**Prova in itinere di Analisi Matematica 1**

23 gennaio 2020

| COGNOME: | NOME: | MATR.: |
|---|---|---|

**Esercizio 1.** Al variare di $\alpha \in (0, +\infty)$ e di $x \in \mathbb{R}$, dire se la seguente serie è convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\log n)^n \left[ \left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)^{\frac{1}{3}} - 1 \right] \left( \frac{|\sin x|}{\log\left((1+n)^\alpha\right)} \right)^n .$$

**Esercizio 2.** Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua.
Dire se le seguenti affermazioni sono vere, e in tal caso dimostrarlo, oppure falsa, e in tal caso trovare un controesempio.

(1) Se $f([0,1]) \subseteq \mathbb{Q}$, allora $f$ è costante.
(2) Se $f(\mathbb{Q} \cap [0,1])$ è chiuso, allora $f$ è costante.
(3) Supponiamo che $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$ e che $f(q) \in \mathbb{Q}$ per ogni $q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Allora per ogni $y \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$ esiste $x \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$ tale che $f(x) = y$.

**Esercizio 3.**

(1) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tale che $f(0) = 0$ e supponiamo che esista il limite $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \alpha \in \mathbb{R}$. Dimostrare che se $b > 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$ sono tali che $\alpha < \beta < \frac{f(b)}{b}$, allora esiste $c \in (0,b)$ tale che $\frac{f(c)}{c} = \beta$.

(2) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e differenziabile. Supponendo che
$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = 0, \qquad f(1) = 1,$$
dimostrare che esiste $x \in (0,1)$ tale che $f'(x) > 1$.

## SOLUZIONI

**Soluzione esercizio 1.** La sostituzione $|\sin x| = y$ dà

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\log n)^n \left[\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)^{\frac{1}{3}} - 1\right] \frac{y^n}{\alpha^n (\log(1+n))^n},$$

che è una serie di potenze nella variabile $y$. Siccome $0 \le |\sin x| \le 1$, studiamo questa serie di potenze per $y \in [0,1]$. Si ha

$$\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)^{\frac{1}{3}} - 1 = \frac{1}{3n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) = \frac{1}{3n^\alpha}(1+o(1)),$$

$$(\log(1+n))^n = \left(\log n + \log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^n = \left(\log n + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n =$$

$$= (\log n)^n \left(1 + \frac{1}{n\log n} + o\left(\frac{1}{n\log n}\right)\right)^n.$$

Calcoliamo il raggio di convergenza della serie nella variabile $y$:

$$\left|\frac{(\log n)^n}{\alpha^n (\log(1+n))^n}\left[\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)^{\frac{1}{3}} - 1\right]\right|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\alpha}\left(1 + \frac{1}{n\log n} + o\left(\frac{1}{n\log n}\right)\right)^{-1} \frac{(1+o(1))^{\frac{1}{n}}}{3^{\frac{1}{n}} n^{\frac{\alpha}{n}}}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\alpha},$$

da cui otteniamo che il raggio di convergenza è $\alpha$.

Pertanto se $\alpha > 1$, la serie converge per ogni $y \in [0,1]$, e la serie originale converge per ogni $x \in \mathbb{R}$. Quando $\alpha \in (0,1]$, dobbiamo studiare il caso $y = \alpha$. Se $y = \alpha$ il termine generale della serie diventa

$$(\log n)^n \left[\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)^{\frac{1}{3}} - 1\right] \frac{\alpha^n}{\alpha^n (\log(1+n))^n} = \left(1 + \frac{1}{n\log n} + o\left(\frac{1}{n\log n}\right)\right)^{-n} \frac{1+o(1)}{3n^\alpha},$$

e siccome

$$\left(1 + \frac{1}{n\log n} + o\left(\frac{1}{n\log n}\right)\right)^{-n} = e^{-n\log\left(1+\frac{1}{n\log n}+o\left(\frac{1}{n\log n}\right)\right)} =$$

$$= e^{-n\left(\frac{1}{n\log n}+o\left(\frac{1}{n\log n}\right)\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1,$$

la serie è asintotica a $\sum_n \frac{1}{3n^\alpha}$ che converge se e solo se $\alpha > 1$, quindi la serie non converge. Dunque, se $\alpha \in (0,1]$, la serie nella variabile $y$ converge in $y \in [0,\alpha)$, e la serie originale converge per

$$x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (-\arcsin(\alpha) + k\pi, \arcsin(\alpha) + k\pi).$$

**Soluzione esercizio 2.**

(1) Vero. Per ipotesi $f([0,1])$ è al più numerabile. Se $f$ non fosse costante ed $f(x) < f(y)$, per il Teorema dei Valori Intermedi avremmo $\emptyset \neq [f(x), f(y)] \subseteq f([0,1])$ e $f([0,1])$ sarebbe non numerabile.

(2) Vero. Dimostriamo che l'ipotesi implica che $f([0,1])$ è numerabile, da cui segue che $f$ deve essere costante come dimostrato al punto precedente. Sia $y = f(x)$ con $x \notin \mathbb{Q}$. Sia $x_n \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ convergente ad $x$. Allora $y_n := f(x_n) \in f(\mathbb{Q} \cap [0,1])$ ed $y_n = f(x_n) \to f(x) = y$ per $n \to \infty$. L'ipotesi implica che $y \in f(\mathbb{Q} \cap [0,1])$, ovvero esiste $q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ tale che $f(q) = y = f(x)$. E quindi $f([0,1]) \subseteq f(\mathbb{Q} \cap [0,1])$, che è numerabile.

(3) Falso. Un controesempio è dato da $f(x) = x^2$.

**Soluzione esercizio 3.**

(1) Osserviamo che $\alpha = f'(0)$ ed $f$ è derivabile in 0. La funzione

$$g(x) = \begin{cases} \alpha & x = 0 \\ \frac{f(x)}{x} & x \neq 0 \end{cases}$$

è continua, quindi la tesi segue dal Teorema dei Valori Intermedi applicato a $g$.

(2) Poiché

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

esiste $\delta \in (0,1)$ tale che $f(\delta) \leq \delta/2$. Per il Teorema di Lagrange applicato nell'intervallo $[\delta, 1]$, esiste $x \in (\delta, 1)$ tale che

$$f'(x) = \frac{f(1) - f(\delta)}{1 - \delta} \geq \frac{1 - \delta/2}{1 - \delta} > 1.$$