Compito di Analisi Matematica 1

6 giugno 2022

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} e^{x^2}\int_x^{+\infty} e^{-t^2}dt, \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)\left(\int_x^{+\infty} e^{-t^2}dt\right).$$

Esercizio 2. Al variare del parametro $a\in\mathbb{R}$ dire se converge, semplicemente o assolutamente, l'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty}\left|\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right|^a \sin(x)\,dx.$$

Esercizio 3. Dire per quali valori del parametro reale $\lambda>0$ esiste finito il limite della successione per ricorrenza

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{n+1} = \lambda e^{a_n}. \end{cases}$$

Mostrare che, per $\lambda = 1/3$, il limite $\ell = \lim a_n$ è finito e mostrare che il raggio di convergenza R della serie $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n-\ell)x^n$ soddisfa la stima $R>3/e$.

SOLUZIONI

Soluzione esercizio 1. Applicando il Teorema di de l'Hôpital al primo limite, otteniamo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_x^{+\infty} e^{-t^2}dt}{e^{-x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x^2}}{2x\,e^{-x^2}} = 0.$$

Analogamente, per il secondo limite abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x e^{t^2}dt}{\left(\int_x^{+\infty} e^{-t^2}dt\right)^{-1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}}{e^{-x^2}}\left(\int_x^{+\infty} e^{-t^2}dt\right)^2 = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\int_x^{+\infty} e^{-t^2}dt}{e^{-x^2}}\right)^2 = 0.$$

Soluzione esercizio 2. Dato che

$$\lim_{x\to0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = 1,$$

l'integrale non presenta problemi in 0. Verifichiamo quindi il comportamento dell'integranda per $x \to +\infty$. Osserviamo che la funzione

$$f(x) = \left| \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - e \right|$$

è monotona decrescente, con $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Osservando che

$$\int_0^{+\infty} f(x)^a \sin(x)\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n,$$

con

$$a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x)^a\, |\sin(x)|\, dx,$$

per il criterio di Leibnitz abbiamo che l'integrale converge se e solo se $\alpha > 0$. Per valutare l'assoluta convergenza osserviamo che

$$f(x) = \frac{1}{2x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \qquad \text{per } x \to +\infty,$$

da cui otteniamo che $a_n \sim 1/n^a$ per $n \to +\infty$, e quindi l'integrale converge assolutamente se e solo se $a > 1$.

Soluzione esercizio 3. È facile verificare che la funzione $\lambda e^x - x$ è convessa, tende a $+\infty$ per $x \to \pm\infty$ ed ha un unico punto di minimo in cui vale $1 + \log \lambda$. Pertanto se $\lambda > 1/e$ si ha che $f(x) := \lambda e^x > x$ per ogni x reale; se $\lambda \in (0, 1/e]$ l'equazione $f(x) = x$ ha due soluzioni (coincidenti se $\lambda = 1/e$). Chiamiamo α la più piccola di queste due soluzioni, e notiamo che $\alpha > 0$.

Quando $\lambda > 1/e$ si ha che $a_{n+1} = f(a_n) > a_n$, ovvero a_n è strettamente crescente e dunque $\sup a_n = \lim a_n = \ell \in (0, +\infty]$. Osserviamo che ℓ non può essere $+\infty$, perché in tal caso ℓ dovrebbe essere un punto fisso per f (ovvero si dovrebbe avere $\ell = f(\ell)$).

Se $\lambda \in (0, 1/e]$, dato che f crescente, $f(0) > 0$ e $f(\alpha) = \alpha$, otteniamo che $f([0, \alpha]) \subset [0, \alpha]$. Da questo fatto otteniamo che $a_n \in [0, \alpha]$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre osservando che $f(x) \geq x\ \forall x \leq \alpha$, deduciamo che $a_{n+1} = f(a_n) \geq a_n$, ovvero la successione a_n crescente. Visto che a_n anche superiormente limitata da α, avremo che $a_n \to \ell$ con $\ell \in [0, \alpha]$; ma dato che deve essere $\ell = f(\ell)$, deduciamo che $\ell = \alpha$.

Se $\lambda = 1/3 < 1/e$ ci troviamo nel secondo caso, e osserviamo che avremo $\alpha < 1$. Possiamo allora ricavare il raggio di convergenza della serie calcolando il limite del rapporto

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1} - \alpha}{a_n - \alpha} = \lim_{n\to+\infty} \frac{f(a_n) - f(\alpha)}{a_n - \alpha} = f'(\alpha).$$

D'altra parte $f'(\alpha) < f'(1) = e/3$, e quindi il raggio di convergenza della serie sarà $R = 1/L > 3/e$.