Il problema dell'interpolazione

Dario A. Bini, Università di Pisa

26 novembre 2019

Sommario

Questo modulo didattico contiene risultati relativi al problema dell'interpolazione di funzioni

1 Introduzione

In alcune situazioni si incontra il problema di dover approssimare il valore che una certa funzione $f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ assume in un punto assegnato $\xi \in [a, b]$ avendo a disposizione i valori che la funzione assume in un insieme di $n + 1$ punti $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$. Cioè, date le coppie (x_i, y_i), con $y_i = f(x_i)$ per $i = 0, \dots, n$ e dato $\xi \in [a, b]$ si vuole approssimare in qualche modo $f(\xi)$. Questo problema è abbastanza naturale quando si deve tracciare il grafico continuo di una funzione che si conosce solo in alcuni punti, o quando si devono calcolare funzioni particolari, tipo le funzioni elementari quali le funzioni trigonometriche i cui valori si conoscono in alcuni punti. In altre applicazioni, in cui $f(x)$ è una funzione a valori in $\mathbb{R}^2$ caso che noi non trattiamo, viene assegnato un oggetto continuo (a tratti), tipo la firma di una persona o un carattere tipografico di una stampante laser e vogliamo memorizzarlo attraverso un numero finito di valori numerici in modo che sia poi facilmente ricostruibile in tutti i suoi punti o manipolabile.

Problemi di questo tipo possono essere trattati mediante l'interpolazione

2 L'interpolazione lineare

Siano $\varphi_0(x), \dots, \varphi_n(x)$ funzioni assegnate definite su $[a, b]$ a valori in $\mathbb{R}$ linearmente indipendenti. Siano (x_i, y_i) per $i = 0, \dots, n$, dei valori assegnati in modo che $x_i \in [a, b]$ e $x_i \neq x_j$ per $i \neq j$. Il *problema dell'interpolazione lineare* consiste nel determinare dei coefficienti $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i(x)$ soddisfi le condizioni

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n. \tag{1}$$

Le condizioni (1) sono dette *condizioni di interpolazione*. I punti $x_0, \dots, x_n$ sono detti *nodi* dell'interpolazione.

Si possono avere vari tipi di interpolazione a seconda di come sono scelte le funzioni $\varphi_i(x)$. Ad esempio, si parla di interpolazione polinomiale quando le $\varphi_i(x)$ generano lo spazio dei polinomi di grado al più n, si parla di interpolazione trigonometrica quando le funzioni $\varphi_i(x)$ vengono scelte nell'insieme $\{\sin((i+1)x),\ \cos(ix) : \quad i = 0, 1, \ldots, m\}$. Un'altro tipo di interpolazione molto importante nelle applicazioni è l'interpolazione spline in cui le funzioni $\varphi_i(x)$ sono polinomiali a tratti relativamente ai sottointervalli $[x_i, x_{i+1}]$ per $i = 0, \ldots, n-1$, dove i nodi sono stati ordinati in modo che $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$.

3 Interpolazione polinomiale

Una forma abbastanza naturale ed elementare di interpolazione è quella che si sottiene scegliendo $\varphi_i(x) = x^i$. In questo caso si parla di interpolazione polinomiale fatta sulla base dei monomi.

Si può osservare che in generale la condizione di interpolazione (1) si riduce al sistema lineare

$$\sum_{j=0}^{n} \varphi_j(x_i) a_j = y_i, \quad i = 0, \ldots, n. \tag{2}$$

Nel caso in cui $\varphi_i(x) = x^i$, questo sistema prende la forma

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}. \tag{3}$$

La matrice del sistema, indicata con V_n, viene detta *matrice di Vandermonde*. Il sistema (3) ci dice che un problema di interpolazione polinomiale sulla base dei monomi è ricondotto alla risoluzione di un sistema con matrice di Vandermonde. Vale il seguente utile risultato

Teorema 1 *Per la matrice di Vandermonde V_n costruita sui nodi $x_0, \ldots, x_n$ vale*

$$\det V_n = \prod_{0 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j). \tag{4}$$

Dim. Possiamo limitarci a considerare il caso in cui $x_i \neq x_j$ per $i \neq j$. Infatti se $x_i = x_j$ per qualche $i \neq j$ allora $\det V_n = 0$ avendo V_n due righe uguali, inoltre la produttoria in (4) sarebbe nulla essendo nullo almeno un fattore. Procediamo per induzione su n. Per $n = 1$ vale $\det V_1 = x_1 - x_0$ e la tesi è vera. Supponiamo la tesi valida per $n-1$ e dimostriamola per n. Per fare questo consideriamo la matrice $V_n(\lambda)$ ottenuta sostituendo l'ultima riga di V_n con $(1, \lambda, \lambda^2, \ldots, \lambda^n)$.

Calcoliamo $\det V_n(\lambda)$ sviluppandolo lungo l'ultima riga con la regola di Laplace. Si ottiene allora un polinomio in λ di grado n in cui il coefficiente di λ^n è il determinante della matrice ottenuta togliendo ultima riga e ultima colonna a $V_n(\lambda)$. Questa matrice coincide con V_{n-1}, matrice di Vandermonde costruita sui nodi $x_0, \ldots, x_{n-1}$, e per l'ipotesi induttiva il suo determinante è $\prod_{0\le j<i\le n-1}(x_i - x_j) \neq 0$. Per cui si può scrivere $\det V_n(\lambda) = \det V_{n-1} p(\lambda)$ con $p(\lambda)$ polinomio con coefficiente di λ^n uguale a 1. Poiché $\det V_n(x_i) = 0$ per $i = 0, \ldots, n-1$, avendo $V_n(\lambda)$ in questo caso due righe uguali, risulta $p(x_i) = 0$ per $i = 0, \ldots, n-1$ e quindi $p(x) = \prod_{i=0}^{n-1}(x - x_i)$. Ne segue che

$$\begin{aligned}\det V_n &= \det V_n(x_n) = \det V_{n-1} p(x_n) \\ &= \prod_{0\le j<i\le n-1} (x_i - x_j) \prod_{i=0}^{n-1} (x_n - x_i) = \prod_{0\le j<i\le n} (x_i - x_j).\end{aligned}$$

□

Segue da questo risultato che se i nodi x_i sono a due a due distinti, così come abbiamo supposto, allora la matrice di Vandermonde è invertibile ed esiste unica la soluzione del problema dell'interpolazione polinomiale. Il polinomio $p(x)$ che verifica le condizioni di interpolazione viene detto *polinomio di interpolazione*. I suoi coefficienti, nella base dei monomi, possono essere calcolati semplicemente risolvendo un sistema di equazioni lineari, quindi con costo computazionale di $(2/3)n^3$ operazioni aritmetiche. È stato sviluppato in letteratura un algorimto per risolvere sistemi con matrici di Vandermonde in $O(n^2)$ operazioni aritmetiche. L'algoritmo va sotto il nome di algoritmo di Bjorck-Pereyra. Sono stati sviluppati altri algoritmi che eseguono il calcolo della soluzione in $O(n \log^2 n)$ operazioni. Per maggior dettagli si veda il libro [2].

È stato dimostrato da Walter Gautschi e Gabriele Inglese [3] che la matrice di Vandermonde con nodi reali positivi ha un numero di condizionamento esponenziale nel grado n. Ciò rende il problema dell'interpolazione polinomiale nella base dei monomi numericamente intrattabile. Per questo è conveniente cambiare approccio.

4 Interpolazione polinomiale nella base di Lagrange

Consideriamo una base di polinomi diversa da quella dei monomi. Definiamo allora

$$L_i(x) = \prod_{j=0,\, j\neq i}^{n} (x - x_j) / \prod_{j=0,\, j\neq i}^{n} (x_i - x_j), \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

la base dei *polinomi di Lagrange*. Si osservi che, in base alla definizione, vale $L_i(x_i) = 1$ mentre $L_i(x_j) = 0$ se $i \neq j$. Scegliendo quindi $\varphi_i(x) = L_i(x)$ il sistema (2) ha come matrice la matrice identica e il polinomio di interpolazione si lascia scrivere come

$$p(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x). \tag{5}$$

L'espressione (5) viene detta *polinomio di interpolazione di Lagrange*.

L'espressione (5) permette di calcolare il valore di $p(x)$ in un punto in modo efficiente. Infatti vale

$$p(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\sum_{i=0}^{n}\frac{y_i/\theta_i}{x-x_i}, \quad \theta_i=\prod_{j=0\, j\neq i}^{n}(x_i-x_j). \tag{6}$$

Per cui il calcolo del valore di $p(x)$ mediante la (5) costa $O(n^2)$ operazioni aritmetiche. Non solo, ma il costo del calcolo del valore di $p(x)$ in un nuovo punto $x=\eta$ dopo aver calcolato $p(x)$ costa solamente $O(n)$ operazioni, visto che i valori delle quantità θ_i sono disponibili perché già calcolati in precedenza.

Un altro vantaggio computazionale sta nel fatto che, se dovessimo aggiungere un nuovo nodo x_{n+1} e calcolare il valore del nuovo polinomio di interpolazione p_{n+1} mediante la (5) in un punto ξ, ci basterebbe calcolare i nuovi valori dei θ_i aggiornando i valori precedenti mediante $O(n)$ operazioni aritmetiche. Anche il calcolo del valore di $p_{n+1}(x)$ in un punto costerebbe $O(n)$ operazioni.

Si possono introdurre altre basi di polinomi per rappresentare il polinomio di interpolazione. Ad esempio la base $\varphi_0(x)=1$, $\varphi_i(x)=(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})$ per $i=1,\ldots,n$, detta *base di Newton*, porta al polinomio di interpolazione di Newton

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+\cdots+a_n(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1}),$$

dove i coefficienti a_i, detti differenze divise, sono ricavabili risolvendo il sistema (1) che in questo caso è triangolare e con una struttura molto particolare.

5 Resto dell'interpolazione

Se $f(x)$ è una funzione sufficientemente regolare è possibile dare una espressione esplicita al *resto dell'interpolazione* definito come

$$r_n(x)=f(x)-p_n(x)$$

dove $p_n(x)$ è il polinomio di interpolazione di $f(x)$ relativo ai nodi $x_0<x_1<\cdots<x_n$. Vale infatti il seguente

Teorema 2 *Sia $f(x)\in C^{n+1}[a,b]$ e $p(x)$ il polinomio di interpolazione di $f(x)$ relativo ai nodi $a\le x_0<x_1<\cdots<x_n\le b$. Per ogni $x\in[a,b]$ esiste $\xi\in(a,b)$ tale che*

$$r_n(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Dim. Se x coincide con uno dei nodi allora la formula è banalmente vera essendo $r_n(x) = 0$ e $\prod_{i=0}^{n}(x - x_i) = 0$. Se x è diverso da ogni x_i allora $\prod_{i=0}^{n}(x - x_i) \neq 0$ e possiamo considerare questa funzione ausiliaria

$$g(y) = r_n(y) - \prod_{i=0}^{n}(y - x_i)\frac{r_n(x)}{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}$$

in cui y è la variabile mentre x è il valore che abbiamo fissato. La funzione $g(y)$ è derivabile $n+1$ volte con continuità. Infatti $r_n(y)$ lo è come pure il secondo addendo che è un polinomio in y. Inoltre $g(y)$ si annulla in tutti i nodi x_i e anche per $y = x$. Poiché $g(y)$ si annulla in $n+2$ punti in $[a, b]$ allora la sua derivata prima si annulla in $n+1$ punti in (a, b), la sua derivata seconda si annulla in n punti, e procedendo in questo modo si può concludere che la derivata $(n+1)$-esima si annulla in un punto $\xi \in (a, b)$. Vale cioè

$$0 = g^{(n+1)}(\xi) = r_n^{(n+1)}(\xi) - (n+1)!\frac{r_n(x)}{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}. \tag{7}$$

Inoltre, poiché $p_n(x)$ è un polinomio di grado al più n la sua derivata $(n+1)$-esima è nulla e vale quindi $r_n^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi)$ che assieme alla (7) dà la tesi. $\square$

L'espressione che abbiamo dato del resto evidenzia che, per una funzione in cui la derivata $(n+1)$-esima non cambia segno, il resto cambia segno ogni volta che la variabile x oltrepassa un nodo. Dal punto di vista grafico questo comportamento è deprecabile poiché il grafico di $p(x)$ ha un andamento ondeggiante sul grafico della funzione $f(x)$ che aumenta maggiormente con l'aumentare del numero dei nodi di interpolazione. Anche se l'approssimazione numerica può essere accurata, al punto di vista estetico il risultato diventa sgradevole. Per questo motivo nei problemi di CAGD si preferisce usare delle basi diverse che non presentano questo inconveniente quali le funzioni spline che però non trattiamo in questo articolo.

Supponiamo di fissare una successione di $(n+1)$-uple di punti in $[a, b]$ cioè $x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$ per $n = 1, 2, \ldots$ Viene spontaneo chiedersi se la corrispondente successione di polinomi di interpolazione $\{p_n(x)\}$ ottenuta interpolando $f(x)$ nei punti $x_i^{(n)}, f(x_i^{(n)})$, $i = 0, \ldots, n$, converge puntualmente o uniformemente ad $f(x)$. Purtroppo esistono esempi di funzioni apparentemente innocue e di successioni di $(n+1)$-uple di nodi per cui la successione $p_n(x)$ non converge neppure puntualmente a $f(x)$. Un esempio classico è dato dalla *funzione di Runge* definita da $f(x) = 1/(1 + x^2)$ sull'intervallo $[-5, 5]$. Questa è una funzione di classe $C^\infty([a, b])$, però con la successione di nodi $x_i^{(n)} = -5 + 10i/n$, $i = 0, \ldots, n$ la successione dei polinomi di interpolazione $p_n(x)$ non converge nemmeno puntualmente a $f(x)$. Se però si restringe la funzione ad un intervallo più piccolo, ad esempio $[-0.2, 0.2]$ e prendendo ancora nodi equispaziati, si ottiene la convergenza uniforme di $p_n(x)$ a $f(x)$.

Si possono dare condizioni sufficienti affinché per ogni scelta dei nodi ci sia convergenza uniforme di $p_n(x)$ a $f(x)$. Il seguente teorema, di cui non si riporta la dimostrazione, fornisce una condizione sufficiente.

Teorema 3 *Se la funzione $f(x)[a,b] \to \mathbb{R}$ è la restrizione di una funzione analitica definita sull'insieme $\Omega \subset \mathbb{C}$ tale che*

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \quad \exists\, x \in [a,b],\, |z-x| \leq b-a\}$$

allora per ogni successione di nodi $x_i^{(n)}$ il polinomio di interpolazione $p_n(x)$ converge uniformemente a $f(x)$.

L'insieme Ω è assimilabile al recinto di un cane la cui catena, di lunghezza $b-a$, ha un estremo libero di scorrere lungo il segmento $[a,b]$.

È evidente che la funzione di Runge ha un polo nei punti $x = \mathtt{i}$ e $x = -\mathtt{i}$. Per cui le ipotesi del teorema del "recinto del cane" sono soddisfatte se $[a,b] = [-b,b]$ è tale che $2b < 1$.

Il prossimo risultato, che riportiamo senza dimostrazione, ci dice che data una funzione $f(x)$ possiamo sempre trovare una successione di nodi che garantisce la convergenza uniforme.

Teorema 4 *Se la funzione $f(x)$ è continua sull'intervallo $[a,b]$, allora esiste una scelta della successione di nodi per cui $p_n(x)$ converge uniformemente ad $f(x)$.*

6 Esercizi

Esercizio 1 Sia n un intero positivo e siano $x_i \in (0,1)$, $i = 0,\ldots,n$ tali che $x_i \neq x_j$ per $i \neq j$. Si definiscano inoltre le funzioni $g_i(x) = x_i + x^{-i}$, $i = 0,\ldots,n$.
a) Si consideri la matrice $(n+1)\times(n+1)$ $V(x) = (v_{i,j})_{i,j=0,n}$ tale che $v_{i,j} = g_j(x_i)$ per $i \neq n$ e $v_{n,j} = g_j(x)$, con $x > 0$. Si dimostri che se $\det V(\xi) = 0$ allora $\det V(\xi^{-1}) = 0$ e che $\det V(\xi) = 0$, $\xi \in (0,1)$ se e solo se $\xi \in \{x_0,\ldots,x_{n-1}\}$.
b) Si dimostri che il problema di interpolazione nello spazio delle funzioni $g_i(x)$, $i = 0,\ldots,n$ relativo ai nodi $x_i \in (0,1)$ ha una e una sola soluzione, cioè, per ogni $(n+1)$-upla $y_0,\ldots,y_n \in \mathbb{R}$ esistono unici $a0,\ldots,a_n$ tali che, posto $\varphi(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j g_j(x)$, vale $\varphi(x_i) = y_i$, $i = 0,\ldots,n$.
c) Si dia unespressione per $\varphi(x)$ e un algoritmo per il calcolo di $\varphi(x)$ in un punto ξ di costo $O(n^2)$.

Soluzione.
a) Si osserva che $V(\xi) = V(\xi^{-1})$, dunque se $\det V(\xi) = 0$ allora $\det V(\xi^{-1}) = 0$. Indichiamo con $V_n(x)$ la matrice di dimensione $(n+1)\times(n+1)$. Dimostriamo per induzione su n che $\det V_n(\xi) = 0$, $\xi \in (0,1)$ se e solo se $\xi \in \{x_0,\ldots,x_{n-1}\}$. Per $n = 1$ è una verifica diretta. Supponiamo la proprietà valga per $n-1$ e la dimostriamo per n. Se $\xi \in \{x_0,\ldots,x_{n-1}\}$ allora $\det V_n(\xi) = 0$ perché $V_n(\xi)$ ha due righe uguali. Proviamo il viceversa. Osserviamo che

$$V_n(x) = \begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & x^{-n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{n-1}(x_{n-1}) & a \\ b^T & x^{2n}+1 \end{bmatrix} = D_n(x)W_n(x)$$

dove gli elementi del vettore b sono polinomi di grado minore di $2n$. Poiché per ipotesi induttiva $\det V_{n-1}(x_{n-1}) \neq 0$, sviluppando il determinante della matrice $W_n(x)$ risptto all'ultima riga, si trova che $\det W_n(x)$ è un polinomio di grado $2n$. D'altra parte $\det W_n(\xi) = 0$ se e solo se $\det V_n(\xi) = 0$, e $\det V_n(\xi) = 0$ se $\xi \in \{x_0, \dots, x_{n-1}\}$ oppure $\xi \in \{x_0^{-1}, \dots, x_{n-1}^{-1}\}$. Dunque gli $\xi \in \{x_0, \dots, x_{n-1}\}$ sono gli unici possibili zeri di $\det V_n(\xi)$ nell'intervallo $(0, 1)$.
b) Si verifica che il vettore $a = (a_i)_{i=0,\dots,n-1}$ risolve il sistema di equazioni lineari $V(x_n)a = y$, dove $y = (y_i)_{i=0,\dots,n-1}$, e tale sistema ha un'unica soluzione perché $\det V(x_n) \neq 0$.
c) (Traccia) Osserviamo che $\varphi(x) = x^{-n}p_{2n}(x)$, dove $p_{2n}(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j(x^{n+j} + x^{n-j}$ ha grado al più $2n$. Poiché $y_j = \varphi(x_j) = \varphi(x_j^{-1})$, per $j = 0, \dots, n$, allora $p_{2n}(x)$ è il polinomio di grado al più $2n$ tale che $p_{2n}(x_j) = x_j^n y_j$ e $p_{2n}(x_j^{-1}) = x_j^{-n} y_j$, per $j = 0, \dots, n$. Usando la formula (6) possiamo dare una espressione a $p_{2n}(x)$ e quindi a $\varphi(x) = x^{-n}p_{2n}(x)$, da cui possiamo derivare un metodo per il calcolo di $\varphi(x)$ con costo $O(n^2)$. $\square$

Esercizio 2 Siano $x_1, \dots x_{2n}$ numeri reali non nulli a due a due distinti e siano a, b due numeri reali tali che $a < x_i < b$, $i = 1, \dots, 2n$. Si definiscano le matrici $2n \times 2n$, $W = (w_{i,j})$ e $V = (v_{i,j})$ tali che $w_{i,j} = x_i^{j-n}$, $v_{i,j} = x_i^{j-1}$, $i, j = 1, \dots, 2n$.
a) Mettendo in relazione $\det V$ con $\det W$ e sfruttando le proprietà delle matrici di Vandermonde si dimostri che W è non singolare.
b) Assegnati i numeri reali $y_1, \dots, y_{2n}$ dire se il problema di determinare i coefficienti α_i, $i = -n+1, \dots, n$ tali che la funzione $s(x) = \sum_{j=-n+1}^{n} \alpha_j x^j$ soddisfi le condizioni di interpolazione $s(x_i) = y_i$, $i = 1, \dots, 2n$, ha soluzione e, nel caso, dire se è unica.
c) Se $x_1, \dots, x_{2n}$ coincidono con le radici $2n$-esime dell'unità, individuare un metodo per il calcolo degli α_i che impieghi $O(n \log n)$ operazioni aritmetiche, dove n è potenza intera di 2.
d) Se gli y_i del punto b) sono i valori che una funzione $f(x) \in C^{2n}([a, b])$ assume nei punti x_i, cioè $f(x_i) = y_i$, $i = 1, \dots, 2n$, dare una espressione esplicita per l'errore di interpolazione $r(x) = f(x) - s(x)$ per $x \in [a, b]$.

Soluzione.
a) Si osserva che $w_{i,j} = x_i^{-n+1} v_{i,j}$, $i, j = 1, \dots, 2n$, quindi

$$W = DV, \quad D = \begin{bmatrix} x_1^{-n+1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_{2n}^{-n+1} \end{bmatrix},$$

da cui $\det V = 0$ se e solo se $\det W = 0$, ma V è non singolare perché è una matrice di Vandermonde e i punti x_i sono due a due distinti.
b) Si verifica che il vettore $\alpha = (\alpha_i)_{i=-n+1,\dots,n}$ risolve il sistema di equazioni lineari $W\alpha = y$, dove $y = (y_i)_{i=1,\dots,2n}$, e tale sistema ha un'unica soluzione perché $\det W \neq 0$.

c) (Traccia) Il sistema $W\alpha = y$ viene risolto risolvendo il sistema $V\alpha = D^{-1}y$. Questo ultimo sistema può essere risolto in $O(n \log n)$ operazioni aritmetiche mediante FFT.
d) (Traccia) Osserviamo che $s(x) = x^{-n+1}p(x)$, dove $p(x) = \sum_{j=0}^{2n-1} \alpha_{j-n+1}x^j$. Definiamo $\tilde{f}(x) = x^{n-1}f(x)$ e osserviamo che $p(x_i) = \tilde{f}(x_i) = x_i^{n-1}y_i$, cioè $p(x)$ è il polinomio di grado al più $2n-1$ tale che interpola $\tilde{f}(x)$ nei nodi x_i, $i = 1, \ldots, 2n$. Dal Teorema 2 sappiamo che $\tilde{r}(x) = \tilde{f}(x) - p(x) = \prod_{i=1}^{2n}(x - x_i)\frac{\tilde{f}^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}$ dove $\xi = \xi(x) \in (a, b)$, da cui ricaviamo $r(x) = x^{-n+1}\tilde{r}(x)$. □

Riferimenti bibliografici

[1] R. Bevilacqua, D.A. Bini, M. Capovani, O. Menchi. *Metodi Numerici*. Zanichelli, Bologna 1992

[2] D.A. Bini, V. Pan *Polynomial and Matrix Computations*, Birkhäuser, 1994.

[3] Walter Gautschi, Gabriele Inglese, Lower bounds for the condition number of Vandermonde matrices, Numer. Math. 52, 3, 241-250, DOI: 10.1007/BF01398878