Esercizi di algebra lineare numerica

Dario A. Bini, Università di Pisa

26 agosto 2013

Sommario

Questo modulo didattico contiene un insieme di esercizi di algebra lineare numerica.

Esercizio 1 Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \geq 4$ un intero e $A = (a_{i,j})$ matrice $n \times n$ definita da $a_{i,i} = i\alpha$, per $i = 1, \ldots, n$, $a_{i+1,i} = -1$, $a_{i,i+1} = 1$, per $i = 1, \ldots, n-1$ e $a_{i,j} = 0$ altrove.

a) Determinare i valori di α per cui i cerchi di Gerschgorin di A sono a due a due disgiunti. Dimostrare che per tali valori di α la matrice A ha autovalori reali.

b) Posto $\alpha = 4$ si calcolino cerchi di inclusione per ciascun autovalore di A col raggio più piccolo possibile. Suggerimento: si applichino i teoremi di Gerschgorin alla matrice $D^{-1}AD$ dove D è una matrice diagonale opportunamente scelta.

c) Valutare nel modo più accurato possibile il valore $\beta > 0$ per cui la matrice A ha autovalori reali per ogni α tale che $|\alpha| \geq \beta$.

Soluzione

La matrice ha la forma seguente

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & & & \\ -1 & 2\alpha & 1 & & \\ & -1 & 3\alpha & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & -1 & n\alpha \end{bmatrix}.$$

Se $\alpha = 0$ la matrice è antisimmetrica e quindi ha autovalori immaginari o nulli. Possiamo assumere per semplicità $\alpha > 0$, infatti se $\alpha < 0$ possiamo considerare la matrice $-A^T$ che rientra nel caso precedente.

L'i-esimo cerchio di Gerschgorin di una matrice $A = (a_{i,j})$ di ordine n ha centro $c_i = a_{i,i}$ e raggio $r_i = \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} |a_{i,j}|$. Nel nostro caso vale

$$\begin{array}{lll} c_1 = \alpha, & r_1 = 1, & \\ c_i = i\alpha, & r_i = 2, & i = 2, \ldots, n-1, \\ c_n = n\alpha, & r_n = 1. & \end{array}$$

a) I cerchi hanno centro reale e il bordo del cerchio i-esimo interseca l'asse reale nei punti $i\alpha + 2$ e $i\alpha - 2$, $i = 2, \ldots, n-1$, mentre i bordi del primo e dell'ultimo cerchio intersecano l'asse reale in $\alpha - 1$, $\alpha + 1$ e rispettivamente in $n\alpha - 1$, $n\alpha + 1$. Quindi i cerchi sono disgiunti se e solo se

$$\begin{array}{ll} \alpha + 1 < 2\alpha - 2, & \\ i\alpha + 2 < (i+1)\alpha - 2, & i = 2, \ldots, n-2, \\ (n-1)\alpha + 2 < n\alpha - 1. & \end{array}$$

Dalla prima e dall'ultima relazione si ricava $\alpha > 3$. Dalle rimanenti si ricava $\alpha > 4$. La condizione richiesta è dunque $\alpha > 4$.

Per il secondo teorema di Gerschgorin, se i cerchi sono a due a due disgiunti allora ciascun cerchio contiene un solo autovalore della matrice. Poiché nel nostro caso la matrice è reale, i suoi eventuali autovalori non reali compaiono a coppie complesse coniugate. Per cui, essendo i centri dei cerchi di Gerschgorin reali, se un cerchio contenesse l'autovalore non reale λ, esso conterrebbe anche l'autovalore coniugato $\bar{\lambda}$. Ciò è assurdo poiché ogni cerchio deve contenere un solo autovalore.

b) Per $\alpha = 4$ il primo cerchio di centro 4 e raggio 1 è disgiunto dagli altri cerchi. Quindi contiene un solo autovalore. È possibile ottenere un raggio di inclusione più piccolo operando nel seguente modo. La matrice ottenuta da A moltiplicando la prima riga per un numero $0 < \epsilon < 1$ e la prima colonna per ϵ^{-1} ha gli stessi autovalori di A. Il raggio del primo cerchio di Gerschgorin diventa ϵ, il raggio del secondo cerchio diventa $1 + \epsilon^{-1}$. Determiniamo per quali valori di ϵ il primo cerchio è ancora disgiunto dai rimanenti. Poiché i raggi degli altri cerchi non sono cambiati si ha la condizione $4 + \epsilon < 8 - \epsilon^{-1} - 1$ che fornisce $\epsilon^2 - 3\epsilon + 1 < 0$ che è verificata per $(3 - \sqrt{5})/2 < \epsilon < (3 + \sqrt{5})/2$. Per cui, finché la diseguaglianza è verificata, il cerchio di centro 4 e raggio ϵ contiene un solo autovalore che è reale. Quindi, anche per $\epsilon = (3 - \sqrt{5})/2$ il cerchio di centro 4 e raggio ϵ contiene un solo autovalore. Analogamente si dimostra che il cerchio di centro n e raggio $(3 - \sqrt{5})/2$ contiene un solo autovalore.

Se $2 \leq i \leq n-1$, moltiplicando la i-esima riga per ϵ e la i-esima colonna per ϵ^{-1} si ottiene una nuova matrice con gli stessi autovalori di A. I cerchi di Gerschgorin della nuova matrice sono gli stessi della matrice A ad esclusione dei tre cerchi di indice $i-1, i, i+1$ che hanno raggi rispettivamente $1+\epsilon^{-1}, 2\epsilon, 1+\epsilon^{-1}$. L'$i$-esimo cerchio è quindi disgiunto dai due contigui se $4(i-1) + 1 + \epsilon^{-1} < 4i - 2\epsilon < 4i + 2\epsilon < 4(i+1) - 1 - \epsilon^{-1}$,cioè

$$\epsilon^{-1} - 3 < 2\epsilon < 3 - \epsilon^{-1}.$$

La doppia diseguaglianza è verificata per $1/2 < \epsilon < 1$. Per cui il cerchio di centro $4i$ e raggio ϵ contiene un solo autovalore che è reale per ogni $1/2 < \epsilon < 1$ e quindi anche per $\epsilon = 1/2$.

c) Ripetendo il ragionamento precedente per un valore generico di α si ottiene per il primo cerchio la condizione $\epsilon^2 + \epsilon(1 - \alpha) + 1 < 0$ che ha soluzioni se $\alpha > 3$ o $\alpha < -1$. Analogo risultato vale per l'ultimo cerchio. Se $2 \leq i \leq n-1$ si ottengono le condizioni

$$1-\alpha+\epsilon^{-1}<2\epsilon<\alpha-1-\epsilon^{-1}$$

che hanno soluzioni se $\alpha>\sqrt{8}+1$ oppure $\alpha<-\sqrt{8}+1$. □

Esercizio 2 Sia $n>2$ un intero e si denoti con $e=(1,\dots,1)^T\in\mathbb{R}^{n-1}$, $e_1=(1,0,\dots,0)^T\in\mathbb{R}^{n-1}$.

a) Costruire la matrice di Householder P tale che $Pe=\theta e_1$, dove $\theta\in\mathbb{R}$

b) Sia $A=(a_{i,j})$ matrice reale $n\times n$ tale che $a_{1,i}=a_{i,1}=1$ per $i=2,\dots,n$ e $a_{i,j}=0$ altrove. Si costruisca una matrice ortogonale Q tale che $B=QAQ^T$ abbia tutti elementi nulli tranne $b_{2,1}=b_{1,2}$. Si determini il valore di $b_{2,1}$.

c) Dare condizioni su α affinché il metodo di Jacobi applicato al sistema $(I-\alpha A)x=b$ sia convergente.

d) Dare condizioni su α affinché il metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema $(I-\alpha A)x=b$ sia convergente. Si confrontino le velocità di convergenza dei due metodi.

Soluzione

Una matrice reale di Householder P è tale che $P=I-\beta uu^T$ dove $u\in\mathbb{R}^n$, $u\neq 0$ e $\beta=2/\|u\|_2^2$.

a) Dalla relazione $Pe=\theta e_1$ e dalla ortogonalità di P si deduce che $\|e\|_2=|\theta|$, cioè $\theta=\pm\sqrt{n-1}$. Dalla espressione $P=I-\beta uu^T$ si deduce che $\beta uu^Te=e-\theta e_1$. Per evitare cancellazione numerica si sceglie allora $\theta=-\sqrt{n-1}$, per cui $u=e+\sqrt{n-1}e_1$, $\beta=2/\|u\|_2^2=1/(\sqrt{n-1}+n-1)$.

b) Se P è la matrice di Householder tale che $Pe=\theta e_1$, la matrice $Q=\begin{bmatrix}1&0\\0&P\end{bmatrix}$ risulta ortogonale e inoltre

$$QAQ^T=\begin{bmatrix}0&e^TP\\Pe&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-\sqrt{n-1}&0&\dots&0\\-\sqrt{n-1}&&&&\\\vdots&&0&&\\0&&&&\end{bmatrix}$$

c) La matrice di iterazione del metodo di Jacobi è αA. Il suo raggio spettrale è α per il raggio spettrale di A. Quest'ultimo coincide col raggio spettrale della matrice $\begin{bmatrix}0&-\sqrt{n-1}\\-\sqrt{n-1}&0\end{bmatrix}$ che è $\sqrt{n-1}$. Quindi il metodo di Jacobi è convergente se $\alpha<1/\sqrt{n-1}$.

d) La matrice di iterazione del metodo di Gauss-Seidel è

$$\begin{bmatrix}1&0\\\alpha e&I\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0&\alpha e^T\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&\alpha e^T\\0&-\alpha^2ee^T\end{bmatrix}$$

Il suo raggio spettrale coincide con il raggio spettrale di α^2ee^T. Questa matrice ha $n-1$ autovalori nulli corrispondenti agli autovettori nello spazio ortogonale a e e un autovalore pari a $\alpha^2(n-1)$ corrispondente all'autovettore e. Il suo raggio spettrale è quindi $\alpha^2(n-1)$ e la condizione di convergenza del metodo di Gauss-Seidel è quindi $|\alpha| < 1/\sqrt{n-1}$. Cioè la stessa del metodo di Jacobi. Però il raggio spettrale della matrice di iterazione del metodo di Gauss-Seidel è il quadrato di quello della matrice del metodo di Jacobi. Per cui la velocità di convergenza del metodo di Gauss-Seidel è doppia di quella del metodo di Jacobi. $\square$

Esercizio 3 È dato il sistema lineare $Ax = b$ dove A è una matrice $n \times n$ reale simmetrica definita positiva di autovalori $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$. Si consideri il metodo iterativo definito da

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} + \alpha(b - Ax^{(i)}),$$

con α parametro reale.

a) Dare condizioni su α in termini degli autovalori di A necessarie e sufficienti per la convergenza del metodo.

b) Determinare in funzione degli autovalori di A il valore di α che massimizza la velocità di convergenza.

c) Determinare condizioni su α in funzione degli elementi di A sufficienti per la convergenza del metodo.

d) Se A è una matrice $n \times n$ reale arbitraria determinare condizioni sugli autovalori di A affinché esista un α che rende il metodo iterativo convergente.

Soluzione

Il metodo iterativo si può scrivere come $X^{(i+1)} = Px^{(i)} + q$ con $P = I - \alpha A$ e $q = \alpha b$. Inoltre x è soluzione del sistema $Ax = b$ se e solo se $x = Px + q$. Condizione necessaria e sufficiente per la convergenza di un metodo iterativo è che il raggio spettrale della matrice di iterazione sia minore di 1.

a) La matrice di iterazione del metodo è $P = I - \alpha A$, i suoi autovalori sono quindi $1 - \alpha\lambda_i$, $i = 1, \ldots, n$. Il raggio spettrale di P è il massimo dei $|1 - \alpha\lambda_i|$, $i = 1, \ldots, n$. Quindi la condizione cercata su α è $-1 < 1 - \lambda_i\alpha < 1$ cioè $\alpha < 2/\lambda_i$. Dato l'ordinamento degli autovalori si ottiene $\alpha < 2/\lambda_n$.

b) Poiché il raggio spettrale è uguale alla riduzione asintotica media per passo dell'errore, per massimizzare la velocità di convergenza basta minimizzare il raggio spettrale. Basta cioè trovare il

$$\min_{\alpha} \max_{i} |1 - \alpha\lambda_i|$$

cioè il minimo dell'inviluppo superiore delle funzioni $f_i(\alpha) = |1 - \alpha\lambda_i|$. Come si vede dalla figura tale inviluppo è dato da

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \alpha_1 x & \text{per } x < \alpha_0 \\ 1 - \alpha_n & \text{per } x \geq \alpha_0 \end{cases}$$

con $\alpha_0 = 2/(\alpha_1 + \alpha_n)$ e il suo minimo, preso in α_0 vale $(\lambda_n - \lambda_1)/(\lambda_1 + \lambda_n)$

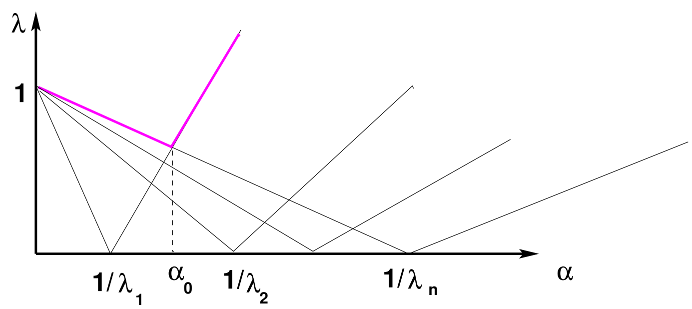

Figura 1: Inviluppo superiore delle funzioni $|1 - \alpha\lambda_i|$

c) Dal punto a) si ha che per la convergenza occorre e basta che $\alpha < 2/\lambda_n$. Poiché per ogni norma matriciale indotta $\|\cdot\|$ vale $\lambda_n = |\lambda_n| \le \|A\|$, ne segue che la condizione $\alpha < 2/\|A\|$ è sufficiente per la convergenza. Ad esempio, con la norma infinito basta che $\alpha < 2/\max_i \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$.

d) Gli autovalori di A devono essere tali che esista un α per cui $|1-\lambda_i\alpha| < 1$, cioè $-1 < 1 - \lambda_i\alpha < 1$. Le due diseguaglianze valgono se e solo se $0 < \lambda_i\alpha < 2$. Per cui gli autovalori devono essere tutti dello stesso segno e non nulli, inoltre $0 < \alpha < 2/\lambda_i$ oppure $2/\lambda_i < \alpha < 0$. $\square$

Esercizio 4 Dato un intero $n > 2$ e un numero reale $\alpha \neq 0$ si consideri la matrice $n \times n$ $A = (a_{i,j})$, tale che $a_{i,i} = 1$, $i = 1, \dots, n$, $a_{i,j} = \alpha$ se $i - j$ è congruo a 1 modulo n, $a_{i,j} = 0$ altrove.

a) Dimostrare che esistono uniche le fattorizzazioni LU di A e di A^T.

b) Descrivere un algoritmo per il calcolo del fattore U della fattorizzazione LU di A e valutarne il costo computazionale.

c) Descrivere un algoritmo per il calcolo del fattore U della fattorizzazione LU di A^T e valutarne il costo computazionale.

d) Dimostrare che se $|\alpha| < 1$ allora non è necessario applicare alcuna strategia di massimo pivot nel calcolo delle fattorizzazioni di A e di A^T.

Soluzione

a) Sappiamo che condizione sufficiente per l'esistenza e unicità della fattorizzazione LU di una matrice A è che tutte le sottomatrici principali di testa di A di ordine k abbiano determinante non nullo per $k = 1, \dots, n-1$. Nel caso della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & \alpha \\ \alpha & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \alpha & 1 \end{bmatrix}$$

queste sottomatrici sono triangolari ed hanno elementi principali uguali ad 1. Per cui il loro determinante è 1. Questo vale anche per A^T. Esiste dunque la fattorizzazione LU sia di A che di A^T.

b) Il primo passo di eliminazione Gaussiana applicato ad A produce la matrice

$$A_2 = \left[\begin{array}{c|ccccc} 1 & & & & & \alpha \\ \hline 0 & 1 & & & & \alpha_1 \\ & \alpha & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & \alpha & 1 \end{array}\right]$$

dove $\alpha_1 = -\alpha^2$ La sottomatrice di ordine $n-1$ ottenuta cancellando prima riga e colonna (complemento di Schur) ha la stessa struttura della matrice A dove l'elemento di posto $(1, n-1)$ è sostituito da $\alpha_1 = -\alpha\alpha$. Procedendo induttivamente, se il complemento di Schur al passo k ha la struttura

$$A(n-k, \alpha, \alpha_k) := \begin{bmatrix} 1 & & & \alpha_k \\ \alpha & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \alpha & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-k)\times(n-k)}$$

allora un passo di eliminazione gaussiana applicato ad $A(n-k, \alpha, \alpha_k)$ dà il complemento di Schur $A(n-k-1, \alpha, \alpha_{k+1})$ con $\alpha_{k+1} = -\alpha\alpha_k$. Per cui il fattore U è dato da

$$U = \begin{bmatrix} 1 & & & & \alpha_0 \\ & 1 & & & \alpha_1 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & a_{n-2} \\ & & & & 1 - \alpha_{n-2}\alpha \end{bmatrix}$$

Le uniche quantità da calcolare sono gli elementi dell'ultima colonna. Essi sono calcolati da $\alpha_k = -\alpha\alpha_{k-1}$, $k = 1, \ldots, n-2$, dove $\alpha_0 = \alpha$, e da $1 - \alpha\alpha_{n-2}$. Ciò costa n operazioni aritmetiche.

c) Nel caso di A^T vale

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \alpha \\ \alpha & & & 1 \end{bmatrix}$$

e il complemento di Schur ottenuto dopo un passo di eliminazione gaussiana è la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \alpha \\ \alpha_1 & & & 1 \end{bmatrix} =: A(n-1, \alpha, \alpha_1)$$

dove $\alpha_1 = -\alpha^2$. Anche in questo caso si ottiene un complemento di Schur con la stessa struttura di A^T. Procedendo in modo induttivo si vede che un passo di eliminazione gaussiana applicato a $A(n-k, \alpha, \alpha_k)$ genera il complemento di Schur $A(n-k-1, \alpha, \alpha_{k+1})$ con $\alpha_{k+1} = -\alpha\alpha_k$. In questo modo si arriva al fattore U dato da

$$U = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \alpha \\ & & & 1-\alpha_{n-2}\alpha \end{bmatrix}.$$

Il suo calcolo richiede di calcolare solamente $1 - \alpha_{n-2}\alpha = 1 - (-1)^{n-2}\alpha^{n-1}$. Questo può essere fatto calcolando in successione le quantità $\alpha_{i+1} = -\alpha_i\alpha$ con $n-1$ moltiplicazioni. Un metodo più efficiente per calcolare la potenza m-esima di un numero α consiste nel rappresentare m in base 2 come $m = \sum_{j=0}^{k} d_i 2^i$, dove $d_i \in \{0,1\}$, e k è la parte intera di $\log_2 m$. In questo modo $m = \prod_{j=0}^{k} d_j \alpha^{2^j}$. L'algoritmo allora calcola prima le potenze 2^j di α, cioè $p_j = \alpha^{2^j}$ mediante le relazioni $p_{j+1} = p_j p_j$, $j = 1, \ldots, k$, $p_1 = \alpha$. Poi viene calcolato il prodotto degli α^{2^j} corrispondenti ai $d_j = 1$. Il costo globale è due volte la parte intera di $\log m$.

d) Se $|\alpha| < 1$ allora gli elementi non principali delle matrici generate dal processo di eliminazione gaussiana coincidono o con α o con α^j. Quindi gli elementi principali e quindi gli elementi pivot hanno sempre modulo maggiore degli altri elementi non principali. $\square$

Esercizio 5 Siano rispettivamente J e G le matrici di iterazione dei metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel applicati al sistema $Hx = b$ dove $H = (h_{i,j})$ è la matrice tridiagonale $n \times n$ tale che $h_{i,i} = 3$ per $i = 1, \ldots, n$ e $h_{i+1,i} = h_{i,i+1} = 1$ per $i = 1, \ldots, n-1$.

a) Dimostrare che per $n \geq 2$ vale $\rho(J) < 2/3$, $\rho(G) < 4/9$, dove $\rho(\cdot)$ indica il raggio spettrale.

b) Sia $n = 2m$ pari, e si partizioni H in blocchi 2×2 in modo che H possa essere vista come matrice $m \times m$ i cui elementi sono blocchi 2×2. In questo modo H risulta tridiagonale a blocchi con blocchi diagonali $A = \left[\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right]$, blocchi sopradiagonali $B = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$, blocchi sottodiagonali B^T. Si consideri il metodo iterativo di Jacobi a blocchi dato dal partizionamento $H = M - N$ con M matrice diagonale a blocchi 2×2 con blocchi diagonali uguali ad A. Si dimostri che il raggio spettrale della matrice di iterazione $M^{-1}N$ è minore di $1/2$.

c) Sia $\widetilde{H}$ la matrice ottenuta da H ponendo uguale a 1 l'elemento di posto $(1,1)$. Dimostrare che il metodo di Jacobi applicato al sistema $\widetilde{H}x = b$ è convergente e dare una limitazione superiore più accurata possibile del raggio spettrale della matrice di iterazione.

Soluzione

La matrice di iterazione del metodo di Jacobi è $-(1/3)H$ dove $H = (h_{i,j})$ è la matrice tridiagonale con elementi $h_{i+1,i} = h_{i,i+1} = 1$ e nulli altrove. La norma infinito di H è 2 quindi per il raggio spettrale ρ vale $\rho(-(1/3)H) \le 2/3$. Poiché la matrice del sistema A è tridiagonale, sappiamo che il raggio spettrale della matrice di iterazione del metodo di Gauss-Seidel è il quadrato di quello della matrice del metodo di Jacobi. Esso è quindi maggiorato da $(2/3)^2 = 4/9$.

La matrice di iterazione del metodo di Jacobi a blocchi è data dalla matrice tridiagonale a blocchi con blocchi diagonali nulli, blocchi sopra diagonali uguali a $\left[\begin{smallmatrix} -1/8 & 0 \\ 3/8 & 0 \end{smallmatrix}\right]$, e blocchi sottodiagonali $A^{-1}B^T = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 3/8 \\ 0 & -1/8 \end{smallmatrix}\right]$. I cerchi di Gerschgorin per questa matrice hanno centri 0 e tutti quelli relativi alle righe dalla terza alla terzultima hanno raggio $3/8 + 1/8 = 1/2$. Il primo e l'ultimo cerchio hanno raggio $1/8$, il secondo e il penultimo hanno raggio $3/8$. Quindi il raggio spettrale è minore o uguale a $1/2$. Se la matrice fosse irriducibile, il terzo teorema di Gerschgorin garantirebbe che non ci sono autovalori di modulo $1/2$.

Verifichiamo se la matrice è o meno irriducibile. Dalla sua struttura si vede che nel grafo diretto associato ci sono archi che connettono ogni nodo dispari col nodo dispari successivo e col nodo pari precedente, cioè il nodo $2i+1$ si collega col nodo $2i+3$ e col nodo $2i$, quando i valori $2i+3$ e $2i$ sono compresi tra 1 e n, mentre ogni nodo pari si connette al dispari successivo e al pari precedente, cioè il nodo $2i$ si collega ai nodi $2i+1$ e a $2i-1$ quando questi sono compresi tra 1 e n. Per cui ogni nodo dispari si collega a tutti i nodi dispari successivi, ogni nodo pari si collega a tutti i pari precedenti, da un nodo pari si può passare al dispari successivo e da un nodo dispari al pari precedente. Tutti i nodi sono quindi raggiungibili da ogni altro nodo tranne il primo e l'ultimo che non sono raggiungibili. Infatti la prima e l'ultima colonna della matrice sono nulle. Quindi manca la riducibiità della matrice. In effetti il grafo associato è formato da tre componenti connesse, una formata dal singolo nodo 1, una formata dal singolo nodo n e una formata dai rimanenti nodi $2, \ldots, n-1$. Se la matrice viene perturbata ponendo uguale ad $\epsilon \neq 0$ gli elementi di posto $(2,1)$ e $(n-1,n)$, la nuova matrice così ottenuta è irriducibile poiché al grafo associato sono stati aggiunti due archi che collegano la componente connessa formata dai nodi $2, \ldots, n-1$ al primo e ultimo nodo. Il terzo teorma di Gerschgorin si può allora applicare e si ha che se $\epsilon \le 1/8$ tutti i raggi dei cerchi di Gerschgorin valgono al più $1/2$ mentre il primo e l'ultimo sono minori di $1/2$. Per cui gli autovalori hanno modulo minore di $1/2$ per ogni ϵ di modulo al più $1/8$. Facendo tendere ϵ a zero, per la continuità degli autovalori si conclude che anche la matrice originale ha raggio spettrale di modulo strettamente minore di $1/2$.

La matrice J di iterazione del metodo di Jacobi applicato al sistema con $\widetilde{H}$ è tridiagonale con elementi principali nulli, elementi sotto diagonali uguali a $-1/3$, elementi sopra diagonali uguali a $-1/3$ ad eccezione dell'elemento in posizione $(1,2)$ che vale -1. Vale cioè

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & & & \\ -1/3 & 0 & -1/3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & -1/3 \\ & & & -1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

Il secondo teorema di Gerschgorin garantisce che il raggio spettrale di questa matrice è minore di 1 e quindi il metodo di Jacobi è convergente. Una stima del raggio spettrale si può ottenere considerando la matrice ottenuta moltiplicando la prima riga per $\epsilon > 0$ e dividendo la prima colonna per ϵ. Questa matrice ha gli stessi autovalori di J però il primo cerchio di Gerschgorin ha raggio $r_1 = \epsilon$ mentre il secondo ha raggio $r_2\epsilon^{-1}/3 + 1/3$. La condizione $r_1 = r_2$ fornisce il valore ottimale $\epsilon = (1 + \sqrt{13})/6$ che costituisce una limitazione superiore al raggio spettrale. □

Esercizio 6 Sia $A = (a_{i,j})$ la matrice $n \times n$, $n > 4$, di elementi $a_{1,1} = 1$, $a_{i,i} = 2$ per $i = 2, \ldots, n$, $a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = -1$ per $i = 1, \ldots, n-1$, $a_{1,n} = a_{n,1} = 1$, $a_{i,j} = 0$ altrove.

a) Verificare che valgono le condizioni sufficienti per l'esistenza e unicità della fattorizzazione LU.

b) Scrivere la matrice elementare di Gauss E_1 che trasforma la prima colonna di A nel vettore $(1, 0, \ldots, 0)^T$, e si calcoli $A_1 = E_1 A$.

c) Scrivere la matrice L e la matrice U della fattorizzazione LU di A.

d) Dare una maggiorazione al numero di condizionamento di A in norma infinito.

Soluzione

La matrice ha la forma

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & & & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 2 & -1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

a) È sufficiente far vedere che le sottomatrici principali di testadi ordine al più $n-1$ sono non singolari. Ciascuna di queste matrici è irriducibile, inoltre i cerchi di Gerschgorin dal primo al penultimo contengono 0 sul bordo, mentre l'ultimo cerchio di Gerschgorin di centro 2 e raggio 1 non contiene 0. Quindi per il terzo teorema di Gerschgorin 0 non può essere autovalore della sottomatrice.

b) Vale

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ 1 & 1 & & & & \\ 0 & & 1 & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ 0 & & & & 1 & \\ -1 & & & & & 1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = E_1 A = \left[\begin{array}{c|c} 1 & -1 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \quad 1 \\ \hline 0 & B \end{array}\right]$$

dove B è la matrice $(n-1)\times(n-1)$ con la stessa struttura di A

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & & & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 2 & -1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

c) Procedendo induttivamente si ottiene l'espressione di U

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ & 1 & -1 & \ddots & 0 & 1 \\ & & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & -1 & 1 \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & & -n+4 \end{bmatrix}$$

Mentre per la matrice $L=(l_{i,j})$ sappiamo dalla teoria che $l_{i,j}=-(E_j)_{i,j}$, cioè vale

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ -1 & 1 & & & & \\ 0 & -1 & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \\ 0 & & & -1 & 1 & \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si poteva dedurre questa struttura osservando che U si può scrivere come $D=$diag$(1,\dots,1,4-n)\hat{U}$ dove $\hat{U}$ differisce da U solo nell'ultimo elemento diagonale che vale 1. Allora, dal fatto che $A=A^T$ si deduce che $LD\hat{U}=\hat{U}^TDL^T$ da cui, avendo $\hat{U}$ uni sulla diagonale, dall'unicità della fattorizzazione LU ne segue $\hat{U}^T=L$, cioè $A=LDL^T$.

Una soluzione più rapida si può ottenere nel modo seguente. La sottomatrice principale di testa di dimensione $n-1$ di A si può fattorizzare come $L_{n-1}L_{n-1}^T$, dove L_{n-1} è la matrice bidiagonale inferiore di dimensione $n-1$ con 1 sulla diagonale e -1 sulla sotto diagonale. Basta allora cercare la fattorizzazione

$$A = \begin{bmatrix} L_{n-1} & \\ u^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{n-1}^T & v \\ & w \end{bmatrix}$$

si ottiene allora $L_{n-1}v=b$, $b=(1,0,\dots,0,-1)^T$ e $u^TL^T=b^T$ che danno $u=v=(1,\dots,1,0)^T$. Da cui segue $w=2-u^Tv=4-n$.

d) Vale $\mathrm{cond}(A)=\|A\|_\infty\|A^{-1}\|_\infty$. Inoltre, $\|A\|_\infty=4$. Basta allora maggiorare $\|A^{-1}\|_\infty$. Dalla fattorizzazione $A=LDL^T$ segue che $\|A^{-1}\|_\infty\le\|L^{-1}\|_\infty\|L^{-1}\|_1$.

La matrice L^{-1} ha elementi uguali ad 1 nella parte triangolare inferiore eccetto che sull'ultima riga dove ha elementi $(-n+2, -n+1, \ldots, -2, -1, 0, 1)$, ne segue che $\|L^{-1}\|_\infty = 1 + \sum_{i=1}^{n-2} i$ mentre $\|L^{-1}\|_1 = 2n - 3$. Si conclude che $\mathrm{cond}(A) \le 2(2n-3)(n^2 - 3n + 4)$. $\square$

Esercizio 7 Si dica, motivando la risposta, quali delle seguenti funzioni è una norma vettoriale su $\mathbb{R}^n$ per $n > 2$.

- $|x_1| + |x_n|$
- $\max_i |x_i| + \min_i |x_i|$
- $|x_1| + \max |x_i|$

Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e si dica, motivando la risposta, se può esistere una norma indotta tale che separatamente

- $\|A\| = 4$
- $\|A\| = 2 + 10^{-20}$
- $\|A\| = 2$

Soluzione

La prima funzione non è norma vettoriale poichè vale zero sui vettori non nulli che hanno la prima e l'ultima componente nulla. La seconda funzione non soddisfa la diseguaglianza triangolare. Un esempio è dato da $x = (1, 0, 1)$, $y = (0, 1, 1)$, $x + y = (1, 1, 2)$. Vale $\|x\| = \|y\| = 1$, mentre $\|x + y\| = 3$ che è assurdo. La terza funzione è una norma. Infatti è sempre non negativa, se $x = 0$ vale chiaramente $\|x\| = |x_1| + \max |x_i| = 0$; se $\|x\| = 0$ allora $\max |x_i| = 0$ e quindi $x_i = 0$ per ogni i. Vale inoltre $\|\alpha x\| = |\alpha x_1| + \max |\alpha x_i| = |\alpha| \cdot |x_1| + |\alpha| \cdot \max |x_i| = |\alpha| \cdot \|x\|$. Vale anche la diseguaglianza triangolare essendo $\|x+y\| = |x_1+y_1| + \max |x_i+y_i| \le |x_1| + |y_1| + \max |x_i| + \max |y_i| = \|x\| + \|y\|$.

La matrice A ha autovalore 2 con molteplicità algebrica 2 e geometrica 1. Il suo raggio spettrale è dunque 2. Per un noto teorema, per ogni $\epsilon > 0$ esiste una norma indotta tale che $\|A\| \le \rho(A) + \epsilon$. Dalla dimostrazione di quel teorema segue che se c'è un autovalore dimodulo uguale al raggio spettrale che appartiene ad un blocco di Jordan di dimensione maggiore di 1 allora esiste una norma uguale a $\rho(A) + \epsilon$. Quindi le prime due uguaglianze sono vere. La terza è falsa.

Infatti, essendo la forma di Jordan di A uguale a

$$J = S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

esisterebbe una norma indotta di J uguale a 2. Per questo si ricorda che l'applicazione $J \to \|SJS^{-1}\| = \|A\|$ è una norma. Quindi $B = \frac{1}{2}J$ avrebbe norma 1, e ogni potenza positiva di B avrebbe norma al più come si può vedere induttivamente essendo $\|B^{k+1}\| \le \|B^k\| \cdot \|B\| \le \|B^k\|$. Quindi ogni potenza positiva di

B avrebbe necessariamente elementi limitati superiormente in modulo da una costante. Ciò è chiaramente falso per la matrice B^k essendo $B^k = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
$\square$

Esercizio 8 Sia $A = (a_{i,j})$ la matrice $n \times n$, $n \geq 2$, tale che $a_{i,i} = 1$ per $i = 1, \ldots, n$, $a_{1,i} = a_{i,1} = \alpha \neq 0$ per $i = 2, \ldots, n$, $a_{i,j} = 0$ altrimenti. Si denotino con J e G le matrici di iterazione rispettivamente dei metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel applicati al sistema lineare $Ax = b$.

a) Determinare J e G e dimostrare che J ha rango 2 mentre G ha rango 1.

b) Determinare il raggio spettrale di J e di G e dare condizioni necessarie e sufficienti di convergenza per i metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel

c) Determinare una matrice di Householder P tale che la matrice $B = PAP^T$ abbia la forma

$$B = \begin{bmatrix} 1 & \theta & & & \\ \theta & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

e si confronti il raggio spettrale delle matrici di iterazione dei metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel relativi a B con quelli relativi ad A.

Soluzione

a) La matrice A ha la forma

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \ldots & \alpha \\ \alpha & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \alpha & & & 1 \end{bmatrix}$$

Quindi per definizione vale

$$J = -\begin{bmatrix} 0 & \alpha & \ldots & \alpha \\ \alpha & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \alpha & & & 0 \end{bmatrix}, \quad G = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \alpha & & & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & \alpha & \ldots & \alpha \\ 0 & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} = uv^T$$

dove $u = [-1, \alpha, \ldots, \alpha]^T$ e $v^T = [0, \alpha, \ldots, \alpha]$. Chiaramente $G = uv^T$ ha rango 1. Inoltre J si lascia scrivere come $J = e_1 v^T + v e_1^T$, dove $e_1 = [1, 0, \ldots, 0]^T$ e quindi ha rango 2.

b) La matrice $G = uv^T$ ha $n-1$ autovalori nulli e un autovalore uguale a $v^T u = \alpha^2(n-1)$. Quindi il suo raggio spettrale è $\alpha^2(n-1)$. Poiché v è ortogonale a e_1, rappresentando la matrice J in una base in cui il primo vettore è e_1 e il secondo vettore è $\hat{v} = (1/\theta)v$, $\theta = \alpha\sqrt{n-1}$, la matrice J si trasforma in

$\theta e_1 e_2^T + \theta e_2 e_1^T$ ed ha $n-2$ autovalori nulli e due autovalori uguali a $\pm\theta$. Quindi il raggio spettrale di J è $|\alpha|\sqrt{n-1}$. Si può concludere che i metodi di Jacobi e di Gauss-seidel sono convergenti se e solo se $|\alpha| < 1/\sqrt{n-1}$. Inoltre vale $\rho(G) = \rho(J)^2$, quindi il metodo di Gauss-Seidel, se convergente, ha velocità di convergenza doppia rispetto al metodo di Jacobi

c) È sufficiente scegliere una matrice di Householder Q di ordine $n-1$, tale che $Qe = \sqrt{n-1}e_1$, dove $e, e_1 \in \mathbb{R}^{n-1}$ sono rispettivamente il vettore di tutti uni e il primo versore della base canonica. Ponendo $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}$, P risulta di Householder e vale $PAP^T = B$ con $\theta = \alpha\sqrt{n-1}$. Denotando con $\hat{J}$ e $\hat{G}$ le matrici di iterazione dei metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel applicati a un sistema con matrice B, risulta $\rho(\hat{J}) = |\theta| = |\alpha|\sqrt{n-1}$, $\rho(\hat{G}) = |\theta^2| = \alpha^2(n-1)$. I raggi spettrali sono gli stessi del caso precedente. □

Esercizio 9 Si consideri il sistema $Ax = b$ dove A è la matrice $n \times n$ definita da $a_{i,i} = \alpha_i$ per $i = 1, \ldots, n$, $a_{i+1,i} = \beta_i$ per $i = 1, \ldots, n-1$, $a_{i,n} = \gamma_i$ per $i = 1, \ldots, n-1$, $a_{i,j} = 0$ altrove.

a) Dire sotto quali condizioni esistono le fattorizzazione LU di A e di A^T e determinare i fattori L ed U in entrambi i casi.

b) Si utilizzino le due fattorizzazioni LU per la risoluzione del sistema lineare $Ax = b$ descrivendo esplicitamente i metodi di risoluzione. Si confrontino in base al loro costo computazionale i metodi così ottenuti.

Soluzione

□

Esercizio 10 Per $n \geq 5$ si consideri il sistema $Ax = f$ dove $x = (x_i), f = (f_i) \in \mathbb{R}^n$ e A è la matrice $n \times n$ definita da

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & & d_1 \\ c_1 & a_2 & b_2 & O & \vdots \\ & c_2 & \ddots & \ddots & d_{n-2} \\ & O & \ddots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & c_{n-1} & a_n \end{bmatrix}$$

a) Si descriva la matrice e il vettore dei termini noti del sistema ottenuto dopo un passo di eliminiazione gaussiana applicata a $Ax = f$ e si valuti il costo del loro calcolo. Assumendo che gli elementi pivot siano tutti non nulli, si determini il costo computazionale della risoluzione del sistema $Ax = f$ mediante eliminazione gaussiana.

b) Si consideri il sistema ottenuto da $Ax = f$ scambiando l'ordine delle equazioni e delle incognite con la permutazione $\sigma_i = n - i + 1$, $i = 1, \ldots, n$ e si risponda alle domande del punto a) per il sistema così ottenuto. Si confrontino i costi computazionali.

c) Con $a = (3, 3, \ldots, 3, 1)$, $c = (-1, \ldots, -1)$, $b = (-1, \ldots, -1, -2)$, $d = (-1, \ldots, -1)$, $f = (n-1, n-2, \ldots, 1, -1)$ dimostrare che l'eliminazione gaussiana può essere portata a termine sia per il sistema al punto a) che per il sistema al punto b) e si valutino e confrontino i costi computazionali in questo caso.

Soluzione

□

Esercizio 11 Sia $A = (a_{i,j})$ la matrice $n \times n$ con elementi $a_{i+1,i} = 1, a_{i,n} = \alpha$ per $i = 1, \ldots, n-1$, $a_{i,j} = 0$ altrove.

a) Dare condizioni sufficienti su α affinché gli autovalori di A abbiano modulo minore di 1.

b) Dare condizioni sufficienti su α affinché il metodo di Jacobi applicato al sistema lineare $(I + A)x = b$ sia convergente.

c) Dare condizioni sufficienti su α affinché il metodo di gauss-seidel applicato al sistema lineare $(I + A)x = b$ sia convergente.

d) Per $\alpha = 1/n$ dire di quanto viene ridotto l'errore iniziale dopo n passi del metodo di Gauss-seidel e del metodo di Jacobi.

Soluzione

□

Esercizio 12 Dato un numero reale α e un intero $n > 2$ sia $M = (m_{i,j})$ la matrice $n \times n$ triangolare superiore con elementi $m_{i,j} = 1$ per $i \leq j$. Sia inoltre $N = \alpha uv^T$ dove $u = (u_i), v = (v_i) \in \mathbb{R}^n$ sono tali che $u_i = i$ per $i = 1, \ldots, n$ e $v_i = (-1)^{i+1}$ per $i = 1, \ldots, n-1$ e $v_n = 0$. Si consideri il sistema lineare $Ax = b$, con $b \in \mathbb{R}^n$, dove $A = M - N$, e il metodo iterativo $x^{(k+1)} = M^{-1}(Nx^{(k)} + b)$.
a) Dire per quali valori di α il metodo iterativo è convergente.

b) Sia $\alpha = 3/4$ e $n = 1000$. Calcolare il raggio spettrale $\rho(P)$ della matrice $P = M^{-1}N$ e dimostrare che esiste una norma indotta $\|\cdot\|$ tale che $\|P\| = \rho(P)$. Dire quanti passi occorrono per ridurre l'errore iniziale di un fattore 10^{-6} utilizzando la norma individuata.

c) Sia $\alpha = 3/4$ e $n = 1001$. Calcolare il raggio spettrale $\rho(P)$ della matrice $P = M^{-1}N$ e dire se esiste una norma indotta $\|\cdot\|$ tale che $\|P\| = \rho(P)$. Dire quanti passi occorrono per ridurre l'errore iniziale di un fattore 10^{-6} utilizzando la norma infinito.

Soluzione

□

Esercizio 13 Dati i vettori $u = (u_i), v = (v_i), w = (w_i), z = (z_i), b = (b_i) \in \mathbb{R}^n$ si consideri il sistema di $2n$ equazioni e $2n$ incognite $Ax = b$ dove

$$A = \begin{bmatrix} I & \alpha uv^T \\ \alpha wz^T & I \end{bmatrix}.$$

a) Valutare i raggi spettrali $\rho(J)$ e $\rho(G)$ delle matrici di iterazione J e G rispettivamente dei metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel applicati al sistema $Ax = b$.

In particolare imostrare che $\rho(G) = \rho(J)^2$ e dare condizioni sufficienti su α per la convergenza.

b) Sia $\alpha = 1/(2\sqrt{n})$, e $u_i = 1$, $v_i = i$, $w_i = 1/i$, $z_i = (-1)^i$ per $i = 1, \ldots, n$. Dire quante iterazioni del metodo di Jacobi e del metodo di Gauss-Seidel sono sufficienti per ridurre l'errore iniziale di un fattore 10^{-6} se $n = 1000$ e se $n = 1001$.

c) Dire se esiste una norma indotta $\|\cdot\|$ tale che $\|J\| = \rho(J)$. Dire se esiste una norma indotta $\|\cdot\|$ tale che $\|G\| = \rho(G)$.

Soluzione

$\square$

Esercizio 14 Sia $A = (a_{i,j})$ la matrice $n \times n$ tale che $A_{i+1,i} = 1$ per $i = 1, \ldots, n-1$, $a_{1,i} = u_i$, $a_{i,n} = v_i$, dove $u_i, v_i \in \mathbb{R}$ per $i = 1, \ldots, n$, con $u_n = v_1$, e $a_{i,j} = 0$ altrove.

a) Dare condizioni sufficienti affinché esista la fattorizzazione LU di A, descrivere un algoritmo per il calcolo di L e di U valutandone il costo computazionale

b) Costruire un algoritmo per la risoluzione del sistema $Ax = b$ che richieda al più $\alpha n + \beta$ operazioni aritmetiche con α, β costanti, basato sui risultati del punto a).

Soluzione

$\square$

Esercizio 15 Sia $A = (a_{i,j})$ una matrice ad elementi reali bidiagonale $n \times n$, cioè tale che $a_{i,j} = 0$ se $i \neq j$ e $i \neq j-1$. Si ponga $a_{i,i} = \alpha_i$ per $i = 1, \ldots, n$ e $a_{i,i+1} = \beta_i$ per $i = 1, \ldots, n-1$, $\beta_0 = \beta_n = \alpha_0 = 0$.

Dire, motivando le risposte, se le seguenti diseguaglianze sono valide

$$\|A\|_2 \geq \max_i \sqrt{\alpha_i^2 + \beta_{i-1}^2}$$

$$\|A\|_2 \leq \max_i \sqrt{\alpha_i^2 + \beta_{i-1}^2 + |\alpha_{i-1}\beta_{i-1}| + |\alpha_i \beta_i|}$$

Sia B una matrice $n \times n$ ad elementi reali. Determinare due matrici di Householder P_1 e Q_1 tali che $B_1 = P_1 B Q_1^T$ abbia la prima colonna uguale a $\alpha_1 e_1$ e la prima riga uguale a $\alpha_1 e_1^T + \beta_1 e_2^T$, dove e_1 e e_2 sono i primi due vettori della base canonica. Si descriva un algoritmo per calcolare una matrice bidiagonale A tale che $A = PBQ^T$, dove P e Q sono matrici ortogonali e si valuti il costo computazionale del calcolo degli elementi diagonali e sopradiagonali di A.

Soluzione

□

Esercizio 16 La matrice A reale $n \times n$ ha m autovalori uguali ad $a \in \mathbb{R}$ e $n-m$ autovalori uguali a $b \in \mathbb{R}$, dove $1 \le m < n$.

a) Dire sotto quali condizioni su a e b esiste un $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che le successioni definite da $x^{(k+1)} = G_\alpha(x^{(k)})$ con $G_\alpha(x) = x + \alpha(f - Ax)$, convergono alla soluzione del sistema $ax = f$, con $f \in \mathbb{R}^n$ per ogni $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$. Nell'ipotesi di esistenza determinare il valore di α che massimizza la velocità di convergenza.

b) Dire sotto quali condizioni su a e b esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che le successioni generate da $x^{(k+1)} = G_\alpha(G_\beta(x^{(k)}))$ convergono alla soluzione del sistema per ogni $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$. In caso di convergenza determinare i valori ottimali di α e β.

c) Con i valori di α e β ottenuti al punto b) studiare la velocità di convergenza delle successioni al punto b) se A ha m autovalori in $[a-\epsilon, a+\epsilon]$ e $n-m$ autovalori in $[b-\epsilon, b+\epsilon]$, dove $|a|, |b| > 1$ e $0 < \epsilon < |a-b|/4$.

Soluzione

□

Esercizio 17 Siano $a \in \mathbb{C}^n$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ tali che $a = x + iy$, con i unità immaginaria. Dire quali delle seguenti applicazioni sono norme

$$\begin{aligned} &a \to \|x\|_1 + \|y\|_1, \\ &a \to (\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2)^{1/2}, \\ &a \to \textstyle\sum_{j=1}^n j|a_j|. \end{aligned}$$

per le applicazioni che risultano norme esprimere la in funzione degli elementi della matrice.

Soluzione

□

Esercizio 18 Sia $n \ge 3$ intero e $u = (u_i), v = (v_i) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $u, v \ne 0$. Si consideri la matrice $B(u,v) = (b_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che $b_{1,i+1} = v_i$, $b_{i+1,1} = u_i$ per $i = 1, \ldots, n-1$, $b_{i,j} = 0$ altrove.

a) Si dimostri che esiste una matrice di Householder P tale che $PB(u,v)P^T = B(\alpha e_1, \widehat{v})$ dove $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)^T \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $\widehat{v} \in \mathbb{R}^{n-1}$. Si deduca che B ha $n-2$ autovalori nulli e due autovalori di modulo $|v^T u|^{1/2}$.

b) Si determinino i raggi spettrali delle matrici J e G rispettivamente dei metodi di Jacobi e di Gauss Seidel applicati al sistema $Ax = b$ dove $A = I - B$. Si diano condizioni sui vettori u e v per la convergenza dei due metodi e si confrontino le velocità di convergenza.

c) Posto $u_i = i$, per $i = 1, \ldots, n-1$, e $v_i = 1$ se $i = 0$ mod 4, o se $i = 1$ mod 4, $v_i = -1$ altrimenti, si dica se si ha convergenza dei metodi di Jacobi e di Gauss Seidel per $n = 4000$ e $n = 4001$. Nel caso di convergenza si dica per i due metodi quante iterazioni sono sufficienti a ridurre l'errore iniziale di un fattore almeno 10^{10} in norma infinito.

Soluzione

□

Esercizio 19 Sia $A_n(\alpha,\beta,\gamma)=(a_{i,j})$ la matrice $n\times n$ tale che $a_{1,1}=\alpha$; $a_{i,i}=1$, $a_{1,i}=\beta$, $a_{i,i-1}=\gamma$, per $i=2,\ldots,n$; $a_{i,j}=0$ altrove, dove $\alpha,\beta,\gamma\neq 0$ sono reali.
a) Si applichi un passo di eliminazione gaussiana al sistema $A_n(\alpha,\beta,\gamma)x=b$, per $b\in\mathbb{R}^n$ e si dimostri che la matrice del sistema di dimensione $n-1$ ottenuto eliminando l'incognita x_1 ha la forma $A_{n-1}(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$ per opportuni $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$.
b) Si dimostri che se $\alpha>-\gamma>0$ e $\beta>\alpha(1+1/\gamma)$ allora la strategia del massimo pivot parziale non comporta permutazioni di righe.
c) si valuti il costo computazionale della fase di eliminazione e della fase di sostituzione all'indietro e si descriva un algoritmo di costo lineare in n per la risoluzione del sistema.

Soluzione

□

Esercizio 20 Sia A la matrice tridiagonale $n\times n$, dove n è pari, tale che $a_{i,i}=(-1)^i\alpha$, per $i=1,\ldots,n$, $a_{i,i+1}=a_{i+1,i}=1$ per $i=1,\ldots,n-1$, dove $\alpha\in\mathbb{R}$. Per la risoluzione del sistema $Ax=b$ si consideri il metodo iterativo $Mx_{k+1}=Nx_k+b$, ottenuto dal partizionamento $A=M-N$, dove M è la matrice diagonale a blocchi 2×2 con blocchi diagonali $\begin{bmatrix}-\alpha & 1\\ 1 & \alpha\end{bmatrix}$.
a) Dimostrare che la successione $\{x_k\}$ è ben definita per ogni $\alpha\in\mathbb{R}$.
b) Dare condizioni sufficienti su α per la convergenza del metodo e dare una limitazione superiore al raggio spettrale della matrice di iterazione.
c) Confrontare il metodo col metodo di Jacobi, più precisamente mostrare che esistono valori di α per cui il metodo è convergente mentre il metodo di Jacobi non lo è.

Soluzione

□

Esercizio 21 Dire se le seguenti applicazioni sono norme, e in caso affermativo determinarne la norma indotta sulle matrici.
a) $x\to\sum_{i=1}^{n-1}|x_i-x_{i+1}|$
b) $x\to|x_n|+\sum_{i=1}^{n-1}|x_i-x_{i+1}|$
c) $x\to\min_i|x_i|+\sum_{i=1}^{n-1}|x_i-x_{i+1}|$

Soluzione

□

Esercizio 22 Sia $A=(a_{i,j})$ la matrice tridiagonale simmetrica $n\times n$, $n\geq 2$, con elementi $a_{1,1}=\alpha$, $a_{i,i}=2$, $i=2,\ldots,n$, $a_{i,i+1}=1$, $i=1,\ldots,n-1$.

a) Si dimostri che $\det A = \alpha n - n + 1$.
b) Dare condizioni necessarie e sufficienti su α affinché esista e sia unica la fattorizzazione LU di A.
c) Si descriva un algoritmo per il calcolo di L e di U che richieda non più di $2n - 2$ operazioni aritmetiche.
d) Si dica per quali valori di α tutti gli elementi diagonali di U sono non negativi.
e) Si dimostri che per ogni α esiste ed è unica la fattorizzazione UL di A dove U è triangolare superiore con elementi diagonali uguali a 1 e L è triangolare inferiore.

Soluzione

□

Esercizio 23 Sia A una matrice reale simmetrica $n \times n$ con autovalori λ_i, $i = 1, \ldots, n$ e autovettori ortonormali u_i, $i = 1, \ldots, n$. Per la risoluzione del sistema $Ax = b$ si consideri il metodo iterativo $x_{k+1} = M^{-1}(Nx_k + b)$, dove $A = M - N$ e $\det M \neq 0$.
a) Si diano condizioni necessarie e sufficienti sui λ_i affinché il metodo ottenuto con $M = I$ sia convergente.
b) Si diano condizioni necessarie e sufficienti sui λ_i affinché esista un numero reale α tale che il metodo ottenuto con $M = \alpha I$ sia convergente.
c) Supponendo $0 < \lambda_i \leq \lambda_{i+1} < 1$ per $i = 1, 2, \ldots, n-1$ e assumendo di conoscere λ_1 e u_1, si determinino i valori di α per cui il metodo iterativo ottenuto con $M = I + \alpha u_1 u_1^T$ sia convergente. Si determini un valore di α che massimizzi la velocità di convergenza del metodo.
d) Supponendo $\lambda_i \leq \lambda_{i+1} < 1$ per $i = 1, 2, \ldots, n-1$ si diano condizioni necessarie e sufficienti sugli autovalori di A affinché esista un α tale che il metodo ottenuto con $M = I + \alpha u_1 u_1^T$ sia convergente.

Soluzione

□

Esercizio 24 Per n intero positivo, siano $u, v, b \in \mathbb{R}^n$ e D una matrice $n \times n$ diagonale tale che $\det D \neq 0$. Per risolvere il sistema lineare $Ax = b$ con $A = D + uv^T$ si consideri il metodo iterativo $x_{k+1} = M^{-1}(Nx_k + b)$ dove $A = M - N$ e $M = \alpha D$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$.
a) Dire sotto quali condizioni su u, v, D esiste un α per cui il metodo iterativo è convergente e determinare il raggio spettrale di $P = M^{-1}N$.
b) Determinare il valore di α che minimizza il raggio spettrale di P.
c) Si dimostri che per $\alpha = 1$ l'errore di approssimazione $e_1 = x_1 - x$ ottenuto dopo un passo a partire da un qualunque x_0 è proporzionale a $D^{-1}u$. Se $v = D^{-1}u$ si usi questa proprietà per determinare x_0 tale che $e_1 = 0$.

Soluzione

□

Esercizio 25 Siano $u, v \in \mathbb{R}^n$, $u = (u_i)$, $v = (v_i)$, $u, v \neq 0$ e $A = I_n - uv^T$ dove $n \geq 2$ e I_n è la matrice identica di ordine n.
a) Si diano condizioni su u e v affinché esista e sia unica la fattorizzazione LU di A.
b) Si esprima in funzione di u e v la matrice elementare di Gauss L_1 per cui $\widehat{A} = L_1 A$ ha la prima colonna proporzionale ad e_1.
c) Si dimostri che la sottomatrice principale di coda (complemento di Schur) di $\widehat{A}$ di dimensione $n-1$ è del tipo $I_{n-1} - \hat{u}\hat{v}^T$ e si diano espressioni per $\hat{u}$ e $\hat{v}$.
d) Si dia un algoritmo per il calcolo degli elementi delle matrici L ed U della fattorizzazione $A = LU$ cercando di minimizzare il numero delle operazioni aritmetiche impiegate. Se ne valuti il costo computazionale.

Soluzione

□

Esercizio 26 Sia n un intero positivo e siano $x_i \in (0, 1)$, $i = 0, \ldots, n$ tali che $x_i \neq x_j$ per $i \neq j$. Si definiscano inoltre le funzioni $g_i(x) = x^i + x^{-i}$, $i = 0, \ldots, n$.
a) Si consideri la matrice $(n+1) \times (n+1)$ $V(x) = (v_{i,j})_{i,j=0,n}$ tale che $v_{i,j} = g_j(x_i)$ per $i \neq n$ e $v_{n,j} = g_j(x)$. Si dimostri che se $\det V(\xi) = 0$ allora $\det V(\xi^{-1}) = 0$ e che $\det V(\xi) = 0$, $\xi \in (0, 1)$ se e solo se $\xi = x_i$.
b) Si dimostri che il problema di interpolazione nello spazio delle funzioni $g_i(x)$, $i = 0, \ldots, n$ relativo ai nodi x_i ha una e una sola soluzione, cioè, per ogni $(n+1)$-upla $y_0, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ esistono unici $a_0, \ldots, a_n$ tali che, posto $\phi(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j g_j(x)$, vale $\phi(x_i) = y_i$, $i = 0, \ldots, n$.
c) Si dia un'espressione per $\phi(x)$ e un algoritmo per il calcolo di $\phi(x)$ in un punto ξ di costo $O(n^2)$.

Soluzione

□

Esercizio 27 Si consideri il sistema lineare $Ax = b$ dove la matrice $n \times n$ $A = (a_{i,j})$ è tale che $a_{i,j} = d_i$ se $i = j$, $a_{1,j} = v_j$, se $j > 1$, $a_{i,1} = u_i$ se $i > 1$ e $a_{i,j} = 0$ altrimenti.
a) Si consideri il metodo iterativo dato dal partizionamento $A = M - N$ con $M = (m_{i,j})$, $m_{1,1} = \alpha$, $m_{i,j} = a_{i,j}$ per $i \geq j$ e $(i, j) \neq (1, 1)$. Dare condizioni sui valori di u_i e v_i affinché esista un α per cui il metodo è convergente.
b) Determinare il valore ottimale di α che massimizza la velocità di convergenza.
c) Se $\alpha = 0$ e $\sum_{i=2}^{n} u_i v_i = 0$ determinare il numero di passi del metodo iterativo sufficienti a ridurre l'errore iniziale di un fattore 10^{-10}.

Soluzione

□

Esercizio 28 Sia $n > 2$ un intero e siano e_i, $i = 1, \ldots, n$ i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^n$.

a) si determinino un vettore $u \in \mathbb{R}^n$ e una costante β tali che la matrice di Householder $P = I - \beta uu^T$ trasformi il vettore $be_1 + e_2$ in αe_1, dove $b, \alpha \in \mathbb{R}$.
b) Sia $A = (a_{i,j})$ la matrice $n \times n$ tale che $a_{i,i} = b_i$, $i = 1, \ldots, n$, $a_{i+1,i} = 1$, $i = 1, \ldots, n-1$, $a_{i,j} = 0$ altrove, dove $b_i \in \mathbb{R}$. Si dimostri che dopo un passo del metodo di Householder per la fattorizzazione QR di $A_1 = A$ la matrice $A_2 = P_1 A_1$ differisce da A solo nella sottomatrice principale di testa 2×2 che vale $\begin{bmatrix} \hat{b}_1 & c_1 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix}$ e si determinino le espressioni di $\hat{b}_1$, c_1 e d_1.
c) Si dimostri che la matrice R della fattorizzazione $A = QR$ è bidiagonale superiore e si descriva un algoritmo per il calcolo dei suoi elementi diagonali e sopra-diagonali di costo computazionale $O(n)$.

Soluzione

$\square$

Esercizio 29 Per $n \geq 2$ intero, sia $U \in \mathbb{R}^{n \times 2}$ tale che $\det U^T U \neq 0$. Si consideri $A = I - UBU^T$ con $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.
a) Dare condizioni necessarie e sufficienti su B affinché A sia: i) simmetrica; ii) ortogonale e simmetrica. In quest'ultimo caso si dica sotto quali condizioni su B la matrice A è di Householder.
b) Nell'ipotesi A ortogonale e simmetrica, sapendo che $X, Y \in \mathbb{R}^{n \times 2}$ sono tali che $Y = AX$, si dimostri che $X^T Y = Y^T X$, $X^T X = Y^T Y$.

Soluzione

$\square$

Esercizio 30 Sia $A = (a_{i,j})$ una matrice reale $n \times n$ tale che $a_{i,j} = 0$ per $i+j > 1+n$ e $a_{i,j} \neq 0$ altrimenti. Si descriva un algoritmo per la risoluzione del sistema $Ax = b$, $b \in \mathbb{R}^n$, che impieghi $O(n^2)$ operazioni aritmetiche. Si scriva una subroutine in Fortran 90 che implementa l'algoritmo. La subroutine prende in input `n`, `a` e `b`, variabili che contengono rispettivamente i valori di n, A e b, e fornisce in output la variabile `x` che contiene la soluzione x del sistema.

Soluzione

$\square$

Esercizio 31 Per $n \geq 4$ intero, si definisca *quasi–elementare* una matrice del tipo $A = I_n - UBV^T$ con $U, V \in \mathbb{R}^{n \times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, I_n matrice identica $n \times n$. Si dimostri che per una matrice quasi elementare A valgono le seguenti proprietà:
a) $Ax = 0$, $x \neq 0 \Rightarrow y = BV^T x \neq 0$, $Cy = 0$, dove $C = I_2 - BV^T U$;
$Cz = 0$, $z \neq 0 \Rightarrow w = Uz \neq 0$, $Aw = 0$.
b) A è invertibile se e solo se C è invertibile e vale $A^{-1} = I_n + UC^{-1}BV^T$.
c) Dare condizioni su $X \in \mathbb{R}^{n \times 2}$ per le quali esiste una matrice quasi elementare A invertibile con $V = (v_{i,j})$, $v_{1,1} = v_{2,2} = 1$, $v_{i,j} = 0$ altrimenti, tale che $Y = AX$ ha elementi nulli dalla terza riga in poi.
d) Dare condizioni su $X, Y \in \mathbb{R}^{n \times 2}$ affinché esista una matrice quasi-elementare invertibile tale che $AX = Y$

Soluzione

$\square$

Esercizio 32 Sia B_n una matrice $n \times n$, si denoti con I_n la matrice identica $n \times n$ e si definisca inoltre la matrice $2n \times 2n$

$$A_{2n} = \begin{bmatrix} I_n & I_n \\ I_n & I_n + B_n \end{bmatrix} \tag{1}$$

Si supponga infine che esista la fattorizzazione LU: $B_n = L_n U_n$.

a) Determinare la fattorizzazione LU: $A_{2n} = L_{2n} U_{2n}$ mettendo in relazione L_{2n} con L_n e U_{2n} con U_n.

b) Si consideri la matrice A_{2n} ottenuta ricorsivamente da (1) ponendo $B_n = A_n$, dove $A_1 = (\alpha)$, per cui, ad esempio,

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+\alpha \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} I_2 & I_2 \\ I_2 & I_2 + A_2 \end{bmatrix}, \quad A_8 = \begin{bmatrix} I_4 & I_4 \\ I_4 & I_4 + A_4 \end{bmatrix}.$$

Dire sotto quali condizioni su esiste la fattorizzazione LU di A_{2n} e si determini tale fattorizzazione; dire inoltre quanto vale $\det A_{2n}$.

c) Si descriva un metodo di costo $O(n)$ operazioni aritmetiche per il calcolo del prodotto di A_{2n} con un vettore b. Per A_{2n} non singolare si descriva un metodo per la risoluzione del sistema $A_{2n}x = b$ e se ne valuti il costo computazionale.

Soluzione

a) Svolgendo n passi di eliminazione gaussiana si ottiene la fattorizzazione

$$A_{2n} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ I_n & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & I_n \\ 0 & B_n \end{bmatrix}$$

da cui

$$A_{2n} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ I_n & \widehat{L}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & I_n \\ 0 & \widehat{U}_n \end{bmatrix}$$

Risulta allora

$$L_{2n} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ I_n & \widehat{L}_n \end{bmatrix}, \quad U_{2n} = \begin{bmatrix} I_n & I_n \\ 0 & \widehat{U}_n \end{bmatrix}$$

b) Alla luce delle considerazioni del punto a) la fattorizzazione LU di A_{2n} esiste se esiste la fattorizzazione LU di A_n e induttivamente, se esiste la fattorizzazione LU di A_2 che esiste per ogni valore di α. le matrici L_{2n} e U_{2n} sono definite ricorsivamente da

$$L_{2n} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ I_n & L_n \end{bmatrix}, \quad U_{2n} = \begin{bmatrix} I_n & I_n \\ 0 & U_n \end{bmatrix}$$

con $U_1 = (\alpha)$. Vale inoltre $\det A_{2n} = \det U_{2n} = \alpha$.

c) Si partizionino i vettori b, x rispettivamente nei due vettori $b_1, b_2 \in \mathbb{R}^n$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$. Alla luce della fattorizzazione

$$A_{2n} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ I_n & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & I_n \\ 0 & A_n \end{bmatrix}$$

Si ottiene $A_n x_2 = b_2 - b_1$ e $x_1 = b_1 - x_2$. □

Esercizio 33 Sia $A = (a_{i,j})$ una matrice reale $n \times n$ tale che $a_{i,j} = 0$ per $i+j > 1+n$ e $a_{i,j} \neq 0$ altrimenti. Si descriva un algoritmo per la risoluzione del sistema $Ax = b$, $b \in \mathbb{R}^n$, che impieghi $O(n^2)$ operazioni aritmetiche. Si scriva una subroutine in Fortran 90 che implementa l'algoritmo. La subroutine prende in input `n`, `a` e `b`, variabili che contengono rispettivamente i valori di n, A e b, e fornisce in output la variabile `x` che contiene la soluzione x del sistema.

Soluzione

□

Esercizio 34 Siano $2 < k < n$ interi e $\alpha > 0$ reale. Sia $A = (a_{i,j})$ la matrice $n \times n$ con elementi $a_{i,i} = \alpha$, $i = 1, \ldots, n$, $a_{i,i+1} = 1$, $i = 1, \ldots, n-1$, $a_{i+k,i} = 1$, $i = 1, \ldots, n-k$, $a_{i,1} = 1$, $i = 2, \ldots, k$, $a_{i,j} = 0$ altrove.
a) Si dimostri che per $\alpha \geq 2$ gli autovalori di tutte le sottomatrici principali di testa di A hanno parte reale positiva e che la fattorizzazione LU di A esiste ed è unica.
b) Descrivere la matrice $(n-1) \times (n-1)$ ottenuta dopo il primo passo di eliminazione gaussiana (complemento di Schur) e individuare un algoritmo per la risoluzione del sistema $Ax = b$, $b \in \mathbb{R}^n$, che richieda un numero di operazioni non superiore a γkn, con γ costante, e con ingombro di memoria non superiore a δn, con δ costante.
c) Si determini un valore di $\alpha < 2$ per cui gli autovalori di tutte le sottomatrici principali di testa di A hanno parte reale positiva.

Soluzione

□

Esercizio 35 Per $n > 2$ intero, si consideri la matrice $n \times n$,

$$C = (c_{i,j}) = \begin{bmatrix} 0 & & & -1 \\ 1 & 0 & & -1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

tale che $c_{i+1,i} = 1$, $i = 1, \ldots, n-1$, $c_{i,n} = -1$, $i = 1, \ldots, n$, $c_{i,j} = 0$ altrove. Sia inoltre $A = \alpha I - C$, con $\alpha > 0$ parametro reale.
a) Si dimostri che gli autovalori di C sono le radici $(n+1)$-esime dell'unità diverse da 1.

b) Si studi la convergenza del metodo iterativo dato dal partizionamento $A = M - N$, $M = \alpha I$, $N = C$, per la risoluzione del sistema $Ax = b$, al variare di α.
c) Si studi la convergenza del metodo di Gauss Seidel applicato al sistema $Ax = b$ al variare di α e si confrontino i risultati con quelli del punto b).

Soluzione

□

Esercizio 36 Sia $m \geq 2$ un numero intero e si definiscano le matrici $m \times m$ $B = (b_{i,j})$, $E = (e_{i,j})$ tali che $b_{i,i} = \alpha$, $b_{i,i+1} = -1$, $i = 1, \ldots, m-1$, $b_{i,j} = 0$ altrimenti; $e_{m,1} = -1$, $e_{i,j} = 0$ altrimenti. Si consideri la matrice $2m \times 2m$ definita da

$$A = \begin{bmatrix} B & E \\ E^T & B^T \end{bmatrix}$$

e il sistema lineare $Ax = b$. Dire per quali valori di α reale i metodi iterativi basati sul partizionamento $A = M - N$ sono convergenti alla soluzione del sistema e si valuti il raggio spettrale delle relative matrici di iterazione
a) $M = \alpha I$; b) $M = \begin{bmatrix} \alpha I & 0 \\ E^T & B^T \end{bmatrix}$; c) $M = \begin{bmatrix} \alpha I & E \\ E^T & \alpha I \end{bmatrix}$.
Per $\alpha = 2$ si dica quale dei metodi è più conveniente per ridurre l'errore iniziale di un fattore 10^{-10} e si valuti il numero di operazioni necessario a tale scopo.

Soluzione

□

Esercizio 37 Sia $n \geq 2$ un intero e $B = (b_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b_{i,j} \geq 0$.

a) Se $Be = e$ con $e = (1, 1, \ldots, 1)^T$, si dimostri che $A = \alpha I - B$ è invertibile per $\alpha > 1$ e gli autovalori di A e di A^{-1} hanno parte reale positiva.

b) Si dimostri la tesi del punto a) nell'ipotesi in cui esista $v = (v_i) \in \mathbb{R}^n$ tale che $Bv = v$ e $v_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$.

c) Si dimostri che esiste ed è unica la fattorizzazione LU di A sia nel caso a) che nel caso b), e che L ed U hanno elementi positivi sulla diagonale e non positivi fuori dalla diagonale.

Soluzione

□

Esercizio 38 Siano $e_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, n$, i versori della base canonica con $n \geq 2$.
a) Dato $w \in \mathbb{R}^n$ dire per quali valori di k esiste una matrice elementare non singolare $E = I - ue_k^T$, con $u \in \mathbb{R}^n$, tale che $Ew = \alpha e_1 + \beta e_k$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e si esprima u in funzione di w e k. Scrivere il numero di condizionamento $\mu_\infty(E)$ in norma infinito di E e determinare dei valori di k, α, β che minimizzino $\mu_\infty(E)$.
b) Per i valori di k, α, β così trovati costruire una matrice ortogonale Q tale che $QEw = \gamma e_1$ e dare maggiorazioni a $\mu_\infty(QE)$.

c) Utilizzare i risultati dei punti a) e b) per costruire un metodo per la riduzione di una matrice A in forma triangolare superiore mediante trasformazioni di righe e valutarne il costo computazionale.

Soluzione

$\square$

Esercizio 39 Siano $A = (a_{i,j})$, $M = (m_{i,j})$, $N = (n_{i,j}) \in \mathbb{C}^{q\times q}$ tali che $A = M - N$, $m_{i,j}n_{i,j} = 0$ per $i, j = 1, \dots, q$ e $n_{i,i} = 0$ per $i = 1, \dots, q$.
Si dimostri che:

a) se A è fortemente dominante diagonale (FDD) o irriducibilmente dominante diagonale (IDD) allora, per $|\lambda| \geq 1$, anche $\lambda M - N$ è rispettivamente FDD o IDD.

b) se A è FDD (IDD) vale $\det M \neq 0$; inoltre in entrambi i casi le successioni di vettori definite da $x_{k+1} = M^{-1}(Nx_k - b)$ convergono alla soluzione del sistema $Ax = b$, per ogni scelta del vettore $x_0 \in \mathbb{C}^q$.

Soluzione

$\square$

Esercizio 40 Sia $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ partizionata in 9 blocchi $A_{i,j}$, $i, j = 1, 2, 3$, dove i blocchi $A_{i,i}$, $i = 1, 2, 3$, sono quadrati e $A_{1,2}, A_{2,3}, A_{3,1}$ sono nulli. Si decomponga A in $A = D - B - C$ dove

$$D = \begin{bmatrix} A_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & A_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & A_{3,3} \end{bmatrix},\ B = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ A_{2,1} & 0 & 0 \\ 0 & A_{3,2} & 0 \end{bmatrix},\ C = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & A_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Si dimostri che se $\det(\lambda D - B - C) = 0$ e $\lambda \neq 0$, allora $\mu = \lambda^3$ è tale che $\det(\mu(D - B) - C) = 0$ e viceversa.
b) Si dimostri che il metodo iterativo $x_{k+1} = M^{-1}(Nx_k + b)$ per risolvere il sistema lineare $Ax = b$ ottenuto con $M = D$, $N = B + C$ (Jacobi a blocchi) è convergente se e solo se lo è il metodo ottenuto con $M = D - B$, $N = C$ (Gauss-Seidel a blocchi). Si confrontino le velocità asintotiche di convergenza dei due metodi.

Soluzione

$\square$

Esercizio 41 Sia D una matrice diagonale $n \times n$ con elementi principali reali $b_1 < b_2 < \cdots < b_n$; sia $a = (a_i), e = (e_i) \in \mathbb{R}^n$, dove $e_i = 1$ e $a_i \neq 0$ per $i = 1, \dots, n$. Posto $A = D + ae^T$ si dimostri che:
a) λ è autovalore di A se e solo se $\lambda \neq b_i$, $i = 1, \dots, n$ $1 + \sum_{i=1}^{n} a_i/(b_i - \lambda) = 0$;
b) per ogni autovalore di A esiste un indice k per cui $|b_k + a_k - \lambda| \leq (n-1)|a_k|$, inoltre $|a_k/(b_k - \lambda)|$ è il massimo dei $|a_i/(b_i - \lambda)|$;
c) se per ogni $i \neq j$ vale $|b_i - b_j + a_i - a_j| > (n-1)(|a_i| + |a_j|)$, allora A ha

tutti autovalori reali;
d) se $a_i > 0$ per ogni i, allora esiste una matrice diagonale $\widehat{D}$ tale che $\widehat{D}A\widehat{D}^{-1}$ è reale e simmetrica e A ha autovalori reali.

Soluzione

□

Esercizio 42 Sia $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $E = -E^T$ e i l'unità immaginaria tale che $i^2 = -1$.
a) Si dimostri che se $n = 2m$, $m > 0$ intero, allora gli autovalori di E sono $\{\pm i\mu_j,\ \mu_j \in \mathbb{R},\ j = 1,\dots,m\}$; se $n = 2m+1$ allora gli autovalori sono $\{0\} \cup \{\pm i\mu_j,\ \mu_j \in \mathbb{R},\ j = 1,\dots,m\}$, dove $m > 0$ è un intero.
b) Sia inoltre $\rho(E) = 2$, $A = I - E$, $M = \alpha I$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $N = M - A$. Si dimostri che il metodo iterativo per risolvere il sistema lineare $Ax = b$, dato dal partizionamento $A = M - N$, è convergente se e solo se $\alpha > 5/2$ e per $\alpha = 5$ raggiunge la massima velocità di convergenza
c) Si determini in funzione di $\rho(E)$ il valore ottimale di α che massimizza la velocità di convergenza del metodo iterativo.

Soluzione

□

Esercizio 43 Siano $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta \in \mathbb{R}$, $n \geq 3$ un intero e si considerino le matrici $n\times n$ di elementi $T = (t_{i,j})$, $A = (a_{i,j})$ definite da $t_{i,j} = 0$ per $|i-j| > 1$, $t_{i,i} = 2$ per $i = 2,\dots,n-1$, $t_{1,1} = t_{2,1} = \alpha$, $t_{n,n} = \beta$, $t_{i-1,i} = 1$, $i = 2,\dots,n$, $t_{i+1,i} = 1$, $i = 2,\dots,n-1$; $a_{1,1} = \gamma$, $a_{1,n} = a_{n,1} = \delta$, $a_{n,n} = \theta$ e $a_{i,j} = t_{i,j}$ altrove:

$$T = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & & & \\ \alpha & 2 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 2 & 1 \\ & & & 1 & \beta \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \gamma & 1 & & & \delta \\ \alpha & 2 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 2 & 1 \\ \delta & & & 1 & \theta \end{bmatrix}.$$

a) Dire per quali valori di α e β la matrice T ammette la fattorizzazione LU. Si calcoli tale fattorizzazione e si valuti il numero di moltiplicazioni e divisioni sufficienti a calcolare L, U e a risolvere il sistema $Tx = b$ tenendo conto della struttura specifica delle matrici L e U.
b) Dire per quali valori di α, γ, δ e θ esiste un vettore $u \in \mathbb{R}^n$ e un valore di β tale che $A = T + uu^T$. Sotto tali condizioni, assumendo $\det T \neq 0$, si descriva un metodo per la risoluzione del sistema $Ax = b$ basato sulla fattorizzazione $A = T(I+T^{-1}uu^T)$ e se ne valuti il costo in termini di numero di moltiplicazioni, divisioni e estrazioni di radici.

Soluzione a) Dalla teoria sappiamo che condizione sufficiente per l'esistenza della fattorizzazione LU è che $\det T_k \neq 0$, $k = 1,\dots,n-1$, dove T_k è la sottomatrice principale di testa $k \times k$ di T. Per dimostrare che $\det A_k \neq 0$ per $\alpha \neq 0$ ci sono vari modi

1. Le matrici T_k^T sono irriducibilmente dominanti diagonali (IDD) per $\alpha \neq 0$. Per il terzo teorema di Gerschgorin T_k è non singolare.

2. Vale $\det T_k = \alpha \det T_k'$, dove T_k' è la matrice ottenuta con $\alpha = 1$ che è non singolare perché IDD.

3. Per induzione si dimostra che $\det T_k = \alpha$, $k = 1, \ldots, n-1$ sviluppando il determinante lungo l'ultima riga di T_k.

4. Sviluppando il determinante lungo la prima riga di T_k risulta $\det T_k = \alpha \det S_{k-1} - \alpha \det S_{k-2}$, dove S_k è la matrice tridiagonale con 2 sulla diagonale e 1 sulla sopra-diagonale e sulla sotto-diagonale. Poiché vale (per un risultato visto a esercitazione, comunque dimostrabile per induzione) $\det S_k = k+1$, risulta $\det T_k = \alpha$.

Segue quindi che la fattorizzazione esiste ed è unica per $\alpha \neq 0$.

Una dimostrazione più efficace poiché prova l'esistenza per ogni valore di α è la seguente: vale $T_k = T_k' D_k$ dove D_k è la matrice diagonale con elementi principali $\alpha, 1, \ldots, 1$. Per T_k' valgono le condizioni sufficienti per la fattorizzazione LU.

□

Esercizio 44 Siano n, k interi con $n > k > 0$. Si considerino le matrici $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ e $B = \begin{bmatrix} I & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+k)\times(n+k)}$.

a) Si dimostri che B è invertibile se e solo se $A^T A$ è invertibile

b) Posto $E = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -A^T & I_k \end{bmatrix}$, si determini $E^{-1}B$ e si utilizzi il risultato per ricavare un metodo per la risoluzione del sistema lineare $Bx = y$ di costo $O(nk^2)$ nell'ipotesi B invertibile.

c) Sia $A = Q \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$ una fattorizzazione QR di A e si ponga $H = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & I_k \end{bmatrix}$. Si calcoli $F = H^T B H$ e si utilizzi il risultato per ricavare un metodo per la risoluzione del sistema lineare $Bx = y$ di costo $O(nk^2)$ nel caso B invertibile.

d) Si osservi che entrambe le tecniche riducono la risoluzione del sistema originale alla risoluzione di sistemi di ordine k. Si confrontino i metodi così ottenuti dal punto di vista del condizionamento dei sistemi di ordine k.

Soluzione

□

Esercizio 45 Si consideri il sistema lineare $Ax = b$, con A matrice reale $n \times n$.

a) Si dimostri che se esistono matrici diagonali D_1 e D_2 tali che $D_1 A D_2$ è fortemente dominante diagonale (per righe o per colonne), oppure è irriducibile e dominante diagonale (per righe o per colonne) allora i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel applicati al sistema $Ax = b$ sono convergenti.

b) Sia $a_{i,j} < 0$ per $i \neq j$ e $a_{i,j} > 0$ per $i = j$. Si dimostri che se esiste w con componenti positive tale che Aw oppure $A^T w$ hanno componenti positive (oppure non negative e A è irriducibile) allora i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel applicati a $Ax = b$ sono convergenti.

c) Si dica per quali valori di $\alpha \leq 1$ i metodi di Jacobi e Gauss Seidel applicati alla matrice $n \times n$ tridiagonale $A = (a_{i,j})$, $a_{1,1} = \alpha$, $a_{i,i} = 2$, $a_{i,i-1} = a_{i-1,i} = -1$, $i = 2, \ldots, n$, sono convergenti.

Soluzione

□

Esercizio 46 Dato il polinomio $p(x) = x^n - \sum_{i=0}^{n-1} x^i a_i$, dove n è un intero positivo, si associ a $p(x)$ la matrice $n \times n$ $B = (b_{i,j})$, tale che $b_{i+1,i} = 1$, $i = 1, \ldots, n-1$, $b_{1,j} = a_{n-j}$, $j = 1, \ldots, n$, $b_{i,j} = 0$ altrimenti.
a) Si dimostri che $\det(xI - B) = p(x)$.
b) Sia $n = 2m \geq 4$, $p(x) = (x^m - 1)^2$, $A = \alpha I - B$. Si studi al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza dei metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel applicati al sistema $Ax = b$ e si confrontino le velocità di convergenza dei due metodi.
c) Per $\alpha > 1$ e $0 < \theta < 1$, si valuti in funzione di α e θ il numero k di iterazioni per cui $||e^{(k)}||_\infty \leq \theta ||e^{(0)}||_\infty$, dove $e^{(k)}$ è l'errore generato dopo k passi del metodo di Gauss-Seidel. Si tratti poi il caso particolare in cui $e_m^{(0)} = e_n^{(0)} = 0$.

Soluzione

□

Esercizio 47 Sia $\mathcal{A} = \{I - \sigma u v^T \in \mathbb{R}^{n \times n} : \quad u, v \in \mathbb{R}^n,\ \sigma \in \mathbb{R},\ u^T v = 0\}$
a) Si dimostri che $\forall E \in \mathcal{A}$, $\det E = 1$, inoltre si determini una forma normale di Schur di $E \in \mathcal{A}$ col massimo numero di elementi nulli.
b) Si diano condizioni su $x, y \in \mathbb{R}^n$ affinché esista $E \in \mathcal{A}$ tale che $Ex = y$. Nel caso in cui $y = (\alpha, 0, \ldots, 0)^T$ descrivere un metodo per il calcolo di $u, v \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \in \mathbb{R}$, dove $E = I - \sigma u v^T$, e si analizzi il costo computazionale.
c) Si usi la classe delle matrici elementari $\mathcal{A}$ per trasformare il sistema lineare $Ax = b$ in un sistema equivalente $Ux = c$ con U matrice triangolare superiore, valutandone la complessità e le condizioni di applicabilità.

Soluzione

□

Esercizio 48 Dati $a, b, c, d \in \mathbb{R}^n$ si dimostri che i vettori ortogonali a b e d stanno nel nucleo della matrice $V = ab^T + cd^T$ e che gli autovalori di

$$\begin{bmatrix} b^T a & b^T c \\ d^T a & d^T c \end{bmatrix}$$

sono autovalori di V. Si consideri poi il sistema lineare $Ax = f$, $x, f \in \mathbb{R}^n$, $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dove $a_{i,i}, a_{n,i}, a_{1,i} \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$, $a_{i,j} = 0$ altrimenti. Si studi la convergenza dei metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel applicati a tale sistema e se ne confrontino le velocità di convergenza.

Soluzione

$\square$

Esercizio 49 Dato un intero pari $n = 2m > 0$ e numeri reali a_i, f_i, $i = 1, \ldots, n$, b_i, $i = 1, \ldots, n-1$, si consideri il sistema lineare $Hx = f$, dove $H = (h_{i,j})$ è la matrice $n \times n$ tale che gli elementi non nulli sono tutti e soli gli $h_{i,i} = a_i$, per $i = 1, \ldots, n$, gli $h_{2i-1,2i} = b_{2i-1}$, per $i = 1, \ldots, m$ e gli $h_{2i+1,2i} = b_{2i}$, per $i = 1, m-1$.

a) Si descriva un algoritmo per risolvere il sistema $Hx = f$ che impieghi non più di $3n$ operazioni aritmetiche, e se ne faccia l'analisi all'indietro dell'errore.

b) Si scriva un *function* con la sintassi Octave o una *subroutine* con la sintassi Fortran 90, che risolve il sistema $Hx = f$ dati $a = (a_i)$, $b = (b_i)$, $f = (f_i)$.

Soluzione

$\square$

Esercizio 50 Sia $A_n = (a_{i,j})$ la matrice tridiagonale $n \times n$ con elementi $a_{i,i} = 2$, $i = 1, \ldots, n$, $a_{i+1,i} = a_{i,i+1} = -1$, $i = 1, \ldots, n-1$.

a) Verificare che A è invertibile e che la prima ed ultima colonna dell'inversa di A sono rispettivamente $\frac{1}{n+1}(n, n-1, \ldots, 2, 1)^T$ e $\frac{1}{n+1}(1, 2, \ldots, n-1, n)^T$.

b) Si supponga che $n = 2m$, si partizioni A_n in 4 blocchi $m \times m$ e si scriva la matrice di iterazione del metodo di Jacobi a blocchi applicato al sistema $Ax = b$. Si analizzi la velocità di convergenza dei metodi di Jacobi e Gauss-Seidel a blocchi applicati al sistema $Ax = b$.

c) Cosa si può dire se $n = 3m$ e A_n è partizionata in 9 blocchi $m \times m$? Cosa si può dire nel caso generale in cui $n = km$ e A_n è partizionata in k^2 blocchi $m \times m$?

Soluzione

$\square$

Esercizio 51 Sia $n \geq 2$ un intero e $a = (a_i) \in \mathbb{R}^n$, $b = (b_i) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Si definisca $T(a, b) = (t_{i,j})$ la matrice $n \times n$ tale che $t_{i,i} = a_i$, $i = 1, \ldots, n$, $t_{i+1,i} = b_i$, $i = 1, \ldots n-1$, $t_{i,j} = 0$ altrove.

a) Dati $a, c \in \mathbb{R}^n$, $b, d \in \mathbb{R}^{n-1}$, si verifichi che la matrice $V = (v_{i,j}) = T(a, b)^T T(c, d)$ è tridiagonale e si descriva un algoritmo per il calcolo dei $3n-2$ elementi $v_{i,j}$, per $|i - j| \leq 1$, che impieghi al più $5n$ operazioni aritmetiche.

b) Si scriva una function in Octave o una subroutine in Fortran 90 che dato n e i vettori a, b, c, d calcoli e dia in output i vettori $u = (v_{i,i})$, $w = (v_{i+1,i})$, $z = (v_{i,i+1})$.

c) Si svolga una analisi in avanti dell'errore dell'algoritmo individuato nel caso in cui i vettori a, b, c, d abbiano componenti positive. In particolare, denotando con $\widetilde{V} = (\widetilde{v}_{i,j})$ la matrice effettivamente calcolata dall'algoritmo in aritmetica *floating point* di precisione u, si determini una costante γ tale che $|v_{i,j} - \widetilde{v}_{i,j}| \leq \gamma u |v_{i,j}|$.

Soluzione

□

Esercizio 52 Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $n > 2$ un intero. Si definisca la matrice $A_n = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tale che $a_{1,1} = a$, $a_{i,i} = c$, $a_{i-1,i} = 1$, per $i = 2, \ldots, n$, $a_{2,1} = b{+}1$, $a_{i,1} = b$, $a_{i,i-1} = 1$ per $i = 3, \ldots, n$, e $a_{i,j} = 0$ altrove. In particolare è

$$A_5 = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1+b & c & 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & c & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 & c & 1 \\ b & 0 & 0 & 1 & c \end{bmatrix}$$

a) Supponendo $a \neq 0$ si scriva la matrice ottenuta dopo un passo del processo di fattorizzazione LU applicato ad A_n.
b) Nell'ipotesi esista la fattorizzazione LU di A_n, si scrivano le matrici L_n, U_n tali che $A_n = L_nU_n$ e si descriva un algoritmo per il loro calcolo che impieghi un numero di operazioni aritmetiche non superiore a $5n$.
c) Posto $c = a$, $b = 2$, dire per quali valori di $|a| \leq 3$ esiste ed è unica la fattorizzazione LU.

Soluzione

□

Esercizio 53 Sia $A = (a_{i,j})$ una matrice simmetrica $n \times n$ con autovalori $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n = 1$. Per risolvere il sistema $Ax = b$ si consideri la classe di metodi iterativi definiti da $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \theta H(Ax^{(k)} - b)$, dove H è una matrice $n \times n$. Si studi la convergenza nei due casi $H = I$ e $H = 2I - A$ al variare del parametro θ. Si determini in funzione dei λ_i il valore ottimo di θ nei due casi. Si dica quali dei due metodi è più conveniente in termini computazionali (cioè in base al costo computazionale per passo e in base alla velocità di convergenza) nel caso in cui θ abbia il valore ottimo.

Soluzione

□

Esercizio 54 Sia $A = (a_{i,j})$ la matrice $n \times n$ di elementi $a_{i,i} = i$, per $i = 1, \ldots, n$, $a_{i,n} = -1$, $a_{i+1,i} = -1$ per $i = 1, \ldots, n-1$, $a_{i,j} = 0$ altrove. Si scrivano le matrici di iterazione J e G dei metodi di Jacobi e di Gauss Seidel applicati a un sistema lineare con matrice A e si dimostri che tali metodi sono convergenti. Si diano maggiorazioni dei raggi spettrali di J e di G e si individui il metodo che ha la migliore stima di velocità di convergenza.
Sia A_α la matrice ottenuta da A moltiplicando gli elementi diagonali di A per α. Dire per quali valori di α il metodo di Gauss-Seidel applicato ad un sistema con matrice A_α è convergente.

Soluzione

$\square$

Esercizio 55 Dato un intero $n > 2$ e i vettori $u = (u_i), f = (f_i) \in \mathbb{R}^n$, $v = (v_i) \in \mathbb{R}^{n-1}$, sia $A = (a_{i,j})$ la matrice bidiagonale inferiore con elementi diagonali $a_{i,i} = u_i$, $i = 1, \ldots, n$ ed elementi sottodiagonali $a_{i+1,i} = v_i$, $i = 1, \ldots, n-1$.

Si descriva un algoritmo per risolvere il sistema $Ax = f$ che impieghi non più di $3n$ operazioni aritmetiche. Si dia una implementazione in Octave, o in Fortran 90 dell'algoritmo trovato e si svolga una analisi all'indietro dell'errore.

Soluzione

$\square$

Esercizio 56 Sia A una matrice $n \times n$ non singolare di elementi reali e si consideri il partizionamento additivo $A = M - N_1 - N_2$, con M, N_1, N_2 matrici $n \times n$ ad elementi reali, $\det M \neq 0$. Per risolvere il sistema lineare $Ax = b$, $b \in \mathbb{R}^n$, si consideri l'iterazione $x^{(k+1)} = M^{-1}(N_1 x^{(k)} + N_2 x^{(k-1)} + b)$, $k = 1, 2, \ldots$, dove $x^{(0)}, x^{(1)}$ sono scelti in modo arbitrario.
a) Si riscriva l'iterazione nella forma

$$z^{(k+1)} = \mathcal{P} z^{(k)} + q, \quad z^{(k)} = \begin{bmatrix} x^{(k)} \\ x^{(k-1)} \end{bmatrix}$$

esplicitando $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ e $q \in \mathbb{R}^{2n}$.
b) Si dimostri che gli autovalori di $\mathcal{P}$ sono gli zeri di $\det(\lambda^2 M - \lambda N_1 - N_2)$.
c) Sia M la matrice diagonale con elementi principali $a_{i,i}$, N_1 la matrice strettamente triangolare inferiore con elementi $-a_{i,j}$ per $i > j$. Si dimostri che se A è fortemente dominante diagonale o irriducibilmente dominante diagonale allora la successione $\{x_k\}$ converge per ogni scelta di x_0, x_1.
d) Con le specifiche di M, N_1 e N_2 del punto c), se A è matrice tridiagonale si confronti il raggio spettrale di $\mathcal{P}$ con quello della matrice di iterazione del metodo di Jacobi applicato al sistema lineare $Ax = b$.

Soluzione

$\square$

Esercizio 57 Dato un intero $n > 2$ e i vettori $u = (u_i), f = (f_i) \in \mathbb{R}^n$, $v = (v_i) \in \mathbb{R}^{n-1}$, sia $A = (a_{i,j})$ la matrice definita da $a_{i,i} = u_i$, $i = 1, \ldots, n$, $a_{i,1} = v_{i-1}$, $i = 2, \ldots, n$, $a_{i,j} = 0$ altrove. Descrivere un algoritmo per risolvere il sistema $Ax = f$ che impieghi non più di $3n$ operazioni aritmetiche, studiarne la stabilità all'indietro e scrivere una function nella sintassi Octave che lo implementi.

Soluzione

$\square$

Esercizio 58 Dati un intero $n > 1$ un numero reale $z \neq 0$ e un vettore $a = (a_i) \in \mathbb{R}^n$ con $a_n \neq 0$, si consideri il sistema $Tx = b$ dove $b = (0, \dots, 0, 1)^T$, $T = (t_{i,j})$ è la matrice tale che $t_{i,i} = z$, per $i = 1, \dots, n-1$, $t_{i+1,i} = -1$, $i = 1, \dots, n-1$, $t_{i,n} = a_i$, per $i = 1, \dots, n$ e $t_{i,j} = 0$ altrove.
a) Si descriva il sistema che si ottiene applicando un passo di eliminazione gaussiana a $Tx = b$.
b) Si descriva un algoritmo basato sulla eliminazione gaussiana che dati z e $a = (a_i)$, calcoli la sola x_n con al più $2n$ operazioni aritmetiche.
c) Si determini una matrice 2×2 ortogonale Q tale che, posto $V = \mathrm{diag}(Q, I_{n-2})$, risulti $Vt_1 = (\alpha, 0, \dots, 0)^T$ dove t_1 è la prima colonna di T, I_{n-2} è la matrice identica di ordine $n-2$ ed α è un opportuno numero reale, si descriva inoltre il sistema $VTx = Vb$.
d) Si usi il risultato del punto c) per descrivere un algoritmo per calcolare la sola x_n usando trasformazioni ortogonali. Valutarne il costo computazionale.

Soluzione

□

Esercizio 59 Dati un intero $n > 1$ e tre vettori $a = (a_i)$, $c = (c_i) \in \mathbb{R}^n$, $b = (b_i) \in \mathbb{R}^{n-1}$ si consideri il sistema $Tx = c$ dove $T = (t_{i,j})$ è la matrice triangolare inferiore tale che $t_{i,i} = a_i$, per $i = 1, \dots, n$, $t_{i+1,i} = b_i$, $i = 1, \dots, n-1$, e $t_{i,j} = 0$ altrove. Descrivere un algoritmo per la risoluzione del sistema che impieghi al più $3n$ operazioni aritmetiche. Fare l'analisi all'indietro dell'errore e scrivere una *function* nella sintassi di Octave che implementi l'algoritmo.

Soluzione

□

Esercizio 60 Dati due vettori non nulli $x, y \in \mathbb{R}^n$ scrivere le formule che danno in funzione di x, y un vettore $u \in \mathbb{R}^n$ per cui la matrice di Householder $A = I - \beta uu^T$, $\beta = 2/(u^T u)$, sia tale che $Ax = \alpha y$, con $\alpha \in \mathbb{R}$. Scrivere una function, nella sintassi di Octave, `function u=householder(x,y)`, che svolge il calcolo di u. Fare l'analisi dell'errore algoritmico del calcolo delle componenti di u assumendo di conoscere una limitazione superiore η al valore assoluto dell'errore algoritmico commesso nel calcolo di α.
Calcolare un valore di η.

Soluzione

□

Esercizio 61 Siano $a = (a_i), x = (x_i), y = (y_i) \in \mathbb{R}^n$, $b = (b_i), c = (c_i) \in \mathbb{R}^{n-1}$, A la matrice tridiagonale $n \times n$ con elementi diagonali a_i, per $i = 1, \dots, n$, sottodiagonali e sopradiagonali rispettivamente b_i, c_i, $i = 1, \dots, n-1$, tali che $y = Ax$.

a) Scrivere le formule che legano le componenti di y a quelle di x.

b) Dimostrare che il calcolo di y dati x, a, b, c mediante queste formule è numericamente stabile all'indietro.

c) Scrivere una function nella sintassi di octave che presi in input i vettori x, a, b, c fornisce in output il vettore y.

Soluzione

$\square$

Esercizio 62 Si dimostri che le matrici della forma

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R} \tag{2}$$

commutano e hanno autovalori $a \pm \mathtt{i}b$ dove $\mathtt{i}^2 = -1$. Usando la forma normale reale di Schur si dimostri che se A è una matrice reale allora A è normale se e solo se esiste una matrice reale ortogonale Q tale che $Q^T AQ$ è una matrice diagonale a blocchi, reale, con blocchi di dimensione minore o uguale a 2 in cui i blocchi di dimensione 2 hanno la forma (1).

[Si ricorda che per la forma normale reale di Schur, data $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ esistono $Q, R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tali che $Q^T Q = I$, R è triangolare superiore a blocchi in cui i blocchi diagonali hanno dimensione al più 2 e i blocchi diagonali di dimensione 2 sono del tipo (1) e $A = QRQ^T$].

Soluzione

$\square$

Esercizio 63 Dati i vettori $a = (a_i), f = (f_i) \in \mathbb{R}^n$ e $b = (b_i), c = (c_i) \in \mathbb{R}^{n-1}$ si consideri la matrice tridiagonale T di dimensione $n \times n$ che ha elementi diagonali $a_i \neq 0$, sottodiagonali b_i e sopradiagonali c_i. Si scrivano le relazioni che legano due iterate successive del metodo di Jacobi applicato al sistema $Tx = f$. Si dimostri che le formule sono stabili all'indietro. Si scriva una function nella sintassi di Octave che, presi in input $a, u, f \in \mathbb{R}^n$, $b, c \in \mathbb{R}^{n-1}$ fornisce in output l'approssimazione $v \in \mathbb{R}^n$ ottenuta applicando un passo del metodo di Jacobi al vettore u.

Soluzione

$\square$

Esercizio 64 Siano $u, v \in \mathbb{R}^n$ e $A = I_n + uv^T$, con I_n matrice identica di ordine n.

a) Si dimostri che esiste una matrice di Householder $P = I_n - \beta ww^T$, $w \in \mathbb{R}^n$, tale che vale la fattorizzazione

$$A = P \left[\begin{array}{c|c} \alpha & z^T \\ \hline 0 & I_{n-1} + rs^T \end{array} \right]$$

per opportuni $r, s, z \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Si esprimano r, s, z ed α in funzione di u, v e si valuti il costo computazionale per il loro calcolo.

b) Si descriva un algoritmo per il calcolo della matrice R di una fattorizzazione QR di A e se ne valuti il costo computazionale.

Soluzione

$\square$

Esercizio 65 Siano $u, v \in \mathbb{R}^n$ con $u_1 = v_1$ e si definisca la matrice $n \times n$ $A_n = (a_{i,j})$ tale che $a_{i,i+1} = 1$, $i = 1, \ldots, n-1$, $a_{i,i} = u_i$, $a_{i,1} = v_i$, $i = 1, \ldots, n$, $a_{i,j} = 0$ altrove. Si denoti $d_n = \det A_n$.
a) Scrivere una relazione che lega d_n con d_{n-1} e ricavarne un algoritmo per il calcolo di d_n che impieghi non più di $2n$ operazioni aritmetiche.
b) Scrivere una function con la sintassi di Octave che implementi l'algoritmo del punto a).
c) Dimostrare la stabilità all'indietro dell'algoritmo.

Soluzione

$\square$

Esercizio 66 Sia $H = (h_{i,j})$ matrice $n \times n$ irriducibile tale che $h_{i,j} = 0$ per $i > j + 1$. Si denoti con $e_i \in \mathbb{R}^n$ il vettore la cui componente i-esima vale 1 e le altre sono nulle. Si definisca la matrice X di dimensione $n \times n$ la cui i-esima colonna è $H^{i-1}e_1$, per $i = 1, \ldots, n$, dove $H^0 = I$.
a) Dimostrare che X è triangolare superiore ed è invertibile.
b) Dimostrare che $F = X^{-1}HX$ è una matrice di Frobenius, cioè $Fe_i = e_{i+1}$, per $i = 1, \ldots, n-1$, $Fe_n = a$ dove $a = (a_i) \in \mathbb{R}^n$ è tale che $x^n - \sum_{i=0}^{n-1} x^i a_{i+1}$ è il polinomio caratteristico di H.
c) Si descriva un metodo per il calcolo di a e se ne valuti il costo computazionale.

Soluzione

$\square$

Esercizio 67 Sono dati tre vettori $b = (b_i), u = (u_i), v = (v_i) \in \mathbb{R}^n$, con $b_1 = u_1 = v_1$. Si consideri la matrice $A_n = (a_{i,j})$ di dimensione $n \times n$ con $a_{i,i} = b_i$, $i = 1, \ldots, n$, $a_{1,i} = u_i$, $a_{i,1} = v_i$, $i = 2, \ldots, n$. Si ponga $d_n = \det A_n$.
a) Si scriva la relazione che lega d_n e d_{n-1}
b) Si implementi tale relazione in una function nella sintassi di Octave che prende come input i tre vettori b, u, v e dà in output il vettore $d = (d_i) \in \mathbb{R}^n$.
c) Si dica se tale formula è stabile all'indietro.

Soluzione

$\square$

Esercizio 68 Dato il vettore $u = (n-3, 2, \ldots, 2) \in \mathbb{R}^{n-1}$, si costruisca una matrice di Householder P tale che $Pu = \alpha e_1$, dove e_1 è il primo versore della base canonica e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Sia $A = (a_{i,j})$ una matrice $n \times n$ con elementi diagonali uguali a 1, $a_{2,1} = a_{1,2} = n-3$, $a_{i,1} = a_{1,i} = 2$, $i = 3, \ldots, n$, ed elementi nulli altrove. Si determini una matrice ortogonale Q tale che QAQ^T ha la forma

$$QAQ^T = \begin{bmatrix} b & c & & & \\ c & d & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

per opportuni $b, c, d \in \mathbb{R}$. Si determinino gli autovalori di A.

Soluzione

□

Esercizio 69 Siano A e B due matrici triangolari superiori 2×2.
a) Dire se l'algoritmo "naturale" per calcolare il prodotto $C = AB$ con 4 moltiplicazioni e una addizione è stabile all'indietro.
b) Dare una espressione esplicita degli elementi di $V = A^k$, dove k è un intero positivo, ricavarne un algoritmo per il calcolo degli elementi di V valutandone il costo computazionale.
c) Scrivere infine una function nella sintassi di Octave che implementi tale algoritmo, cioè, presi in input k, $a_{1,1}, a_{1,2}, a_{2,2}$ dia in output $v_{1,1}, v_{1,2}, v_{2,2}$.

Soluzione

□

Esercizio 70 Dati un intero $n > 1$ e tre vettori $a = (a_i)$, $c = (c_i) \in \mathbb{R}^n$, $b = (b_i) \in \mathbb{R}^{n-1}$ si consideri il sistema $Tx = c$ dove $T = (t_{i,j})$ è la matrice triangolare inferiore tale che $t_{i,i} = a_i$, per $i = 1, \ldots, n$, $t_{i+1,i} = b_i$, $i = 1, \ldots, n-1$, e $t_{i,j} = 0$ altrove. Descrivere un algoritmo per la risoluzione del sistema che impieghi al più $3n$ operazioni aritmetiche. Fare l'analisi all'indietro dell'errore e scrivere una *function* nella sintassi di Octave che implementi l'algoritmo.

Soluzione

□

Esercizio 71 Usando la forma normale di Schur si dimostri che se la matrice A è tale che $A^H A = \frac{1}{2}(A + A^H)$ allora A è normale. Si deduca che gli autovalori di A stanno sulla circonferenza del piano complesso di centro $1/2$ e raggio $1/2$.

Soluzione

□

Esercizio 72 Dati un intero $n > 1$ un numero reale $z \neq 0$ e un vettore $a = (a_i) \in \mathbb{R}^n$ con $a_n \neq 0$, si consideri il sistema $Tx = b$ dove $b = (0, \ldots, 0, 1)^T$, $T = (t_{i,j})$ è la matrice tale che $t_{i,i} = z$, per $i = 1, \ldots, n-1$, $t_{i+1,i} = -1$, $i = 1, \ldots, n-1$, $t_{i,n} = a_i$, per $i = 1, \ldots, n$ e $t_{i,j} = 0$ altrove.

a) Si descriva il sistema che si ottiene applicando un passo di eliminazione gaussiana a $Tx = b$.
b) Si descriva un algoritmo basato sulla eliminazione gaussiana che dati z e $a = (a_i)$, calcoli la sola x_n con al più $2n$ operazioni aritmetiche.
c) Si determini una matrice 2×2 ortogonale Q tale che, posto $V = \mathrm{diag}(Q, I_{n-2})$, risulti $Vt_1 = (\alpha, 0, \ldots, 0)^T$ dove t_1 è la prima colonna di T, I_{n-2} è la matrice identica di ordine $n-2$ ed α è un opportuno numero reale, si descriva inoltre il sistema $VTx = Vb$.
d) Si usi il risultato del punto c) per descrivere un algoritmo per calcolare la sola x_n usando trasformazioni ortogonali. Valutarne il costo computazionale.

Soluzione

□

Esercizio 73 Si dimostri che le matrici della forma

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R} \tag{3}$$

commutano e hanno autovalori $a \pm \mathtt{i}b$ dove $\mathtt{i}^2 = -1$. Usando la forma normale reale di Schur si dimostri che se A è una matrice reale allora A è normale se e solo se esiste una matrice reale ortogonale Q tale che $Q^T AQ$ è una matrice diagonale a blocchi, reale, con blocchi di dimensione minore o uguale a 2 in cui i blocchi di dimensione 2 hanno la forma (1).

[Si ricorda che per la forma normale reale di Schur, data $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ esistono $Q, R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tali che $Q^T Q = I$, R è triangolare superiore a blocchi in cui i blocchi diagonali hanno dimensione al più 2 e i blocchi diagonali di dimensione 2 sono del tipo (1) e $A = QRQ^T$].

Soluzione

□

Esercizio 74 Dati i vettori $a = (a_i), f = (f_i) \in \mathbb{R}^n$ e $b = (b_i), c = (c_i) \in \mathbb{R}^{n-1}$ si consideri la matrice tridiagonale T di dimensione $n \times n$ che ha elementi diagonali $a_i \neq 0$, sottodiagonali b_i e sopradiagonali c_i. Si scrivano le relazioni che legano due iterate successive del metodo di Jacobi applicato al sistema $Tx = f$. Si dimostri che le formule sono stabili all'indietro. Si scriva una function nella sintassi di Octave che, presi in input $a, u, f \in \mathbb{R}^n$, $b, c \in \mathbb{R}^{n-1}$ fornisce in output l'approssimazione $v \in \mathbb{R}^n$ ottenuta applicando un passo del metodo di Jacobi al vettore u.

Soluzione

□

Esercizio 75 Siano $u, v \in \mathbb{R}^n$ e $A = I_n + uv^T$, con I_n matrice identica di ordine n.

a) Si dimostri che esiste una matrice di Householder $P = I_n - \beta ww^T$, $w \in \mathbb{R}^n$, tale che vale la fattorizzazione

$$A = P \left[\begin{array}{c|c} \alpha & z^T \\ \hline 0 & I_{n-1} + rs^T \end{array} \right]$$

per opportuni $r, s, z \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Si esprimano r, s, z ed α in funzione di u, v e si valuti il costo computazionale per il loro calcolo.
b) Si descriva un algoritmo per il calcolo della matrice R di una fattorizzazione QR di A e se ne valuti il costo computazionale.

Soluzione

□

Esercizio 76 Siano $u, v \in \mathbb{R}^n$ con $u_1 = v_1$ e si definisca la matrice $n \times n$ $A_n = (a_{i,j})$ tale che $a_{i,i+1} = 1$, $i = 1, \ldots, n-1$, $a_{i,i} = u_i$, $a_{i,1} = v_i$, $i = 1, \ldots, n$, $a_{i,j} = 0$ altrove. Si denoti $d_n = \det A_n$.
a) Scrivere una relazione che lega d_n con d_{n-1} e ricavarne un algoritmo per il calcolo di d_n che impieghi non più di $2n$ operazioni aritmetiche.
b) Scrivere una function con la sintassi di Octave che implementi l'algoritmo del punto a).
c) Dimostrare la stabilità all'indietro dell'algoritmo.

Soluzione

□

Esercizio 77 Sia $H = (h_{i,j})$ matrice $n \times n$ irriducibile tale che $h_{i,j} = 0$ per $i > j + 1$. Si denoti con $e_i \in \mathbb{R}^n$ il vettore la cui componente i-esima vale 1 e le altre sono nulle. Si definisca la matrice X di dimensione $n \times n$ la cui i-esima colonna è $H^{i-1}e_1$, per $i = 1, \ldots, n$, dove $H^0 = I$.
a) Dimostrare che X è triangolare superiore ed è invertibile.
b) Dimostrare che $F = X^{-1}HX$ è una matrice di Frobenius, cioè $Fe_i = e_{i+1}$, per $i = 1, \ldots, n-1$, $Fe_n = a$ dove $a = (a_i) \in \mathbb{R}^n$ è tale che $x^n - \sum_{i=0}^{n-1} x^i a_{i+1}$ è il polinomio caratteristico di H.
c) Si descriva un metodo per il calcolo di a e se ne valuti il costo computazionale.

Soluzione

□

Esercizio 78 Sono dati tre vettori $b = (b_i), u = (u_i), v = (v_i) \in \mathbb{R}^n$, con $b_1 = u_1 = v_1$. Si consideri la matrice $A_n = (a_{i,j})$ di dimensione $n \times n$ con $a_{i,i} = b_i$, $i = 1, \ldots, n$, $a_{1,i} = u_i$, $a_{i,1} = v_i$, $i = 2, \ldots, n$. Si ponga $d_n = \det A_n$.
a) Si scriva la relazione che lega d_n e d_{n-1}
b) Si implementi tale relazione in una function nella sintassi di Octave che prende come input i tre vettori b, u, v e dà in output il vettore $d = (d_i) \in \mathbb{R}^n$.
c) Si dica se tale formula è stabile all'indietro.

Soluzione

$\square$

Esercizio 79 Dato il vettore $u = (n-3, 2, \ldots, 2) \in \mathbb{R}^{n-1}$, si costruisca una matrice di Householder P tale che $Pu = \alpha e_1$, dove e_1 è il primo versore della base canonica e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Sia $A = (a_{i,j})$ una matrice $n \times n$ con elementi diagonali uguali a 1, $a_{2,1} = a_{1,2} = n-3$, $a_{i,1} = a_{1,i} = 2$, $i = 3, \ldots, n$, ed elementi nulli altrove. Si determini una matrice ortogonale Q tale che QAQ^T ha la forma

$$QAQ^T = \begin{bmatrix} b & c & & & \\ c & d & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

per opportuni $b, c, d \in \mathbb{R}$. Si determinino gli autovalori di A.

Soluzione

$\square$

Esercizio 80 Siano A e B due matrici triangolari superiori 2×2.
a) Dire se l'algoritmo "naturale" per calcolare il prodotto $C = AB$ con 4 moltiplicazioni e una addizione è stabile all'indietro.
b) Dare una espressione esplicita degli elementi di $V = A^k$, dove k è un intero positivo, ricavarne un algoritmo per il calcolo degli elementi di V valutandone il costo computazionale.
c) Scrivere infine una function nella sintassi di Octave che implementi tale algoritmo, cioè, presi in input k, $a_{1,1}, a_{1,2}, a_{2,2}$ dia in output $v_{1,1}, v_{1,2}, v_{2,2}$.

Soluzione

$\square$

Esercizio 81 Si consideri il sistema lineare $Ax = f$ con $f \in \mathbb{R}^n$ e $A = (a_{i,j})$ tale che $a_{i+1,i} = -\alpha$ per $i = 1, \ldots, n-1$, $a_{1,n} = -\beta$, $a_{i,i} = 1$ per $i = 1, \ldots, n$, $a_{i,j} = 0$ altrove.

a) Scrivere le matrici di iterazione dei metodi di Jacobi e Gauss-Seidel applicati a tale sistema, e determinare i loro raggi spettrali. Dare condizioni su α e β necessarie e sufficienti per la convergenza dei due metodi.

b) Confrontare le velocità di convergenza dei due metodi in termini asintotici nel numero di iterazioni.

c) Dimostrare che dopo un passo del metodo di Gauss-Seidel l'errore di approssimazione è proporzionale al vettore $(1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1})^T$.
Usare questo fatto per ricavare direttamente la soluzione del sistema dal vettore ottenuto applicando un solo passo del metodo ad un qualsiasi vettore iniziale.

Soluzione La matrice A ha la forma

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & -\beta \\ -\alpha & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & -\alpha & 1 \end{bmatrix}$$

Le matrici di Jacobi e di Gauss Seidel hanno la forma

$$J = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \beta \\ \alpha & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \alpha & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 \\ -\alpha & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & -\alpha & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \beta \\ 0 & & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

per cui

$$G = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ \alpha^{n-1} & \dots & \alpha & 1 \end{bmatrix} \beta e_1 e_n^T = \beta u e_n^T, \quad u = (1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1})^T$$

Gli autovalori λ di J sono tali che $\det(\lambda - J) = 0$. Calcolando il determinante con la regola di Laplace sulla prima riga si ottiene $\det(\lambda I - J) = \lambda^n - \beta\alpha^{n-1}$ da cui gli autovalori di J sono le radici n-esime di $\beta\alpha^{n-1}$ e il raggio spettrale è quindi $\rho(J) = |\beta\alpha^{n-1}|^{1/n}$.

La matrice $G = ue_n^T$ ha l'autovalore 0 di molteplicità $n-1$ corrispondente agli autovettori ortogonali a e_n, e l'autovalore $\mu = \beta e_n^T u = \beta\alpha^{n-1}$ corrispondente all'autovettore u. pertanto $\rho(G) = |\beta\alpha^{n-1}|$. Si osserva quindi che $\rho(G) = \rho(J)^n$. Condizione necessaria e sufficiente per la convergenza di entrambi i metodi è $|\beta\alpha^{n-1}| < 1$. Poiché il raggio spettrale dà la riduzione asintotica media per passo, dalla relazione $\rho(G) = \rho(J)^n$ si deduce che il metodo di Gauss Seidel impiega asintoticamente un numero di iterazioni n volte inferiore a quello richiesto dal metodo di Jacobi.

Se x^* è la soluzione del sistema e se $\epsilon^{(0)} = x^{(0)} - x^*$ è l'errore iniziale allora dalla teoria sappiamo che dopo un passo del metodo di Gauss-Seidel l'errore è $\epsilon^{(1)} = Ge^{(0)} = ue_n^T\epsilon^{(0)} = \epsilon_n^{(0)} u =: \xi u$.

Vale quindi $x^{(1)} - x^* = \xi u$ per calcolare x^* conoscendo $x^{(1)}$ e u, basta calcolare ξ. Poiché $Ax^* = f$ si ha $\xi Au = Ax^{(1)} - f$ da cui, considerando ad esempio la prima componente, $\xi = (x_1^{(1)} - \beta x_n^{(1)} - f_1)/(1 - \beta\alpha^{n-1})$. □

Esercizio 82 Siano A, D_1, D_2 matrici reali $n \times n$, D_1 e D_2 matrici diagonali non singolari. Si consideri il sistema lineare $Ax = f$ con $f \in \mathbb{R}^n$ e il sistema equivalente $By = g$ con $B = D_1 A D_2$, $x = D_2 y$, $g = D_1 f$.

a) Si metta a confronto il metodo di Jacobi applicato al sistema $Ax = f$ e al sistema $By = g$. Si svolga la stessa analisi per il metodo di Gauss-Seidel.

b) Si scrivano le matrici di iterazione dei metodi di Jacobi e di Gauss Seidel applicati al sistema $Ax = b$ dove $A = uv^T$ con $u, v \in \mathbb{R}^n$ vettori con componenti non nulle e si calcolino i loro autovalori (si osservi che $uv^T = D_u E D_v$, con E matrice di elementi uguali a 1, D_u e D_v matrici diagonali con elementi diagonali rispettivamente u_i, v_i).

Soluzione

□

Esercizio 83 Dati due vettori $u, v \in \mathbb{R}^n$ determinare due matrici di Householder $Q_1 = I - \theta_1 w_1 w_1^T$, $Q_2 = I - \theta_2 w_2 w_2^T$ tali che $Q_2 Q_1 u = \alpha e_1$, $Q_2 Q_1 v = \beta e_1 + \gamma e_2$, con e_1, e_2 primi due vettori della base canonica di $\mathbb{R}^n$. Valutare il costo computazionale del calcolo dei vettori w_1, w_2 e di θ_1, θ_2. Valutare il costo computazionale del calcolo di α, β e γ.

b) Data $A = I - uv^T$ con $u, v \in \mathbb{R}^n$, si determinino matrici Q ortogonale e T triangolare superiore con elementi $t_{i,j}$ nulli se $i \neq j$ e $(i, j) \neq (1, 2)$, tali che $T = QAQ^T$.

c) Siano $u_i, v_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, k$, $k < n/2$, tali che lo spazio generato da u_i e v_i sia ortogonale allo spazio generato da u_j e v_j per $i \neq j$. Si ponga $A = \sum_{i=1}^k A_i$ con $A_i = I - u_i v_i^T$. Si dimostri che A ha una forma di Schur bidiagonale superiore. Quante operazioni aritmetiche occorrono per calcolare gli elementi di T?

a) Q_1 è la matrice di Householder che trasforma u in αe_1 con $\alpha = \|u\|_2$, $w_1 = u - \alpha e_1$ e $\theta_1 = 2/w_1^T w_1$. La matrice Q_2 si sceglie come $Q_2 = \mathrm{diag}(1, \widehat{Q})$ con $\widehat{Q}$ matrice di Householder. Infatti, vale $Q_2 Q_1 u = Q_2 \alpha e_1 = \alpha e_1$, inoltre, posto $y = Q_1 v$ vale $Q_2 Q_1 v = (y_1, z_2, \ldots, z_n)^T$ dove $(z_2, \ldots, z_n)^T = \widehat{Q}(y_2, \ldots, y_n)^T$. Basta allora scegliere come $\widehat{Q}$ una matrice di Householder che trasforma il vettore $(y_2, \ldots, y_n)^T$ nel vettore $\gamma \widehat{e}_1$ dove $\hat{e}_1$ è il primo vettore della base canonica in $\mathbb{R}^{n-1}$.

Equivalentemente, si poteva applicare il metodo di fattorizzazione QR di Householder alla matrice $n \times 2$ le cui colonne sono date dai vettori u e v.

Il costo computazionale è dato da

b) Basta porre $Q = Q_2 Q_1$.

c) Si procede per passi successivi: al primo passo si considera la matrice $Q = Q_2 Q_1$ che trasforma u_1 in $\alpha_1 e_1$ e v_1 in $\beta_1 e_1 + \gamma_1 e_2$. Vale allora $QAQ^T = \alpha_1 e_1 (\beta_1 e_1 + \gamma_1 e_2)^T + E$, $E = \sum_{i=2}^k Q u_i v_i^T Q^T$. Poiché i vettori $\hat{u}_i = Q u_i$ e $\hat{v}_i = Q v_i$ sono ortogonali ai vettori $Q u_1$ e $Q v_1$, avranno le prime due componenti nulle per cui la matrice E ha elementi nulli sulle prime due righe e colonne. Si ripete induttivamente il ragionamento sulla matrice E con n sostituoto da $n/2$ e k da $k - 1$. **Soluzione**

□

Esercizio 84 Sia $G(r, s) = \begin{bmatrix} r & s \\ s & -r \end{bmatrix}$ con $r, s \in \mathbb{R}$.

a) Si dica sotto quali condizioni su r, s la matrice $G(r, s)$ è ortogonale. Dati due

numeri reali a, b si determini $G(r,s)$ ortogonale tale che $G(r,s)\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix}$ per un opportuno $v \in \mathbb{R}$.
b) Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrice tridiagonale simmetrica con elementi diagonali uguali ad a ed elementi sopra/sotto diagonali uguali a b. Posto $V = \begin{bmatrix} G(r,s) & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{bmatrix}$, dove $I_{n-2} \in \mathbb{R}^{(n-2)\times(n-2)}$ è la matrice identica e $G(r,s)$ è la matrice ottenuta al punto a), si descrivano gli elementi della matrice $B = VA$ in funzione di a e di b.

c) Usando il punto b), si ricavi un procedimento per il calcolo del fattore R nella fattorizzazione $A = QR$ dimostrando che R è tale che $r_{ij} = 0$ per $j > i+2$ e $Q = (q_{ij})$ è tale che $q_{ij} = 0$ per $i > j+1$. Si valuti il costo computazionale.

Soluzione

□

Esercizio 85 Siano $\|\cdot\|'$ e $\|\cdot\|''$ due norme su $\mathbb{R}^n$. Si consideri l'applicazione che alla matrice $n\times n$ reale A associa il numero reale $f(A) = \max_{\|x\|'=1} \|Ax\|''$. Dire quali proprietà della norma di matrici soddisfa questa applicazione motivando le risposte. Si dimostri che scegliendo $\|\cdot\|' = \|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|'' = \|\cdot\|_\infty$ si ha $f(A) = \max_{i,j} |a_{i,j}|$

Soluzione $f(A) \geq 0$ poiché $\|\cdot\|''$ è norma. La proprietà $f(A) = 0$ se e solo se $A = 0$ è vera. Infatti, se $A = 0$ allora $f(A) = 0$ poiché $\|0\|'' = 0$. Viceversa se $f(A) = 0$ allora $0 = f(A) = \|Ax\|''$ qualunque sia x con $\|x\|' = 1$. Quindi $\|Ax\|'' = 0$ per ogni x. Da cui, essendo $\|\cdot\|''$ una norma ne segue che $Ax = 0$ per ogni x. Scegliendo $x = e_i$, $i = 1,\ldots,n$, vettori della base canonica, si ha che A ha tutte le colonne nulle e quindi $A = 0$.

La proprietà $f(\alpha A) = |\alpha| f(A)$ è vera. Infatti

$$f(\alpha A) = \max_{\|x\|'=1} \|\alpha Ax\|'' = \max_{\|x\|'=1} |\alpha| \|Ax\|'' = |\alpha| \max_{\|x\|'=1} \|Ax\|'' = |\alpha| f(A).$$

dove si sono applicate le proprietà $\|\alpha y\|'' = |\alpha| \cdot \|y\|''$, $\max_a |ab| = |b| \max_a |a|$.

La diseguaglianza triangolare è vera. Infatti

$$\begin{aligned} f(A+B) &= \max_{\|x\|'} \|Ax + Bx\|'' \leq \max_{\|x\|'} (\|Ax\|'' + \|Bx\|'') \\ &\leq \max_{\|x\|'} \|Ax\|'' + \max_{\|x\|'} \|Bx\|'' = f(A) + f(B) \end{aligned}$$

dove la prima diseguaglianza è stata ottenuta applicando la diseguaglianza triangolare per $\|\cdot\|''$, e la seconda diseguaglianza discende dal fatto che $\max_{a,b}(a+b) \leq \max_a a + \max_b b$.

La proprietà submoltiplicativa non vale. Infatti per il caso specifico di $\|\cdot\|' = \|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|'' = \|\cdot\|_\infty$, risulta $f(A) = \max |a_{i,j}|$ e per la matrice A di elementi tutti uguali a 1 risulta $f(A) = 1$, $f(AA) = n$ per cui $f(AA) > f(A)f(A)$.

Per dimostrare che con $\|\cdot\|' = \|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|'' = \|\cdot\|_\infty$, è $f(A) = \max_{i,j} |a_{i,j}|$ si procede in due fasi. Prima si dimostra che $f(A) \leq \max_{i,j} |a_{i,j}|$, poi si fa vedere che tale valore viene raggiunto da un particolare vettore x. Per la diseguaglianza si ha:

$$
\begin{aligned}
f(A) &= \max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_\infty = \max_{\|x\|_1=1} \max_i |\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j| \le \max_{\|x\|_1=1} \max_i \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \cdot |x_j| \\
&\le \max_{\|x\|_1=1} \max_i \max_s |a_{i,s}| \sum_{j=1}^n |x_j| \le \max_i \max_j |a_{i,j}|
\end{aligned}
$$

dove la prima diseguaglianza vale per la diseguaglianza triangolare del valore assoluto, la seconda vale poiché si maggiora ciascun $|a_{i,j}|$ col $\max_s |a_{i,s}|$; infine l'ultima uguaglianza si ottiene poiché $1 = \|x\|_1 = \sum_j |x_j|$.

Il particolare vettore x per cui questo valore viene raggiunto è il k-esimo vettore e_k della base canonica dove $|a_{h,k}|$ è il massimo degli $|a_{i,j}|$. Infatti Ae_k è il vettore di componenti $(a_{1,k}, \ldots, a_{n,k})$ la cui norma infinito è $|a_{h,k}|$. $\square$

Esercizio 86 Sia $A = (a_{i,j})$ matrice $n \times n$ tale che $a_{i,i} = 1$, $i = 1, \ldots, n-1$, $a_{i,i+1} = -1$, $i = 1, \ldots, n-1$, $a_{n,i} = b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, $a_{i,j} = 0$ altrove. Si dimostri che la fattorizzazione LU di A esiste ed è unica e si diano condizioni di invertibilità di A su $b_1, \ldots, b_n$. Si determini un algoritmo per risolvere il sistema lineare $Ax = f$, dove $f \in \mathbb{R}^n$, in al più $4n$ operazioni aritmetiche nel caso di A invertibile. Si implementi tale algoritmo in una *function* Octave che prende in input i vettori $b = (b_1, \ldots, b_n)$ e $f = (f_1, \ldots, f_n)$ e fornisce in output la soluzione $x = (x_i)$.

Soluzione Le ipotesi del teorema di esistenza e unicità della fattorizzazione LU sono soddisfatte dalla matrice A infatti le sottomatrici principali di testa fino all'ordine $n-1$ sono triangolari con elementi diagonali unitari e quindi hanno determinante non nullo. Il sistema lineare ha la forma

$$
\begin{bmatrix}
1 & -1 & & & \\
 & 1 & -1 & & \\
 & & \ddots & \ddots & \\
 & & & 1 & -1 \\
b_1 & b_2 & \ldots & b_{n-1} & b_n
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{bmatrix}
$$

Dopo un passo di eliminiazione gaussiana si ottiene il sistema

$$
\begin{bmatrix}
1 & -1 & & & \\
 & 1 & -1 & & \\
 & & \ddots & \ddots & \\
 & & & 1 & -1 \\
0 & \hat{b}_2 & \ldots & b_{n-1} & b_n
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ \hat{f}_n \end{bmatrix}
$$

dove $\hat{b}_2 = b_2 + b_1$, $\hat{f}_n = f_n - b_1 f_1$. Il sistema formato dalle ultime $n-1$ equazioni e incognite ha la stessa forma del sistema originale e il procedimento di eliminazione può essere riapplicato in modo analogo per $k = 2, 3, \ldots, n$ ottenendo le relazioni

$$\hat{b}_k = b_k + \hat{b}_{k-1}, \quad \hat{f}_n = \hat{f}_n - \hat{b}_{k-1} f_{k-1}, \quad k = 2, 3, \ldots, n. \tag{4}$$

Il sistema triangolare ottenuto ha la forma

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ & 1 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -1 \\ & & & & \hat{b}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ \hat{f}_n \end{bmatrix}$$

e, se $\hat{b}_n \neq 0$ può essere risolto mediante sostituzione all'indietro con le relazioni

$$x_n = \hat{f}_n / \hat{b}_n, \qquad x_i = f_i + x_{i+1}, \quad i = n-1, \ldots, 1. \tag{5}$$

Da (4) e (5) risulta che il numero di operazioni eseguite è $4n - 3$.

Il codice matlab è il seguente

```
function x=risolvi(b,f)
n=length(f);
for k=2:n
  b(k)=b(k)+b(k-1);
  f(n)=f(n)-b(k-1)*f(k-1);
end
if b(n)==0
  disp('Sistema singolare')
else
  x(n)=f(n)/b(n);
  for i=n-1:-1:1
    x(i)=f(i)+x(i+1);
  end
end
```

□