Compitino di Analisi Matematica 1

17 docembre 2021

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1. Si mostri che per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'equazione

$$\cos(x/n) = x$$

ha un'unica soluzione (che nel seguito chiameremo x_n).

Mostrare che la successione (x_n) è limitata, e calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} x_n, \qquad \lim_{n\to+\infty} n \log x_n$$

Esercizio 2. Determinare il raggio di convergenza della serie di potenze complessa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+i/n)^n}{1+n^2} z^n.$$

Discutere poi la convergenza sul bordo del disco di convergenza.

Esercizio 3. Determinare $a, b \in \mathbb{R}$ in modo che si abbia

$$(n^2+n)^\pi - n^{2\pi} = an^b + o(n^b) \quad \text{per } n \to +\infty$$

Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+n)^\pi - n^{2\pi}}{(\pi - 2\arctan(n))^\alpha}.$$

Soluzioni

Soluzione Esercizio 1.

Per ogni fissato $n \geq 1$ poniamo $f_n(x) = \cos(x/n) - x$. È immediato verificare che f_n è continua, strettamente decrescente (dato che $f_n'(x) \leq 0$ e f_n' ha solo zeri isolati), e $f_n(0) = 1 > 0$ mentre $f_n(1) = -1 + \cos(1/n) < 0$. Pertanto f_n si annulla nell'intervallo $(0, 1)$, inoltre f_n non ha altri zeri, dato che f_n è strettamente crescente.

Osserviamo inoltre che

$$f_n(1 - \frac{1}{n^2}) = \cos\left(\frac{1 - 1/n}{n}\right) - 1 + 1/n^2 = \frac{1}{2n^2}(1 + o(1)) \quad \text{per} \quad n \to +\infty$$

Per il teorema della permanenza del segno questo implica che esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $f_n(1 - \frac{1}{n^2}) > 0$ per ogni $n \geq n_0$; di conseguenza per $n \geq n_0$ possiamo applicare il teorema degli zeri a f_n sull'intervallo $[1 - \frac{1}{n^2}, 1]$ ottenendo che

$$1 - \frac{1}{n^2} \leq x_n \leq 1 \quad \forall n \geq n_0;$$

e quindi, per il teorema dei due carabinieri, possiamo concludere che

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = 1.$$

D'altro canto $\log x_n \sim x_n - 1 = O(1/n^2)$ per $n \to +\infty$ e dunque $\lim_{n \to +\infty} n \log x_n = 0$.

Soluzione Esercizio 2.

Per calcolare il raggio di convergenza della serie di coefficienti $c_n := \frac{(3+i/n)^n}{1+n^2}$ calcoliamo il limite

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n \to +\infty} |3 + i/n| \sqrt[n]{\frac{1}{1 + n^2}} = 3$$

(nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che $\sqrt[n]{n^2} \to 1$.)

Quindi il raggio di convergenza è $R = 1/3$, e la serie converge per $|z| < 1/3$ mentre diverge per $|z| > 1/3$.

Quando $|z| = 1/3$ abbiamo che $|c_n z_n| = \frac{|(1+i/(3n))^n|}{1+n^2}$, e dato che $(1 + \frac{i/3}{n})^n \to e^{i/3}$, possiamo concludere che $|c_n z_n| \sim \frac{1}{1+n^2}$. Pertanto, grazie al criterio del confronto asintotico deduciamo che $\sum |c_n z_n|$ è convergente, cioé $\sum c_n z_n$ è assolutamente convergente (e quindi anche semplicemente convergente).

Soluzione Esercizio 3. Osserviamo che

$$\begin{aligned} (n^2 + n)^\pi - n^{2\pi} &= n^{2\pi}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\pi - n^{2\pi} \sim \pi n^{2\pi - 1} \\ (\pi - 2\arctan(n))^\alpha &= \left(2\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)^\alpha \sim \frac{2^\alpha}{n^\alpha}, \end{aligned}$$

da cui otteniamo che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+n)^{\pi} - n^{2\pi}}{(\pi - 2\arctan(n))^{\alpha}} \sim \sum_{n=1}^{\infty} n^{2\pi-1+\alpha},$$

che converge, per il criterio del confronto asintotico, se e solo se $\alpha < -2\pi$.