. Poniamo $a^* = 2^{-2/3} + 2^{1/3}$. Dunque, studiando la funzione, troviamo che:

- Se $a < a^*$, $f(x)$ ha uno zero $\alpha_1 < 0$;
- se $a = a^*$, $f(x)$ ha uno zero $\alpha_1 < 0$ e uno zero doppio $\alpha_2 = 2^{1/3}$;

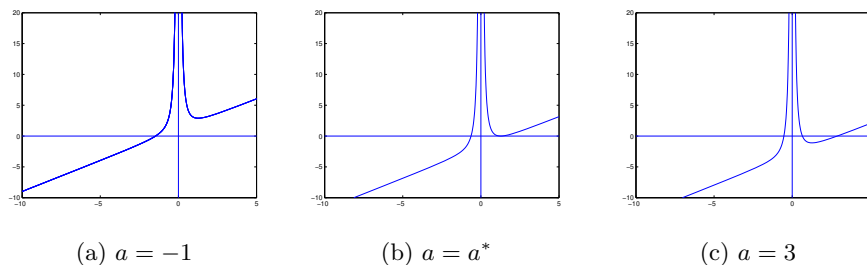


Figura 18: Esercizio 25, grafico di $f(x)$

- se $a > a^*$, $f(x)$ ha uno zero $\alpha_1 < 0$ e due zeri positivi, $0 < \alpha_2 < 2^{1/3} < \alpha_3$.

Il grafico della funzione $f(x)$ per alcuni valori di a è riportato in Figura 18.

La funzione $g(x)$ è C^1 in ogni intorno di ciascun punto fisso a vale $g'(x) = 2(1 - 1/x^3)$. In particolare $g'(\alpha_1) > 2$ perché $\alpha_1 < 0$, dunque non c'è convergenza locale in un intorno di α_1 , per ogni valore di a .

Consideriamo il caso $a = a^*$ e studiamo la convergenza in un intorno di $\alpha_2 = 2^{1/3}$. Osserviamo che:

$$\begin{aligned}
 g'(x) &< -1 && \text{se } 0 < x < (2/3)^{1/3} \\
 -1 &\leq g'(x) < 0 && \text{se } (2/3)^{1/3} \leq x < 1 \\
 g(x) &= 0 && \text{se } x = 1 \\
 0 &< g'(x) \leq 1 && \text{se } 1 < x \leq 2^{1/3} \\
 g'(x) &> 1 && \text{se } x > 2^{1/3}.
 \end{aligned}$$

Vale $g'(\alpha_2) = 1$ e $0 < g'(x) < 1$ se $1 < x < \alpha_2$. Quindi, se $1 \leq x_0 < \alpha_2$, la successione $\{x_k\}$ è tale che $1 < x_k < x_{k+1} < \alpha$, $k = 0, 1, \dots$. Dunque la successione converge perché crescente e limitata, e la convergenza è sublineare. Se invece $x_0 > \alpha_2$ non ho convergenza perché $g'(x) > 1$ se $x > \alpha_2$.

Consideriamo ora il caso $a > a^*$. Se $\alpha_2 > (2/3)^{1/3}$ allora $|g'(\alpha_2)| < 1$, c'è convergenza locale. La convergenza è superlineare se $\alpha_2 = 1$, che è vero se $a = 2$. La condizione $\alpha_2 > (2/3)^{1/3}$ è verificata quando $a < \bar{a} = (2/3)^{-2/3} + (2/3)^{1/3}$. Se $a > \bar{a}$, allora $|g'(\alpha_2)| > 1$ e non c'è convergenza locale.

b) Nel caso $a = 2$ vale $\alpha_2 = 1$, $g'(\alpha_2) = 0$, $g''(\alpha_2) \neq 0$. Quindi la convergenza è di ordine 2. Per le proprietà di segno della derivata di $g(x)$, se $\alpha_2 < x_0 \leq 2^{1/3}$, allora la convergenza è monotona decrescente. Se $(2/3)^{1/3} \leq x_0 < \alpha_2$, allora $\alpha_2 < x_1 \leq 2^{1/3}$ e la convergenza monotona dal secondo passo in poi. In α_3 non c'è convergenza locale perché $g'(\alpha_3) > 1$.

c) Si osserva che $x_{i+1} - 1 = \frac{2x_i + 1}{x_i^2} (x_i - 1)^2$. Poiché, se $x_0 > 1$ allora $x_i > 1$ per $i = 1, 2, \dots$ e poiché $\frac{2x+1}{x^2} < 3$ se $x > 1$, allora $x_{i+1} - 1 < 3(x_i - 1)^2$. Ragionando per induzione vale $x_i - 1 < 3^{2^i - 1} (x_0 - 1)^{2^i}$, dunque basta trovare i tale che $(3(x_0 - 1))^{2^i} < 2^{-52}$. Essendo $x_0 = 13/10$ si ottiene $i > \log_2(52/\log_2(10/9)) \approx 8.4183$. Dunque sono sufficienti 9 iterazioni. \square

Esercizio 26 Per $\gamma > 0$ si consideri la funzione $f(x)$ definita da $f(0) = 0$, $f(x) = x - \gamma x / \log |x|$, se $x \neq 0, 1, -1$. Dopo aver determinato il numero di zeri di $f(x)$, si studi la convergenza locale del metodo di Newton applicato a $f(x)$ per ciascuno degli zeri, discutendone l'ordine di convergenza. Si studi per quali valori di x_0 la successione $\{x_k\}$ generata dal metodo di Newton converge in modo monotono a uno zero di $f(x)$; (facoltativo) dire per quali valori di $x_0 \neq \pm 1$ la successione non è definita o non converge.

Esercizio 27 Sia $g(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile con continuità e $\alpha \in (a, b)$ tale che $g(\alpha) = \alpha$.

a) Sapendo che esiste un $x_0 \in [a, b]$ per cui la successione $x_{k+1} = g(x_k)$, $k = 0, 1, \dots$, è tale che $x_k \in (a, b)$ per $k \geq 0$ e converge ad α in modo sublineare e alternato (cioè $x_k > \alpha \Rightarrow x_{k+1} < \alpha$ e $x_k < \alpha \Rightarrow x_{k+1} > \alpha$), si dimostri che $g'(\alpha) = -1$.

b) Si dimostri che le successioni definite da $z_{k+1} = (z_k + g(z_k))/2$ convergono localmente ad α in modo superlineare e che la convergenza è almeno quadratica se $g \in C^2[a, b]$.

c) Sia $n \geq 2$ intero e sia $g \in C^2[a, b]$ con $g'(\alpha) = -1$, $g(\alpha) = \alpha$. Definiamo $G(x) = x + \sum_{i=1}^n \theta_i g^{[i]}(x)$, dove $\theta_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ e $g^{[i]}(x) = g(g(\dots g(x)\dots))$ i -volte. Si dimostri che se $\alpha \neq 0$ e $g''(\alpha) \neq 0$ non esistono costanti $\theta_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ tali che le successioni generate da $z_{k+1} = G(z_k)$ convergano localmente ad α con ordine maggiore di 2.

Soluzione.

a) Supponiamo sia $x_k > \alpha$. Poiché $x_{k+1} - \alpha < 0$ e $x_{k+1} - \alpha = g'(\xi_k)(x_k - \alpha)$ per un opportuno ξ_k compreso tra x_k e α , allora $g'(\xi_k) < 0$. In modo analogo si ragiona se $x_k < \alpha$. Inoltre, essendo la successione $\{x_k\}_k$ convergente a α ed essendo $g(x)$ derivabile con continuità, anche la successione $\{\xi_k\}_k$ converge ad α e si ottiene $\lim_k g'(\xi_k) = g'(\alpha) \leq 0$. Poiché la convergenza è sublineare, si ha $\lim_k \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|} = 1$. D'altra parte, essendo $g(x)$ derivabile con continuità,

$\lim_k \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|} = |g'(\alpha)|$, dunque $g'(\alpha) = -1$.

b) Sia $h(x) = (x + g(x))/2$. Poiché $h \in C^2[a, b]$, se dimostriamo che $h'(\alpha) = 0$ allora la convergenza è almeno quadratica; è quadratica se $h''(\alpha) \neq 0$. Vale $h'(x) = (1 + g'(x))/2$, dunque $h'(\alpha) = 0$. Inoltre $h''(x) = g''(x)/2$, dunque la convergenza è quadratica se $g''(\alpha) \neq 0$.

c) La condizione $G(\alpha) = \alpha$ diventa $\alpha(1 + \sum_{i=1}^n \theta_i) = \alpha$. Dunque se $\alpha \neq 0$ deve essere $\sum_{i=1}^n \theta_i = 0$. Calcoliamo $G'(x)$. Poiché $g^{[i]}(x) = g(g^{[i-1]}(x))$, $i \geq 1$, vale $g^{[i]'}(x) = g'(g^{[i-1]}(x))g^{[i-1]'}(x)$. Usando questa proprietà possiamo dimostrare per induzione che $g^{[i]'}(\alpha) = (-1)^i$. Dunque $G'(\alpha) = 1 + \sum_{i=1}^n (-1)^i \theta_i$ e la condizione di convergenza superlineare diventa $\sum_{i=1}^n (-1)^i \theta_i = -1$. Quindi esistono θ_i , $i = 1, \dots, n$, tali che la convergenza è superlineare. In particolare, se $\alpha \neq 0$, scelti arbitrariamente $\theta_3, \dots, \theta_n$, le costanti θ_1 e θ_2 risolvono il sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sum_{i=3}^n \theta_i \\ -1 - \sum_{i=3}^n (-1)^i \theta_i \end{bmatrix}.$$

Calcoliamo ora $G''(x)$. Osserviamo che $g^{[i]''}(x) = g''(g^{[i-1]}(x))g^{[i-1]'}(x)^2 + g'(g^{[i-1]}(x))g^{[i-1]''}(x)$. Usando questa ricorsione, possiamo provare per induzione che $g^{[i]''}(\alpha) = \frac{1}{2}(1-(-1)^i)g''(\alpha)$. Dunque $G''(\alpha) = \frac{1}{2}g''(\alpha) \sum_{i=1}^n (1-(-1)^i)\theta_i$ e, se $g''(\alpha) = 0$, la convergenza è di ordine maggiore di due. Se $g''(\alpha) \neq 0$ e $\alpha \neq 0$, poiché $\sum_{i=1}^n \theta_i = 0$ e $\sum_{i=1}^n (-1)^i \theta_i = -1$, allora la convergenza è quadratica. Se $g''(\alpha) \neq 0$, $\alpha = 0$ e $n \geq 3$, posso trovare costanti θ_i tali che $\sum_{i=1}^n \theta_i = 0$ e $\sum_{i=1}^n (-1)^i \theta_i = 0$, dunque la convergenza è di ordine maggiore di due. \square

Esercizio 28 Sia $\gamma \geq 0$; determinare il numero di punti fissi della funzione $g(x)$ definita da $g(0) = 0$, $g(x) = x(1 - \gamma) + x/\log|x|$, per $x \neq 0, 1, -1$, e studiare la convergenza locale della successione $x_{k+1} = g(x_k)$ per $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq 1, -1$. In particolare, individuare i casi di convergenza monotona, lineare, superlineare e sublineare studiando l'ordine di convergenza.

Esercizio 29 Si studi al variare di $a \in \mathbb{R}$ il numero di punti fissi non negativi della funzione $g(x) = \sqrt{x} - a/\sqrt{x}$ e la convergenza locale delle successioni definite da $x_{k+1} = g(x_k)$ per $x_0 \geq 0$, inclusi l'ordine di convergenza e le proprietà di monotonia.

Esercizio 30 Sia $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funzione continua ed $\alpha \in \mathbb{R}$ un suo punto fisso, cioè tale che $\alpha = g(\alpha)$. Si assuma inoltre che g sia derivabile con continuità per $x \neq \alpha$ e che esistano costanti $0 \leq a \leq 1 < b$ tali che $-b \leq g'(x) \leq -1$ per $x < \alpha$, $-a \leq g'(x) \leq 0$ per $x > \alpha$.

- Si dimostri che α è l'unico punto fisso di g .
- Per $x_0 \in \mathbb{R}$ si definisca $x_{k+1} = g(x_k)$, $k \geq 0$. Si diano condizioni su a, b affinché le successioni $\{x_{2k}\}$, $\{x_{2k+1}\}$ e $\{x_k\}$ siano convergenti per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$.
- Assumendo che $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} g'(x) = \theta$, $\lim_{x \rightarrow \alpha^-} g'(x) = \sigma$, $\theta \neq \sigma$, sotto le condizioni trovate al punto b) si studi la velocità di convergenza delle successioni $\{x_k\}$, $\{x_{2k}\}$, $\{x_{2k+1}\}$.

Esercizio 31 Sia $n > 1$ un intero e a_i , $i = 1, 2, \dots, n$ numeri reali positivi. Si consideri l'iterazione $x_{k+1} = g(x_k)$, con $x_0 > 0$, dove

$$g(x) = \begin{cases} x - \theta x \sum_{i=1}^n \log(x/a_i), & \text{se } x > 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

e $\theta \neq 0$.

- Si determinino i punti fissi di $g(x)$ e si studi la convergenza locale a tali punti fissi al variare di θ .
- Per ogni punto fisso α , dopo aver determinato il valore di θ che massimizza la velocità di convergenza ad α si dia una limitazione superiore a $|x_k - \alpha|$ nelle ipotesi $1 < a_i < 3/2$, $i = 1, \dots, n$ e $x_0 = 1$.

Esercizio 32 Si vuole approssimare il reciproco di un numero reale $a > 0$, eseguendo solamente moltiplicazioni, addizioni e sottrazioni. Si consideri allora la classe di iterazioni del punto fisso $x_{k+1} = g(x_k)$, dove

$$g(x) = x + (1 - ax)(\beta x + \gamma ax^2), \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

a) Si determinino i parametri $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, indipendenti da a , in modo da ottenere il metodo iterativo con l'ordine di convergenza più alto possibile.

b) Si mettano in relazione i residui $1 - ax_k$ e $1 - ax_{k+1}$. Si confronti l'efficienza del metodo ottenuto con quella del metodo dato da $\hat{g}(x) = 2x - ax^2$. In particolare, se $1/2 \leq a < 1$ e $x_0 = 1$, si valuti il numero di passi k e il numero totale di operazioni aritmetiche affinché $|x_k - a^{-1}|/a^{-1} < 2^{-52}$.

c) Si individui una espressione generale di $g(x)$ che dia un metodo a convergenza di ordine q arbitrario e se ne valuti l'efficienza.

Esercizio 33 Sia $\varphi(x) \in C^2([a, b])$ e $\alpha \in [a, b]$ tale che $\varphi(\alpha) = 0$, dove $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e $\varphi'(x) \neq 0$ in $[a, b]$.

a) Si dimostri che per ogni $x \in [a, b]$ esiste $\xi \in (a, b)$ tale che $\varphi(x)/\varphi'(x) = x - \alpha - (x - \alpha)^2 \varphi''(\xi)/(2\varphi'(x))$.

b) Si studi la convergenza locale del metodo di Newton applicato alla funzione $f(x) = \varphi(x) \log |\varphi(x)|$ per $x \neq \alpha$, $f(\alpha) = 0$, e applicato alla funzione $f(x) = \varphi(x)(\log(1 + \varphi(x)))$.

c) Se $m(x)$ è una funzione continua per cui esiste $\gamma > 0$ tale che $|m(x) - m(y)| \leq \gamma|x - y|$, per $x, y \in [a, b]$ e inoltre $m(\alpha) = 1$, si dimostri la convergenza almeno quadratica dell'iterazione $x_{k+1} = g(x_k)$ definita da $g(x) = x - m(x)\varphi(x)/\varphi'(x)$.

Esercizio 34 Sia $f(x) = |x|^a - 2x$, dove $a \in (0, 1)$. Determinare il numero di zeri reali di $f(x)$ e, per ciascuno zero, studiare la convergenza locale del metodo di Newton per l'approssimazione di tale zero, in particolare si determini l'ordine di convergenza e l'eventuale convergenza monotona.

Determinare l'insieme dei punti iniziali per cui la successione generata dal metodo di Newton è convergente.

Esercizio 35 Per approssimare la radice p -esima del reciproco di un numero reale $a > 0$ senza eseguire divisioni si consideri la famiglia di funzioni $g(x) = x(1 + \beta R(x) + \gamma R^2(x))$, $R(x) = 1 - ax^p$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, e le successioni generate da $x_{k+1} = g(x_k)$ a partire da $x_0 \in \mathbb{R}$.

Si individui nella classe di metodi quello di massimo ordine di convergenza e quello di massima efficienza computazionale.

Come si può generalizzare la classe di algoritmi per avere ordine di convergenza arbitrario q e come si può estendere l'analisi fatta?

Esercizio 36 Si determinino al variare di $a \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione $\log(x^2 + x + 1) - x = a$ e si descriva un metodo per approssimare tali soluzioni che abbia convergenza superlineare individuando i casi di convergenza monotona ed alternata.

Esercizio 37 Al variare di $c \in \mathbb{R}$ si determini il numero di punti fissi della funzione $g(x)$ definita da

$$g(x) = x^2 - \log x + c$$

e si studi la convergenza locale delle successioni generate da $x_{k+1} = g(x_k)$ a partire da $x_0 \in \mathbb{R}$. Si confronti con il metodo di Newton applicato all'equazione $x - g(x) = 0$.

Esercizio 38 Sia $g(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2 e $\alpha \in [a, b]$ tale che $\alpha = g(\alpha)$. Si supponga di conoscere $\theta = g'(\alpha)$. Si determinino i valori di ξ_0, ξ_1 in modo che il metodo iterativo definito da $x_{k+1} = G(x_k)$ dove $G(x) = \xi_0 x + \xi_1 g(x)$ sia localmente convergente ed α ed abbia il massimo ordine di convergenza locale. Si discuta sotto quali condizioni il nuovo metodo così ottenuto è più efficiente del metodo dato dalla funzione $g(x)$.

Se $g \in C^\infty[a, b]$ e $\theta = 0$ dire se esiste un $n > 1$ per cui nella classe di metodi definiti da $G(x) = \xi_0 x + \xi_1 g(x) + \xi_2 g(g(x)) + \dots + \xi_n g(g(\dots g(x)\dots))$ esiste un metodo più efficiente del metodo originale.

Esercizio 39 Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ e $g_1(x) \in C^1([\alpha, +\infty[)$, $g_2(x) \in C^1(]-\infty, \alpha])$ tali che $g_1(\alpha) = g_2(\alpha) = \alpha$, $-\theta < g_1'(x) \leq 0$ per $x \geq \alpha$, $-\sigma < g_2'(x) \leq 0$ per $x \leq \alpha$, dove $\sigma, \theta > 0$, $\theta\sigma = \lambda < 1$. Si definisca

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x) & \text{se } x \geq \alpha \\ g_2(x) & \text{se } x < \alpha. \end{cases}$$

Si dimostri che

- α è l'unico punto fisso di $g(x)$;
- per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ la successione generata da $x_{k+1} = g(x_k)$, $k = 0, 1, \dots$, converge ad α .
- Si studi il tipo di convergenza (monotona o alternata), l'ordine di convergenza e il fattore di convergenza delle successioni $\{x_k\}$, $\{x_{2k}\}$, $\{x_{2k+1}\}$; in particolare si tratti il caso in cui $g_1'(\alpha) \neq g_2'(\alpha)$.
- Sia $\lambda_k = |x_k - \alpha|/|x_{k-1} - \alpha|$ la riduzione dell'errore al passo k , e si definisca φ_k la media geometrica delle riduzioni degli errori nei primi k passi. Si dimostri che, anche se $g_1'(\alpha) \neq g_2'(\alpha)$ il limite $\lim_k \varphi_k$ esiste ed è uguale a $\sqrt{g_1'(\alpha)g_2'(\alpha)}$.

Esercizio 40 Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e $g(x) = ax + b/x$. Si diano condizioni sufficienti su a, b affinché $g(x)$ abbia almeno un punto fisso $\alpha \in \mathbb{R}$ ed esista un intorno $\mathcal{I} = [\alpha - \rho, \alpha + \rho]$, $\rho > 0$, per cui la successione definita da $x_{k+1} = g(x_k)$ sia convergente per ogni $x_0 \in \mathcal{I}$.

Si diano condizioni sufficienti su a, b affinché la convergenza sia localmente monotona e localmente quadratica.

Esercizio 41 Si supponga di avere a disposizione un metodo per il calcolo del valore di e^x dato x . Per poter approssimare il logaritmo naturale $\alpha = \log(a)$ di un numero a tale che $1 < a < e$, si considerino le iterazioni del tipo $x_{k+1} = g(x_k)$, $x_0 \in [0, 1]$, dove $g(x)$ è una delle seguenti funzioni

$$g_1(x) = x + 1 - \frac{1}{a}e^x, \quad g_2(x) = x + \frac{3}{2} - \frac{2}{a}e^x + \frac{1}{2a^2}e^{2x}$$

a) Si studi la convergenza locale delle due successioni generate in questo modo con attenzione all'ordine e alla monotonia, e si determini quale delle due è più efficiente dal punto di vista computazionale supponendo che il calcolo dell'esponenziale costi l'equivalente di 20 operazioni aritmetiche.

b) Si supponga che il valore effettivamente calcolato di e^x sia affetto da un errore minore o uguale a δ mentre le altre operazioni aritmetiche sono svolte in modo esatto. Si determini una limitazione al primo ordine in δ degli errori di approssimazione forniti dai due metodi.

c) Fra tutti i metodi definiti da $g(x) = x + p(e^x)$, dove $p(t)$ è un polinomio di grado al più m , determinare quello che garantisce il massimo ordine di convergenza e quello che dà la massima efficienza.

Esercizio 42 È assegnato un intero $n > 1$ e una funzione $f(x) \in C^\infty[a, b]$, di cui sappiamo che $f(\alpha) = 0$ per un certo $\alpha \in [a, b]$ e che $f^{(i)}(\alpha) = 1$ per $i = 1, \dots, 2n$. Vogliamo individuare un metodo efficiente per approssimare α . Per questo consideriamo la classe di metodi iterativi definiti da

$$g(x) = x - a_0 f(x) - a_1 f'(x) - \dots - a_n f^{(n)}(x)$$

ottenuta al variare dei parametri a_1, \dots, a_n in \mathbb{R} .

a) Si determini in questa classe il sottoinsieme dei metodi che convergono localmente ad α col più alto ordine di convergenza. Assumendo che il calcolo di ciascuna $f^{(i)}(x)$ abbia un costo di 10 operazioni aritmetiche, qual è il metodo di massima efficienza computazionale, in relazione all'ordine di convergenza e al costo per passo?

b) Dire se si possono ottenere ordini di convergenza più alti nella classe definita da

$$g(x) = x - f(x)(a_0 + a_1 f'(x) + a_2 f''(x) + \dots + a_n f^{(n)}(x))$$

Esercizio 43 Sia $g(x) \in C^1([0, 1])$ tale che $|g'(x)| \leq 1/2$ per $x \in [0, 1]$. Sia $\alpha \in [0, 1]$ un punto fisso di $g(x)$.

a) Sapendo che $1/3 \leq \alpha \leq 2/3$ si dimostri che la successione $x_{k+1} = g(x_k)$ converge ad α per ogni scelta del punto iniziale $x_0 \in [0, 1]$.

b) Sapendo che $-\lambda \leq g'(x) \leq \lambda$, con $0 < \lambda < 1$, determinare $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1]$ tali che se $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ la successione x_k converge per ogni $x_0 \in [0, 1]$.

Esercizio 44 Si studi la convergenza locale in un intorno di 0 del metodo di Newton applicato alle seguenti funzioni.

$$\begin{aligned} a) \quad f(x) &= \begin{cases} -x^3 + x^2 + x & \text{se } x \geq 0 \\ x^4 + x^2 + x & \text{se } x < 0 \end{cases} & b) \quad f(x) &= \begin{cases} -x^3 + x & \text{se } x \geq 0 \\ x^4 + x & \text{se } x < 0 \end{cases} \\ c) \quad f(x) &= \begin{cases} -x^3 + x & \text{se } x \geq 0 \\ (-x)^{1/3} & \text{se } x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Nel caso l'ordine di convergenza non sia definibile, si determini un valore di p per cui la convergenza è di *ordine almeno* p , oppure, qualora sia possibile, si determini l'ordine di convergenza delle due sottosuccessioni formate rispettivamente dalle componenti di indice pari e di indice dispari.

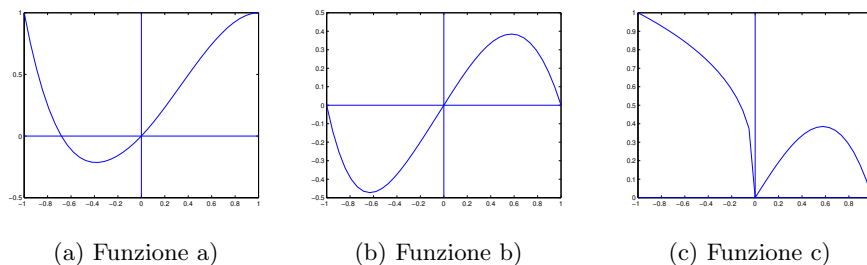


Figura 19: Esercizio 44, grafico di $f(x)$

d) Sia $\{x_k\}$ la successione generata a partire da x_0 da $x_{k+1} = g(x_k)$, con $g(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funzione continua. Se $x_i = -1/i$ per i dispari e $x_i = 1/2^i$ per i pari, si dimostri che $g(x)$ non è derivabile in 0.

Soluzione. I grafici della funzione $f(x)$ sono riportati in Figura 19. Denotiamo con $f_1(x)$ e $f_2(x)$ rispettivamente l'espressione di $f(x)$ per $x \geq 0$ e per $x < 0$.

a) Vale $f'_1(x) = -3x^2 + 2x + 1$, $f''_1(x) = -6x + 2$, $f'_2(x) = 4x^3 + 2x + 1$, $f''_2(x) = 12x + 2$. Troviamo che $f(x)$ è di classe C^2 in un intorno di zero e $f'(0) = 1$, $f''(0) = 2$. Dunque, applicando i risultati di convergenza del metodo di Newton, il metodo ha convergenza locale di ordine 2. Osserviamo anche che $f'_1(x)f''_1(x) > 0$ se $0 < x < 1/3$. Quindi, per il Teorema 8, se $0 < x_0 < 1/3$, la convergenza è monotona decrescente. Osserviamo che se $x_0 < 0$ è sufficientemente vicino a zero, allora $f_2(x) < 0$ e $f''_2(x) > 0$. Quindi, essendo $g'_2(x) = f_2(x)f''_2(x)/(f'_2(x))^2$, allora $x_1 > 0$ e la convergenza è monotona decrescente dal secondo passo in poi.

b) Vale $f'_1(x) = -3x^2 + 1$, $f''_1(x) = -6x$, $f'_2(x) = 4x^3 + 1$, $f''_2(x) = 12x$. Troviamo che $f(x)$ è di classe C^2 in un intorno di zero e $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$. Dunque, applicando i risultati di convergenza del metodo di Newton, il metodo ha convergenza locale di ordine almeno 2. Poiché f non è di classe C^3 non posso usare la teoria per determinare l'ordine di convergenza.

Il metodo di Newton applicato alla funzione $f_1(x)$ è definito dalla funzione $g_1(x) = -2x^3/(-3x^2 + 1)$, mentre il metodo di Newton applicato alla funzione $f_2(x)$ è definito dalla funzione $g_2(x) = 3x^4/(4x^3 + 1)$. Si osserva che se $x_0 > 0$ ed è sufficientemente vicino a zero, allora $x_1 = g_1(x_0) < 0$; se $x_0 < 0$ ed è sufficientemente vicino a zero, allora $x_1 = g_2(x_0) > 0$. Dunque la successione è alternata. Vogliamo studiare l'ordine di convergenza. Si osserva che $\lim_{x \rightarrow 0^+} |g_1(x)|/|x^3| = 2$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} |g_2(x)|/|x^4| = 3$, quindi l'ordine di convergenza non è definibile poiché non esiste un numero $p > 1$ tale che $\lim_{i \rightarrow \infty} |x_{i+1}|/|x_i|^p = \theta \neq 0$. Possiamo però definire l'ordine di convergenza delle sottosuccessioni di indici pari e dispari. Sia $x_0 > 0$ sufficientemente vicino a 0, allora $x_{2(i+1)} = g_2(g_1(x_{2i}))$ e $x_{2i+1} = g_1(g_2(x_{2i-1}))$. Troviamo che $g_2(g_1(x)) = 48x^{12}/((3x^2 - 1)(32x^9 + 27x^6 - 27x^4 + 9x^2 - 1))$ e $g_1(g_2(x)) = (54x^{12})/((4x^3 + 1)(27x^8 - 16x^6 - 8x^3 - 1))$, quindi $\lim_{i \rightarrow \infty} |x_{2(i+1)}|/|x_{2i}|^{12} = 48$,

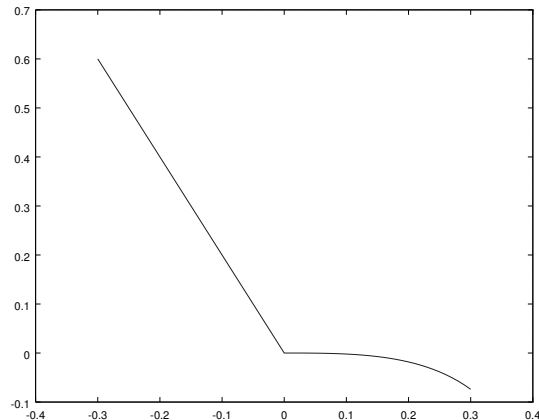


Figura 20: Esercizio 44: funzione $g(x)$ del punto c)

$\lim_{i \rightarrow \infty} |x_{2i+1}|/|x_{2i-1}|^{12} = 54$, e le sottosuccessioni di indici pari e dispari hanno ordine di convergenza 12. In modo analogo si ragiona se $x_0 < 0$.

c) Vale $f'_1(x) = -3x^2 + 1$, $f''_1(x) = -6x$, $f'_2(x) = -1/3(-x)^{-2/3}$, dunque $f(x)$ non è di classe C^1 in un intorno di zero. Troviamo che il metodo di Newton applicato alla funzione $f_1(x)$ è definito dalla funzione $g_1(x) = -2x^3/(-3x^2 + 1)$, mentre il metodo di Newton applicato alla funzione $f_2(x)$ è definito dalla funzione $g_2(x) = -2x$. La funzione $g(x)$ definita come $g_1(x)$ se $x \geq 0$, $g_2(x)$ se $x < 0$, è continua ma non di classe C^1 in un intorno di zero (si veda la figura 20).

Osserviamo che se $x_0 > 0$ ed è abbastanza vicino a zero, allora $x_1 = g_1(x_0) < 0$; se $x_0 < 0$ allora $x_1 = g_2(x_0) > 0$. Studiamo quindi la convergenza locale delle sottosuccessioni di indice pari e dispari. Le funzioni $G(x) = g_2(g_1(x)) = 4x^3/(-3x^2 + 1)$ e $H(x) = g_1(g_2(x)) = 16x^3/(1 - 12x^2)$ sono di classe C^1 in un intorno di 0. Vale $G'(0) = 0$ e $H'(0) = 0$, quindi se x_0 è sufficientemente vicino a zero, le sottosuccessioni di indici pari e dispari convergono in modo superlineare. L'ordine di convergenza è 3 poiché $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|G(x)|}{|x|^3} = 4 \neq 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|H(x)|}{|x|^3} = 16 \neq 0$.

d) Se $g(x)$ fosse di classe C^1 in un intorno di 0 allora per il teorema di Lagrange sarebbe $x_{i+1} = x_i g'(\xi_i)$ per ξ_i compreso nell'intervallo aperto di estremi x_i e 0. Poiché $\lim x_i = 0$ si avrebbe $\lim x_{i+1}/x_i = \lim g'(\xi_i) = g'(0)$. Quindi, se i è dispari allora $x_{i+1}/x_i = -i/2^{i+1}$ mentre se i è pari $x_{i+1}/x_i = -2^i/(i+1)$. Per cui il limite di x_{i+1}/x_i non può esistere.

Esercizio 45 Siano $g_i(x)$, per $i \in \mathbb{N}$, funzioni di classe C^1 sull'intervallo $\mathcal{I} = [\alpha - \rho, \alpha + \rho]$ tali che $g_i(\alpha) = \alpha$ per $i \in \mathbb{N}$. Si assuma inoltre che $|g'_i(x)| \leq \lambda_i < 1$ per $i \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathcal{I}$. Si dimostri che

a) se $\lambda_i \leq \lambda < 1$ per $i \in \mathbb{N}$ allora per ogni $x_0 \in \mathcal{I}$ la successione generata da

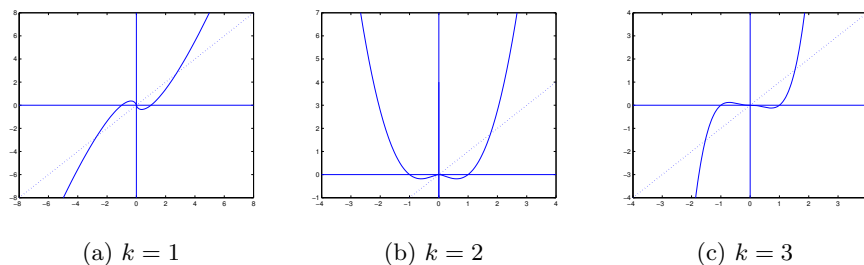


Figura 21: Esercizio 46, grafico di $f(x)$

$x_{i+1} = g_i(x_i)$ è tale che $x_i \in \mathcal{I}$ e $\lim_i x_i = \alpha$;

b) se $\lim_i \lambda_i = \mu < 1$ allora per ogni $x_0 \in \mathcal{I}$ la successione generata da $x_{i+1} = g_i(x_i)$ è tale che $x_i \in \mathcal{I}$ e $\lim_i x_i = \alpha$.

Cosa si può dire della velocità di convergenza della successione x_i ?

Esercizio 46 Sia $k \geq 1$ un intero e si consideri la funzione $f(x)$ definita da $f(0) = 0$, $f(x) = x^k \log|x|$, se $x \neq 0$. Determinare il numero dei punti fissi di $f(x)$ e studiare la convergenza locale della successione $x_{i+1} = f(x_i)$ per x_0 in un intorno di ciascun punto fisso. Cosa si può dire della convergenza locale in un intorno di 0 delle successioni generate dal metodo di Newton applicato a $f(x)$?

Soluzione. Cerchiamo i punti fissi di $f(x)$. Si osserva innanzitutto che se k è pari la funzione $f(x)$ è pari, se k è dispari allora $f(x)$ è dispari. Il grafico della funzione $f(x)$ è riportato in Figura 21. Per ogni valore di k , un punto fisso è $\alpha_1 = 0$. Se $k \geq 2$ è pari, $f(x)$ ha un punto fisso $\alpha_2 > 1$; se $k \geq 1$ è dispari, $f(x)$ ha un punto fisso $\alpha_2 > 1$ e un punto fisso $\alpha_3 = -\alpha_2$.

Studiamo la convergenza locale. Consideriamo il caso $k = 1$. Troviamo che $f'(x) = \log(|x|) + 1$ se $x \neq 0$. Quindi, poiché $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -\infty$, la funzione non è derivabile in 0. Inoltre, per ϵ sufficientemente piccolo si ha che $|x_0| < \epsilon$ implica $|x_1| > |x_0|$ per cui non ci può essere convergenza locale in un intorno di 0. Negli altri due punti fissi vale $f'(x) = 2 > 1$ per cui non c'è convergenza locale.

Consideriamo ora il caso $k \geq 2$. Troviamo che $f'(x) = x^{k-1}(k \log(|x|) + 1)$ se $x \neq 0$; inoltre si può verificare che $f'(x)$ esiste ed è continua in 0 e $f'(0) = 0$. Questo implica che c'è convergenza locale superlineare in un intorno di 0. Per studiare l'ordine di convergenza applichiamo la definizione: osserviamo che

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{|x_{i+1}|}{|x_i^p|} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{|x_i^k \log(|x_i|)|}{|x_i^p|} = \begin{cases} 0 & \text{se } p < k \\ +\infty & \text{se } p \geq k \end{cases}$$

quindi l'ordine di convergenza non è definito, ma la convergenza è superlineare di ordine almeno $k - \epsilon$ per ogni $0 < \epsilon < k$ nel senso che esiste una costante $\gamma > 0$ tale che $|x_{i+1}| \leq \gamma |x_i|^{k-\epsilon}$.

Per quanto riguarda i punti fissi α_2 e α_3 (se k è dispari), poiché $f'(\alpha_2) > 1$ e $f'(\alpha_3) > 1$, non c'è convergenza locale in un intorno di ciascuno.

Il metodo di Newton applicato alla funzione $f(x)$, per $x \neq 0$, è definito dalla funzione

$$g(x) = x - \frac{x^k \log(|x|)}{x^{k-1}(k \log(|x|) + 1)} = \frac{x((k-1) \log(|x|) + 1)}{k \log(|x|) + 1}.$$

Poiché $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 0$, possiamo estendere $g(x)$ nel punto 0 definendo $g(0) = 0$. La funzione $g(x)$ ha derivata

$$g'(x) = \frac{1}{k(k \log(|x|) + 1)} - \frac{1}{(k \log(|x|) + 1)^2} + \frac{k-1}{k}$$

e si può verificare che $g(x)$ è derivabile con continuità in 0 e vale $g'(0) = (k-1)/k$. Quindi il metodo di Newton ha convergenza superlineare se $k = 1$, lineare se $k > 1$. Nel caso $k = 1$ vale

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{|x_{i+1}|}{|x_i^p|} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\frac{x_i}{\log(|x_i|)+1}}{|x_i^p|} = \frac{1}{|x_i^{p-1}|(\log(|x_i|) + 1)} = \begin{cases} 0 & \text{se } p = 1 \\ +\infty & \text{se } p > 1. \end{cases}$$

Quindi la convergenza è superlineare ma l'ordine non è definito. \square

Esercizio 47 Vogliamo risolvere numericamente l'equazione $x^x = a$ per $a > 0$. Per questo si dia risposta alle seguenti questioni.

- Dire quante soluzioni ha l'equazione.
- Studiare la convergenza locale delle iterazioni del tipo $x_{k+1} = g(x_k)$ dove $g(x)$ è una delle seguenti funzioni
 - $\log a / \log x$;
 - $a^{1/x}$;
 - $(x + \log a) / (1 + \log x)$.

Per ciascuna radice si dica se c'è convergenza locale, se è lineare, superlineare o sublineare, monotona o alternata.

Esercizio 48 Sia $p > 1$ intero, $g(x) \in C^p([a, b])$ e $\alpha \in (a, b)$ tale che $\alpha = g(\alpha)$. Supponiamo esista una successione $\{x_k\}$ definita da $x_{k+1} = g(x_k)$, $x_0 \in [a, b]$ tale che $x_k \in [a, b]$ e $\lim_k x_k = \alpha$ con ordine di convergenza p . Si dimostri che esiste un k_0 tale che per $k \geq k_0$ la successione converge ad α con una delle seguenti modalità

- se p è pari, la convergenza è monotona: da destra se $g^{(p)}(\alpha) > 0$, da sinistra se $g^{(p)}(\alpha) < 0$;
- se p è dispari, la convergenza è monotona se $g^{(p)}(\alpha) > 0$; è alternata se $g^{(p)}(\alpha) < 0$.

Esercizio 49 Si definisca $g(x) = x \sin(1/x)$ se $x \neq 0$, $g(x) = 0$ se $x = 0$.

- Dare una espressione esplicita dei punti fissi di $g(x)$.
- Discutere la convergenza locale delle successioni generate a partire da $x_0 \neq 0$ da $x_{k+1} = g(x_k)$ in ciascun punto fisso non nullo. Nel caso di convergenza si dica se questa è monotona, lineare, superlineare o sublineare.

Esercizio 50 Siano $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$, tali che $a < \alpha < b$. Siano $f(x) \in C^3([a, b])$, $h(x) \in C^2([a, b])$ funzioni a valori reali tali che $f(\alpha) = 0$, $f'(\alpha) = h(\alpha) \neq 0$.

Si consideri il metodo di iterazione funzionale definito dalla funzione $g(x) = x - f(x)/h(x)$.

a) Dimostrare che il metodo è localmente convergente e studiarne l'ordine di convergenza.

b) Per calcolare la radice quadrata $\alpha > 0$ del numero reale $a > 0$ si consideri la funzione $f(x) = x^3 - ax$ tale che $f(\alpha) = 0$, $f'(\alpha) = 2a$, e si applichi il metodo iterativo analizzato nel punto precedente scegliendo $h(x) = 2a + \gamma x f(x)$ dove γ è un parametro reale. Determinare il parametro γ che massimizza l'ordine di convergenza del metodo e valutarne l'ordine.

c) Confrontare il metodo ottenuto (sapendo che il suo ordine è 3) con il metodo di Newton applicato all'equazione $f(x) = 0$ e dire quale dei due è computazionalmente più conveniente.

d) Studiare il punto a) nell'ipotesi in cui $f \in C^2([a, b])$ e $h \in C^1([a, b])$.

Esercizio 51 Per calcolare la radice cubica $\alpha = \sqrt[3]{a}$ del numero reale $a > 0$ si consideri l'iterazione $x_{k+1} = g(x_k)$ dove x_0 è scelto in un intorno di α e $g(x) = x - f(x)/(\mu + \nu x^q f(x))$, $f(x) = x^4 - ax$ con $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{Z}$.

a) Determinare i valori di μ , ν e q che danno ordine di convergenza almeno 3 e scrivere la classe di metodi così ottenuta. Dimostrare che l'ordine di convergenza dei metodi in questa classe è 3.

b) Si ponga $\nu = 0$ e si determini μ in modo da massimizzare l'ordine di convergenza. Si confronti l'efficienza del metodo ottenuto con quella del miglior metodo nella classe di cui al punto a) e con quella del metodo di Newton applicato alla funzione $x^3 - a$.

Esercizio 52 Sia a un numero intero positivo che non sia un quadrato perfetto. Per approssimare la radice quadrata di a mediante un metodo iterativo che ad ogni passo non esegua divisioni ma solo moltiplicazione e addizioni/sottrazioni tra numeri razionali, si considerino le iterazioni del punto fisso $x_{k+1} = g(x_k)$ con $g(x)$ polinomio di grado n a coefficienti razionali.

a) Determinare il polinomio $g(x)$ di grado minimo a coefficienti razionali che garantisce convergenza locale quadratica a \sqrt{a} .

b) Per $a = 3$ determinare un intervallo \mathcal{I} contenente \sqrt{a} per cui per ogni $x_0 \in \mathcal{I}$ la successione x_k converge a \sqrt{a} .

c) Dare una limitazione inferiore al massimo ordine di convergenza che si può ottenere con un polinomio $g(x)$ di grado n a coefficienti razionali.

Esercizio 53 Sia $f(x) \in C^p[a, b]$, con $p \geq 3$, $\alpha \in (a, b)$, $f(\alpha) = 0$, $f'(\alpha) \neq 0$. Si assuma che la successione $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$ generata dal metodo di Newton a partire da $x_0 \in [a, b]$ sia ben definita, con $x_k \in [a, b]$, e converga ad α .

a) Si dimostri che se x_k converge in modo alternato ad α allora la convergenza è di ordine almeno 3.

b) Si dimostri che se $f'(\alpha)f''(\alpha) > 0$ (rispettivamente $f'(\alpha)f''(\alpha) < 0$), la convergenza è quadratica ed esiste un k_0 tale che per $k > k_0$ la successione è decrescente (rispettivamente crescente).

Esercizio 54 Sia $g(x) \in C^2([a, b])$ ed $\alpha \in [a, b]$ tale che $g(\alpha) = \alpha$. Si supponga che per un particolare $x_0 \in [a, b]$ la successione $\{x_k\}$ definita da $x_{k+1} = g(x_k)$, $k = 0, 1, \dots$, converga ad α in modo sublineare. Dire se è possibile determinare un numero reale ω tale che, posto $G(x) = (g(x) + \omega x)/(1 + \omega)$ le successioni $\{y_k\}_k$ generate dalla relazione $y_{k+1} = G(y_k)$, $k = 0, 1, \dots$, a partire da $y_0 \in [\alpha - \rho, \alpha + \rho]$ per un opportuno $\rho > 0$ convergano ad α in modo superlineare. Nei casi in cui è possibile, si studi l'ordine di convergenza del metodo definito da $G(x)$. Nel caso non sia possibile, si consideri la funzione $G(x) = (g(g(x)) + \omega_1 g(x) + \omega_2 x)/(1 + \omega_1 + \omega_2)$ e si svolga una analoga analisi.

Riferimenti bibliografici

- [1] R. Bevilacqua, D.A. Bini, M. Capovani, O. Menchi. *Metodi Numerici*. Zanichelli, Bologna 1992
- [2] D.A. Bini, V. Pan *Polynomial and Matrix Computations*, Birkhäuser, 1994.
- [3] Wikipedia: Equazione cubica http://it.wikipedia.org/wiki/Equazione_cubica
- [4] Wikipedia: Equazione quartica http://it.wikipedia.org/wiki/Equazione_quartica
- [5] Girolamo Cardano http://it.wikipedia.org/wiki/Girolamo_Cardano
- [6] Wikipedia: Niccolò Tartaglia http://it.wikipedia.org/wiki/Niccol%C3%B2_Tartaglia
- [7] Wikipedia: Scipione del Ferro http://it.wikipedia.org/wiki/Scipione_Dal_Ferro
- [8] Teoria di Galois http://it.wikipedia.org/wiki/Teoria_di_Galois
- [9] Octave <http://www.gnu.org/software/octave/>
- [10] Wikipedia: Algebra Computazionale http://it.wikipedia.org/wiki/Sistema_di_algebra_computazionale
- [11] Wikipedia: Base di Groebner http://it.wikipedia.org/wiki/Base_di_Gr%C3%B6bner
- [12] Wikipedia: MPSolve <http://en.wikipedia.org/wiki/MPSolve>