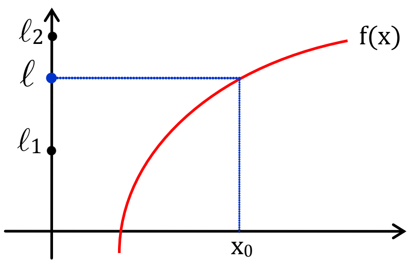
Principali teoremi di Analisi

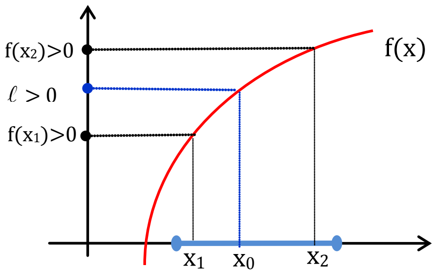
teoremi sui limiti



teorema di unicità del limite

Se una funzione in un punto è dotata di limite finito *allora* esso è unico

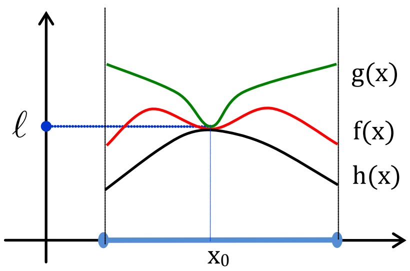
Dalla definizione di funzione, basta ricordare che ad ogni valore della x deve corrispondere uno ed un solo valore della y. Quindi, se per assurdo la funzione f(x) avesse nello stesso punto x_0 più di un limite, essa non sarebbe più una funzione e ciò contraddice l'ipotesi del teorema



teorema della permanenza del segno

Se una funzione in un punto x_0 è dotata di limite $\ell \neq 0$

allora esiste almeno un intorno I di x_0 tale che per tutti i punti di I (escluso al più x_0) i valori della funzione hanno lo stesso segno del limite



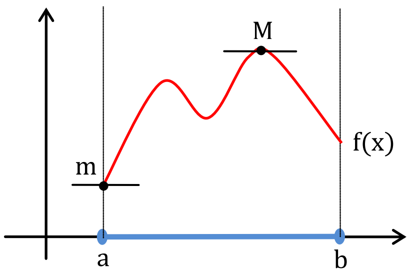
teorema del confronto detto anche dei "carabinieri"

Date tre funzioni h(x), f(x) , g(x):

1. *se* h(x) e g(x) tendono in un punto x_0 allo stesso limite ℓ finito
2. *se* esiste un intorno I del punto x_0 in cui f(x) è compresa tra h(x) e g(x) in tutti i punti dell'intorno I escluso al più x_0 stesso,

allora anche f(x) avrà in x_0 limite uguale ad ℓ

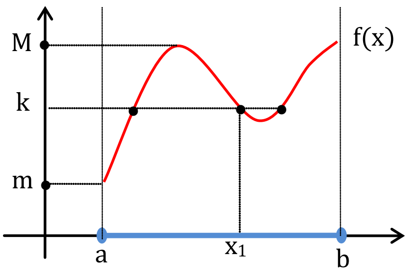
teoremi sulle funzioni continue



teorema di Weierstrass

Una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato [a,b] è dotata di massimo e minimo (assoluti)

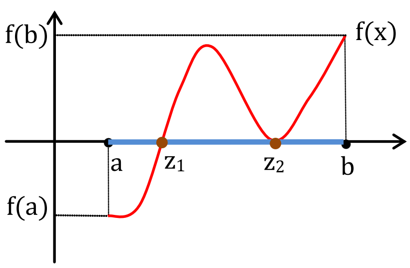
Osserva che un massimo (minimo) assoluto non deve necessariamente essere un massimo (minimo) relativo, vedi, ad esempio, il punto **m** sul grafico



teorema dei valori intermedi

Una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato [a, b] assume tutti i valori compresi tra il suo minimo "m" ed il suo massimo "M"

In altre parole, il teorema afferma che ogni punto (k) dell'intervallo [m, M] è immagine di almeno un punto (x_1,...) dell'intervallo [a, b]



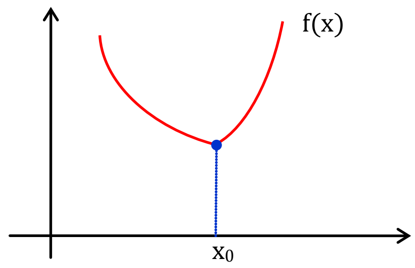
teorema degli zeri

Se una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato [a, b], assume valori di segno opposto in a e b cioè $f(a) \cdot f(b) < 0$,
allora esiste almeno un punto interno all'intervallo]a, b[in cui la funzione vale zero cioè f(z)=0

Principali teoremi di Analisi

teoremi sul calcolo differenziale

la derivabilità implica la continuità



Se una funzione è derivabile in un punto x_0 *allora* la funzione è ivi continua

Si osservi che il teorema non si può invertire, infatti: nel punto angoloso x_0 della figura la funzione è continua ma non derivabile in quanto la derivata sinistra è diversa dalla derivata destra

teorema sulla derivata della funzione inversa

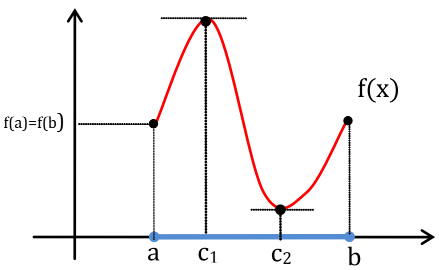
il teorema può essere utilizzato per calcolare la derivata di funzioni inverse. Si voglia ad esempio calcolare la derivata di $y = \sqrt{x}$ inversa della funzione $x = y^2$

$$D\sqrt{x} = \frac{1}{D\,y^2} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Se una funzione è derivabile in x_0 e la sua derivata è diversa da zero, *allora* anche la funzione inversa $x = f^{-1}(x_0)$ è derivabile nel punto corrispondente $y_0 = f(x_0)$ e si ha:

$$Df^{-1}(x_0) = \frac{1}{Df(x_0)}$$

teorema di Rolle

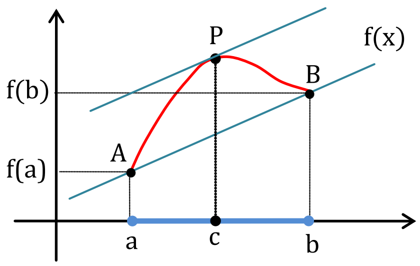


Se una funzione $f(x)$ è:

1. continua nell'intervallo chiuso e limitato [a, b]
2. derivabile nei punti interni dell'intervallo]a, b[
3. assume valori uguali agli estremi dell'intervallo cioè $f(a)=f(b)$

allora esiste almeno un punto c interno all'intervallo in cui la derivata prima si annulla cioè $f'(c)=0$

teorema di Lagrange



Se una funzione $f(x)$ è:

1. continua nell'intervallo chiuso e limitato [a, b]
2. derivabile nei punti interni dell'intervallo]a, b[

allora esiste almeno un punto c interno all'intervallo tale che:

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

il teorema è detto degli **incrementi finiti** e si può enunciare anche dicendo:
se le due funzioni verificano le ipotesi indicate, in un opportuno punto x_0 dell'intervallo]a, b[il rapporto tra le rispettive derivate in x_0 è uguale al rapporto tra gli **incrementi** delle funzioni

teorema di Cauchy

Se $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni:

1. continue nell'intervallo chiuso e limitato [a, b]
2. derivabili nei punti interni dell'intervallo]a, b[
3. e inoltre $g'(x) \neq 0$ in ogni punto interno dell'intervallo]a, b[

allora esiste almeno un punto c interno all'intervallo tale che:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

teorema di de L'Hopital

si osservi che:

1. il teorema si estende anche al caso in cui $x \to \infty$ e il imite si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$
2. il teorema, quando opportuno, può essere applicato più volte consecutivamente

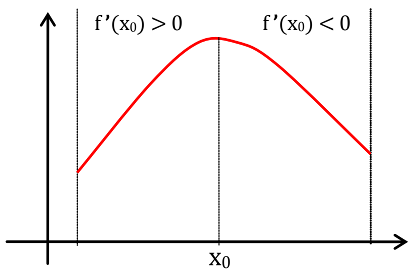
Se $f(x)$ e $g(x)$ sono due funzioni:

1. derivabili in un intorno I di x_0
2. con derivate continue e $g'(x) \neq 0$ in detto intorno
3. il limite del loro rapporto si presenta nella forma $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$

allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Principali teoremi di Analisi

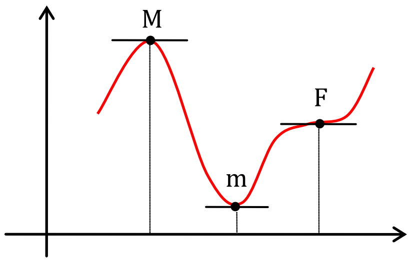


teorema sulla monotonia di una funzione

Se la derivata prima della funzione f(x) in x_0 esiste ed è positiva (negativa), cioè se $f'(x_0) > 0$ ($f'(x_0) < 0$)
allora la funzione f(x) è crescente (decrescente) nel punto x_0

vale anche il teorema inverso cioè

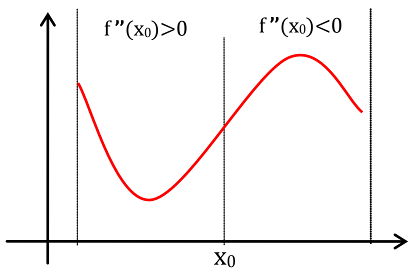
Se la funzione è crescente (decrescente) in x_0
allora la derivata prima in tale punto sarà positiva (negativa)



teorema sui massimi e minimi di una funzione (di Fermat)

Se la funzione f(x) ammette un massimo (minimo) in x_0
allora la derivata prima in x_0 è nulla cioè $f'(x_0) = 0$

Il teorema non si può invertire infatti i punti in cui la derivata prima è nulla, cioè $f'(x_0)=0$, detti **punti stazionari** , possono essere punti di massimo di minimo o di flesso orizzontale

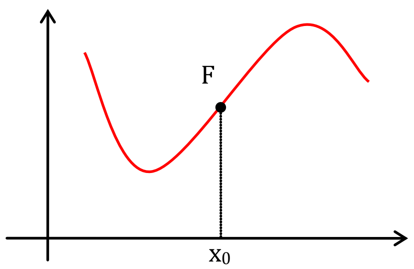


teorema sulla concavità di una funzione

Se la funzione f(x) in un punto x_0 è dotata di derivata prima e di derivata seconda continua e se la derivata seconda è positiva (negativa),
allora la funzione è concava verso l'alto (basso) in x_0

vale anche il teorema inverso cioè

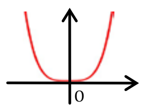
Se la funzione è concava verso l'alto (basso) in x_0
allora la derivata seconda sarà positiva (negativa)



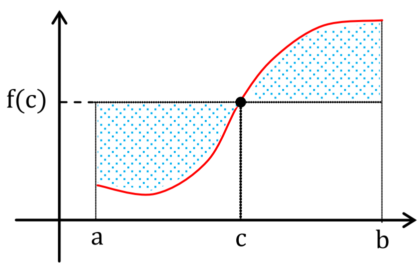
teorema sui flessi di una funzione

Se la funzione f(x) è dotata di derivata prima e di derivata seconda continua in x_0 e se tale punto è un flesso
allora la derivata seconda è nulla in x_0, cioè $f''(x_0)=0$

Il teorema non si può invertire, basti pensare alla funzione $y=x^4$ che nell'origine degli assi cartesiani ha derivata seconda uguale a 0: $f''(x^4)=12x^2$ che calcolata in 0 risulta nulla. In tale punto però non vi è un flesso, bensì un punto di minimo



teoremi sul calcolo integrale



teorema della media

Se f(x) è una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato [a, b],
allora esiste almeno un punto c appartenente all'intervallo [a, b] tale che:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\cdot f(c)$$

dal teorema deriva la formula che permette di calcolare il valore dell'integrale definito di una funzione f(x) conoscendo una sua primitiva F(x):

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

teorema fondamentale del calcolo integrale

Se una funzione f(x) è continua in [a, b]
allora esiste la derivata prima della funzione integrale $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ in ogni punto x dell'intervallo [a, b] e si ha:

$$F'(x) = f(x)$$

In altre parole il teorema, nell' ipotesi indicata, afferma che la funzione integrale è una primitiva di f(x)