COMPATTEZZA E CONNESSIONE

domenica 12 giugno 2022 19:00

LEZIONE 14-16-23

Caratterizzazione degli insiemi chiusi

Sia $C \subseteq E$ spazio metrico

C e' chiuso $\iff$ comunque si prenda una successione $\{x_n\} \subseteq C$ (cioe' $x_n \in C\ \forall n$) x_n convergente si ha che $\lim_{n \to +\infty} x_n \in C$.

dim

$\Rightarrow$ Sia C chiuso e $\{x_n\} \subseteq C$ convergente.

sia $\ell = \lim_{n \to +\infty} x_n$. Tesi $\ell \in C$

Supp. per assurdo che $\ell \in C^c$

C^c e' aperto perchè C è chiuso

$\Rightarrow \exists$ intorno U di ℓ t.c. $U \subseteq C^c$

Ora dato che $\ell = \lim_{n \to +\infty} x_n \Rightarrow \{x_n\} \subseteq U \subseteq C^c$ ↯

per hp $\{x_n\} \subseteq C$

$\Leftarrow$ Supp. per assurdo che C non sia chiuso $\Rightarrow$ C^c non è aperto, cioè C^c non è intorno di ogni suo p.to

Inoltre $C \cup C^c = \mho$

$\forall\, U$ int di ℓ U contiene p.ti di C

Quindi prendo intorni della forma $U_n = \left(\frac{\ell-1}{n}, \frac{\ell+1}{n}\right) \Rightarrow$ Trovo una successione di punti $\{x_n\} \in C \cap U_n \Rightarrow \{x_n\} \subseteq C \Rightarrow x_n$ converge a ℓ

ma $\ell \notin C$ perchè $\ell \in C^c$. ↯

Def. di spazio topologico

Uno spazio topoeogico è una coppia (X, τ) dove:

X è un insieme $X \neq \emptyset$
τ è una famiglia di insiemi aperti con ee seguenti proprietà:
- $\emptyset, X$ sono aperti
- $\bigcup_{J=1}^{\infty} A_J$ è aperta
- $\bigcap_{J=1}^{n} A_J$ è aperto

(E, d) sp. metrico, $d \equiv$ distanza
La distanza induce una topologia sullo spazio metrico

$$B_r(x_0) = \{y \in E \mid d(y, x_0) < r\}$$

(E, d) diventa uno sp. topologico in cui gli aperti τ sono dati da $B = \bigcup B_r(x_0) = \{B_r(x_0) \text{ t.c. } x_0 \in E, r > 0\}$
B è detta base della topologia

Ogni sp. metrico può essere rivisto come uno sp. topologico
Ma non è vero che ogni sp. topologico è anche metrico

definizione di spazio compatto

- La compattezza è definita per $\forall$ sp. topologico
- $\exists$ due concetti di compattezza definite tramite: ricoprimenti e successioni.
- Le due definizioni coincidono per sp. metrici e sp. sequenziali

definizione

Sia E sp. topologico

E si dice compatto se ogni ricoprimento aperto di E contiene un sottoricoprimento finito

ricoprimento $\mapsto$ Un ricoprimento di un insieme E è una famiglia F di insiemi tali che $E \subseteq \bigcup \Omega_J$ dove $\Omega_J \in F$

sottoricoprimento $\mapsto$ è una sottofamiglia $G \subseteq F$ che è ancora un ricoprimento di E

definizione

E si dice numerabilmente compatto se E è compatto $\forall J$ numerabile

E CPT $\Rightarrow$ E num. CPT

definizione

E si dice sequenzialmente compatto se $\forall x_n$ successione in E $\exists x_{n_k}$ sottosuccessione convergente in E cioè $\lim_{k \to +\infty} x_{n_k} = x \in E$

Proposizione

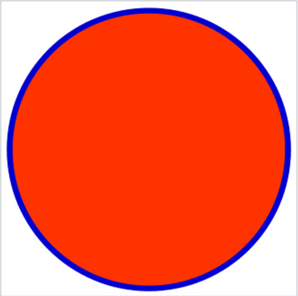
E sp. metrico compatto, $F \subseteq E$ chiuso $\Rightarrow$ F s. met. CPT

dim

Sia $x_n \in F \subseteq E$, $\exists x_{n_k} \to x \in E \xRightarrow{F \text{ è chiuso}} x \in F$

- Non vale se non è chiuso.

• Un compatto è sempre chiuso



I punti (x, y) del piano cartesiano che soddisfano la relazione $x^2 + y^2 = r^2$ formano una circonferenza qui disegnata in blu avente il centro nell'origine degli assi cartesiani e raggio r. I punti tali che $x^2 + y^2 < r^2$ sono disegnati in rosso. L'unione dei punti disegnati in rosso e di quelli in blu è un insieme chiuso, mentre la sola parte disegnata in rosso forma un insieme aperto.

Un insieme è chiuso se contiene la sua frontiera.

Proposizione

E sp. metrico, $F \subseteq E$ compatto $\Rightarrow$ F chiuso e limitato

F limitato $\rightarrow$ $F \subseteq B_r(x_0)$ per qualche x_0 ed r.

dim

1) F compatto $\Rightarrow$ F chiuso

2) F compatto $\Rightarrow$ F limitato

(1) Se per ass. F non fosse chiuso $\Rightarrow \exists$ x_0 p.to di accumulazione di F t.c. $x_0 \notin F$

$\exists\, x_n \to x_0$, $x_n \in F \Rightarrow$ F compatto $\Rightarrow \exists\, x_{n_k} \to x_1 \in F$

ma $x_1 = x_0$ ↯ perché $x_0 \notin F$ e $x_1 \in F$

(2) Se per ass. F non limitato $\Rightarrow$ dato $x_0 \in F$

$F \not\subseteq B_n(x_0)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

definiamo: $x_1 \in F \setminus B_1(x_0)$

$x_2 \in F \setminus B_{d(x_0, x_1)+1}(x_0)$

$\vdots$

$x_n \in F \setminus B_{d(x_0, x_{n-1})+1}(x_0)$

La succ. x_n verifica $d(x_n, x_m) \geq 1$ $\forall n \neq m$

Lo stesso vale per ogni sottosucc. $x_{n_k} \Rightarrow x_{n_k}$ non può convergere.

esempio di sp. metrico E e sottoins. $F \subseteq E$ chiusi, limitati non compatti.

$\ell_\infty = \{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ succ. limitate$\}$

$a_n \in \mathbb{R}$ e $|a_n| \leq M$ $\forall n$ sp v su $\mathbb{K}$.

$\|x\| = \sup_n (x_n)$

$d(x,y) = \sup_n |x_n - y_n| = \|x-y\|$

Le palle $\overline{B_R(x)} = \{ y \in \ell_\infty$ t.c $\|x-y\| \leq R \}$

sono chiuse e limitate non compatte

Basta prendere in $B_1(0)$ la succ. $x_n = (0, -, \underset{\text{n-esima posizione}}{1}, -, 0)$

Teorema

$F \subseteq \mathbb{R}^n$ F chiuso e limitato $\Rightarrow$ F compatto.

dim

$x_m \in F$ x_n succ.

caso 1 $\mapsto$ $\exists$ $x \in F$ t.c. $x_n = x$ frequentemente (per ∞ m)

$\Rightarrow$ $\exists$ $x_{n_K} = x$ $\forall K$

caso 2 $\mapsto$ $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e' ∞

F limitato $\overset{B.W}{\Rightarrow}$ $\exists$ $x \in \mathbb{R}^n$ p.to di accum. per $\{x_n\}$

$\Rightarrow$ $\exists$ x_{n_K} sottosucc. t.c $x_{n_K} \to x \in F$ (F chiuso)

Teorema di Bolzano - Weierstrass

$$\left.\begin{array}{l} E \text{ sp. metrico} \\ F \subseteq E \text{ compatto} \\ |F| = \infty \end{array}\right\} \Rightarrow F \text{ ha almeno un p.to di accumulazione } x \in F$$

dim

Sia x_n succ in F t.c. $x_m \notin \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$

$\Rightarrow \exists\, x_{n_k} \to x \in F$ e $x_{n_k} \neq x \ \forall k$

$\Rightarrow x$ e' di accumulazione per F.

Teorema di Weierstrass

Sia $f: E \to \mathbb{R}$

f continua

E sp. metrico compatto

Allora f ammette massimo e minimo in E
cioè $\exists\, x_m$ e $x_M \in E$ t.c. $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$
$\forall x \in E$.

dim

Mostro che $\exists\, x_m$ p.to di minimo.

Sia $\ell = \inf\limits_{x \in E} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$

sia $y_n \in f(E)$ con $y_n \to \ell$

$y_n = f(x_n)$ con $x_n \in E$

Ma E è CPT $\Rightarrow \exists\, x_{n_k} \to x_m \in E$

Ma f e' continua $f(x_m) = \lim\limits_k f(x_{n_k}) = \lim\limits_k (y_{n_k}) = \ell$

$\Rightarrow x_m$ e' di minimo

Mostro che $\exists\, x_M$ p.to di massimo

Sia $L = \sup\limits_{x \in E} (f(x)) \in \overline{\mathbb{R}}$

sia $y_n \in f(E)$ con $y_n \to L$

$y_n = f(x_n) \quad x_n \in E$

Ma E è CPT $\Rightarrow \exists\, x_{n_k} \to x_M \in E$

Ma f e' continua $\Rightarrow f(x_M) = \lim\limits_k f(x_{n_k}) = \lim\limits_k (y_{n_k}) = L$

$\Rightarrow x_M$ è p.to di massimo

Successioni di Cauchy

E sp. metrico, x_n successione in E

Allora x_n è successione di Cauchy se
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon$ t.c. $d(x_n, x_m) < \varepsilon \ \forall n, m > n_\varepsilon$

Proposizione

Se $x_n \to x \in E \Rightarrow x_n$ è di Cauchy

dim

$x_n \to x$ (x_n converge a x) $\Rightarrow \forall \varepsilon \ \exists n_\varepsilon$ t.c. $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall n > n_\varepsilon$

$\Rightarrow d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \varepsilon \ \forall n, m > n_\varepsilon$

Proposizione

x_n di Cauchy $\Rightarrow x_n$ è limitata

Posso esistere succ di Cauchy non convergenti

Proposizione succ. di Cauchy in $\mathbb{R}^n$

$E = \mathbb{R}^n$, x_n di Cauchy $\Rightarrow x_n \to x \in \mathbb{R}^n$ cioè converge

dim

Sia x_n di Cauchy $\Rightarrow \{x_n\}_n$ è limitata $\Rightarrow$

caso 1 $\mapsto \{x_n\} = \{x_1, \ldots, x_N\}$ finito

$\Rightarrow x_n = \bar{x_i} \Rightarrow x_n \to x_i \ \forall n$ abb. grande
$\uparrow x_n$ è di Cauchy cioè $\forall \varepsilon \ \exists n_\varepsilon$ t.c. $|x_n - x_m| < \varepsilon$
$\forall n, m > n_\varepsilon$

caso 2 $\mapsto \{x_n\}$ infinito

$\Rightarrow \exists x$ p.to di accum. $\Rightarrow \exists x_{n_k} \to x \Rightarrow$
$\Rightarrow x_n \to x$
$\hookrightarrow x_n$ è di Cauchy $\Rightarrow$
$\forall \varepsilon \ \exists k_\varepsilon$ t.c. $|x_{n_k} - x| < \varepsilon \ \forall k > k_\varepsilon$

$\Rightarrow |x_n - x| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < 2\varepsilon$

$\forall n > n_\varepsilon$. dove scelgo $k > k_\varepsilon$ t.c. $n_k > n_\varepsilon$

Definizione sp. completo

E si dice sp. completo se tutte le succ. di Cauchy in E convergono

$\mathbb{R}^n$ è completo, $\mathbb{Q}$ no

Se E è sp. metrico compatto $\Rightarrow$ E è completo

Definizione di spazio normato

E sp. v. su $\mathbb{R}$. E è normato se $\exists\ \|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ t.c.

$\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\|x\| = 0 \iff x = 0$

$\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$

$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

E diventa metrico ponendo $d(x,y) = \|x-y\|$

E sp. normato è di Banach se E è completo.

definizione

- E sp. metrico è sconnesso se $\exists\ A, B \subseteq E$ aperti, $A, B \neq \emptyset$ tali che $A \cap B = \emptyset$ e $E = A \cup B$
- E è connesso se non è sconnesso
- E è connesso per archi se $\forall x, y\ \exists\ \gamma : [a,b] \to E$ γ continua t.c. $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$
  cioè x e y collegati tramite curva

Osservazione

$E \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow$ E connesso $\iff$ E è connesso per archi

$\iff$ E è I, semiretta o $\mathbb{R}$

Osservazione

punti collegati tramite segmento

$E \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso cioè $\forall x, y \in E$

$[x, y] = \{\lambda x + (1-\lambda) y$ t.c. $\lambda \in [0,1]\}$

E è connesso per archi

Teorema generalizza v. intermedi

$f: E \to F$ continua, E, F Sp. metrici.

1 E connesso $\Rightarrow$ $f(E)$ connesso

2 E conn. per archi $\Rightarrow$ $f(E)$ conn. per archi.

dim

1 Supp. $f(E)$ sconnesso cioè $f(E) \subseteq A \cup B$, A, B aperti in F e $f(E) \cap A \neq \emptyset$, $f(E) \cap B \neq \emptyset$

$\Rightarrow E = \underbrace{f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)}_{\text{aperti}} \Rightarrow E$ sconnesso ↯

2 Sia E conn. per archi,
siano $y_1, y_2 \in f(E)$ e $x_1, x_2 \in E$ t.c. $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$ $\Rightarrow$ $\exists\ \gamma: [0,1] \to E$ continua t.c. $\gamma(0) = x_1$ e $\gamma(1) = x_2$ $\Rightarrow$

$\exists\ \tilde{\gamma}: [0,1] \to f(E)$ t.c. $\tilde{\gamma}(t) = f(\gamma(t))$

t.c. $\tilde{\gamma}(0) = f(\gamma(0)) = f(x_1) = y_1$

$\tilde{\gamma}(1) = f(\gamma(1)) = f(x_2) = y_2$

$\Rightarrow f(E)$ conn. per archi.

Proposizione

E connesso per archi $\Rightarrow$ E connesso

dim

Supp. E sconnesso $\Rightarrow E = A \cup B$ e $A \cap B = \emptyset$

siano $x \in A$ e $y \in B$

E conn. per archi $\Rightarrow \exists \gamma : [0,1] \to E$ continua con $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$

Allora $\gamma([0,1]) \subseteq A \cup B = E \Rightarrow \gamma([0,1])$ sconnesso

Assurdo perchè $[0,1]$ è connesso e γ è continua

Note

La conn per archi è + forte della connessione

In $\mathbb{R}$ coincidono sempre.

Osservazione

$$E \text{ convesso} \Rightarrow \begin{cases} E \text{ connesso} \\ E \text{ conn per archi} \end{cases}$$

Proposizione

$E \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto connesso $\Rightarrow E$ conn. per archi.

dim

Sia $x \in E$. Sia $A = \{y \in E \text{ t.c. } \exists \gamma : [0,1] \text{ continua}\}$ con $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$ $\Rightarrow A$ aperto

Analogamente se $E \setminus A$ è aperto

$\Rightarrow E = A \cup (E \setminus A)$ connesso $\Rightarrow E \setminus A = \emptyset \Rightarrow$ E conn. per archi.

esempio

$\exists C \subseteq \mathbb{R}^2$ compatto t.c. C è connesso ma C non connesso per archi

Dunque $\exists f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ che mandano connessi in connessi ma non sono continue.

Teorema

$$\left.\begin{array}{l} f: E \to F \text{ continua} \\ E \text{ sp.metrico compatto} \end{array}\right\} \Rightarrow f(E) \text{ è compatto}$$

dim

Sia y_n succ. in $f(E)$.

Sia $x_n \in E$ t.c. $f(x_n) = y_n$

Dato che E è compatto $\Rightarrow \exists\ x_{n_k} \to x \in E$

quindi (dato che f è continua) $y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(x) \in f(E)$

cioè $f(E)$ è CPT.

Corollario → Weierstrass

$f: E \to \mathbb{R}$ continua, E compatto $\Rightarrow f$ ha max e min

dim

$f(E) \subseteq \mathbb{R}$ compatto $\Rightarrow f(E)$ è chiuso e limitato

$\Rightarrow \inf f(E) = \min f(E) = \min_E f$

Analogo per sup.

(Non vale il viceversa)

sgn(x)