DERIVATE

martedì 14 giugno 2022 18:45

LEZIONE 23-

TEOREMI SULLE FUNZIONI CONTINUE

Teorema di Weierstrass

Sia $f: E \to \mathbb{R}$

1 f continua

2 E sp. metrico compatto

hp.

Tesi

Allora f ammette massimo e minimo in E cioè $\exists$ x_m e $x_M \in E$ t.c. $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$ $\forall x \in E$.

dim

Mostro che $\exists$ x_m p.to di minimo.

Sia $\ell = \inf_{x \in E} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ E CPT $\Rightarrow f(E)$ CPT

sia $y_n \in f(E)$ con $y_n \to \ell$

$y_n = f(x_n)$ con $x_n \in E$

Ma E è CPT $\Rightarrow \exists$ $x_{n_k} \to x_m \in E$

Ma f e' continua $f(x_m) = \lim_k f(x_{n_k}) = \lim_k (y_{n_k}) = \ell$

$\Rightarrow$ x_m e' di minimo

Mostro che $\exists$ x_M p.to di massimo

Sia $L = \sup_{x \in E} (f(x)) \in \overline{\mathbb{R}}$

sia $y_n \in f(E)$ con $y_n \to L$

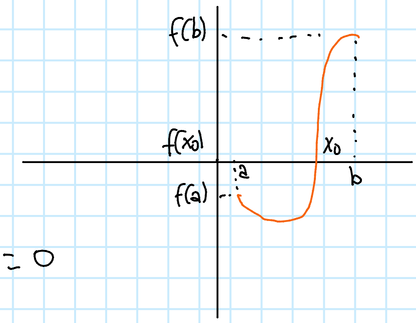
$y_n = f(x_n)$ $x_n \in E$

Ma E è CPT $\Rightarrow \exists\, x_{n_k} \to x_M \in E$

Ma f e' continua $\Rightarrow$ $f(x_M) = \lim_k f(x_{n_k}) = \lim_k (y_{n_k}) = L$

$\Rightarrow x_M$ è p.to di massimo

Il teorema mi dice che una f. continua in $[a,b]$ (chiuso e limitato) ha max e min



Teorema degli zeri

1 $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua

2 $f(a) \cdot f(b) < 0$ (segni opposti)

Tesi Allora $\exists\ x_0 \in (a,b)$ t.c. $f(x_0) = 0$

dim

Supp che $f(a) < 0$ e sia $x_0 = \sup\{x \text{ t.c. } f(x) < 0\}$

$\Rightarrow f(x_0) = 0$. Infatti se per ass. $f(x_0) < 0 \xRightarrow{\text{perm. sgn.}} \exists \varepsilon$

t.c. $f(x) < 0$ in $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ e in particolare in $[x_0, x_0+\varepsilon)$

$\lightning$ contro la def di sup

Analogamente se $f(x_0) > 0 \xRightarrow{\text{perm. segno}} \exists\ \varepsilon$ t.c. $f(x) > 0$ in

$(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \Rightarrow f(x) > 0$ in $(x_0-\varepsilon, x_0]$ $\lightning$

Il Teo mi dice che se f è continua in $[a,b]$ (chiuso e limitato) e assume valori di segno opposto agli estremi $\Rightarrow \exists$ un punto $z \in (a,b)$ t.c. $f(z) = 0$

Teorema dei valori intermedi

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua $\Rightarrow$

1 $f([a,b]) \supseteq [\min(f(a), f(b)), \max(f(a), f(b))]$

2 $f([a,b]) = [\min_{[a,b]} f(x), \max_{[a,b]} f(x)]$

dim

1 Sia $\lambda \in (f(a), f(b)) \Rightarrow$ Sia $g(x) = f(x) - \lambda$

oss. che $g(a) \cdot g(b) < 0 \Rightarrow \exists\ c$ t.c. $g(c) = 0$

$\Leftrightarrow f(c) = \lambda$ Teo degli zeri

2 $\boxed{\supseteq}$ sia $\lambda \in [\min f(x), \max f(x)] \Rightarrow$

sia $g(x) = f(x) - \lambda$. ora sgn max e min è discorde

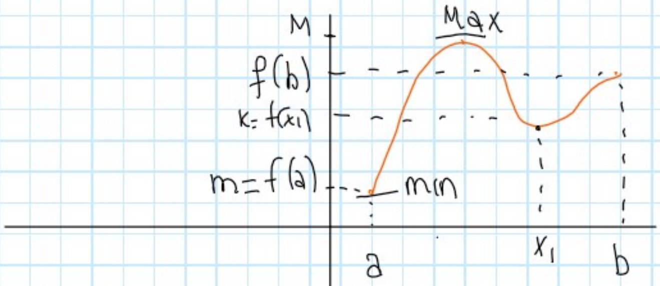
$\Rightarrow \exists c$ t.c. $g(c) = 0 \Rightarrow f(c) = \lambda$

$\boxed{\leq}$ Sia $c \in (f[a,b]) \Rightarrow \min f(x) \leq c \leq \max(f(x))$

Se per ass. $f(c) \notin [\min f(x), \max f(x)] \Rightarrow$

$f(c) > \max f(x) \quad \vee \quad f(c) < \min f(x)$ ↯

contro la def. di max e min.



Il Teo dice che: Una f. continua in $[a,b]$ (chiuso ∧ limitato) assume tutti i valori compresi tra m (min) e M (Max)

Cioè $\forall K \in [m, M]$ K è immagine di $x_1 \in [a,b]$ cioè $f(x_1) = K \in [m, M]$

Teorema

$f: I \to \mathbb{R}$ continua f è invertibile (inj) $\Leftrightarrow$ f è strett. monotona

$\Leftarrow$ se f è strett. monotona $\Rightarrow$ f è inj

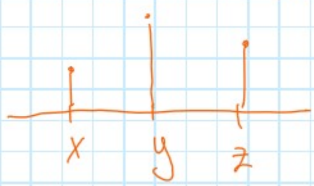
$\Rightarrow$ Se f è inj $\Rightarrow$ f è strett. monotona

Supp. per ass. f non strett. monotona

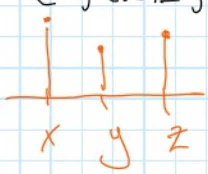
$\Rightarrow \exists\ x < y < z$ t.c. 1 $f(x) < f(y)$ e $f(z) < f(y)$

2 $f(x) > f(y)$ e $f(z) > f(y)$

caso 1



caso 2



caso 1.

sia $f(x) < f(z) < f(y)$.

Per Teo v. intermedi $f([x,y]) \supseteq [f(x), f(y)]$

$\Rightarrow \exists z' \in (x,y)$ t.c. $f(z) = f(z') \Rightarrow f$ non inj ↯ $f(z)$

Corollario

$f: I \to \mathbb{R}$ continua e invertibile, I intervallo $\Rightarrow$ f^{-1} continua.

dim

f invertibile $\Rightarrow$ f strett. monotona $\Rightarrow$ $f^{-1}: f(I) \to I$ è strett. monotona $\underset{\text{se } f \text{ non fosse continua}}{\Rightarrow}$ f^{-1} può avere solo disc. a salto $\Rightarrow f^{-1}(f(I)) = I$ non è connesso ↯

Esempi

$\arcsin(x) = \left(\sin(x)\big|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}$ è continua e strett. crescente

$\arccos(x) = \left(\cos(x)\big|_{[0, \pi]}\right)^{-1}$ è continua

$\arctan(x) = \left(\tan(x)\big|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}\right)^{-1}$ è continua

Proposizione

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che manda $\overbrace{\text{CPT} \to \text{CPT}}^{\text{hp}_1}$ e $\overbrace{\text{connessi} \to \text{connessi}}^{\text{hp } 2}$ è continua

dim

Devo dim che data $x_n \to x_0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x_n) = f(x_0)$

STEP 1 (uso hp_1)

Sia $x_n \to x_0$ e sia $K = (\overbrace{\bigcup_n x_n}^{\text{tutti i p.ti di } x_n}) \cup \{x_0\}$ K è CPT

Per hp CPT $\to$ CPT $\Rightarrow$ $f(K) = (\bigcup_n f(x_n)) \cup \{f(x_0)\}$ è CPT

STEP 2

Ora ho 2 casi

1) $\lim_n f(x_n) = f(x_0) \Rightarrow$ Tesi

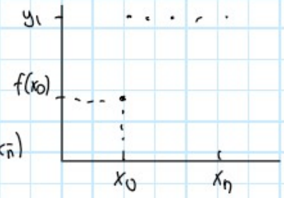
2) $\exists\, y_1$ p.to di acc. t.c. $f(x_0) \neq y_1$ con $y_1 \in f(K)$ t.c. $\underbrace{f(x_n) \xrightarrow[n]{} y_1 = f(x_{\bar{n}})}_{\text{perché } f(K) \text{ CPT}}$ a meno di sottosucc

STEP 3

Supp per ass che $\exists\, y_1$

Le stesse cose dette sopra valgono anche per $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

Quindi posso suppore sp.g.



ⓐ $x_{n+1} < x_n$ cioè x_n decresc. e $x_n \searrow x_0$

ⓑ $f(x_{n+1}) > f(x_n)$ cioè $f(x_n)$ cresc. e $f(x_n) \nearrow y_1 = f(x_n)$

ⓒ $f(x_n) < y_1 \neq f(x_0)$ *

sp.g $y_1 > f(x_0)$

STEP 4 USO hp 2

Considero * $f([x_0, x_n]) = I_n \supseteq [f(x_0), y_1] \quad \forall n$

f manda Inter → Intervalli

$\Rightarrow \exists\, \tilde{x}_n \in (x_0, x_n)$ t.c. $f(\tilde{x}_n) \in (y_1 - \frac{1}{n}, y_1)$ *

Ottengo allora una succ $\tilde{x}_n$ tc $\tilde{x}_n \to x_0$ e $f(\tilde{x}_n) \to y_1 \neq f(x_0)$

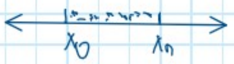
ma $f(\tilde{x}_n) \neq y_1 \quad \forall n$ *

STEP 5

Sia $H = \left(\bigcup_n \tilde{x}_n\right) \cup \{x_0\}$ He cpt

$f(H) = \left(\bigcup f(\tilde{x}_n)\right) \cup \{f(x_0)\}$ deve essere cpt ma non lo è perchè $f(H)$ non contiene y_1 che è p.to di accumulazione ⚡

*

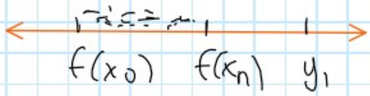


$[x_0, x_n]$ è denso di p.ti della succ.

$K \subseteq [x_0, x_n]$

$f(K) \subseteq [f(x_0), f(x_n)] \supseteq [f(x_0), y_1]$

$\shortparallel$



non contiene y_1 ⚡

Riepieogo

Weierstrass + Corollario W.

Zeri

Valori intermedi

Cont + invertibile $\Leftrightarrow$ strett. monotona

cont + invertibile $\Rightarrow f^{-1}$ continua

} sono Teor. sulle f. continue

hp in comune

$f: [a, b] \to \mathbb{R}$

$I \to \mathbb{R}$

chiuso e limitato

DERIVATA

Sia $f: E \to \mathbb{R}$ $\quad E \subseteq \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in E$ p.to di accum.

Cerco la retta che approssima meglio $f(x)$ vicino x_0.

Cerco $y = ax + b$ t.c. $f(x) - (a(x - x_0) + b) = o(x - x_0)$

se $x = x_0 \Rightarrow b = f(x_0) \Rightarrow f(x) - f(x_0) - a(x - x_0) = o(x - x_0)$

Divido per $x - x_0$ e ottengo

$$a = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = \text{derivata di } f \text{ in } x_0.$$

Se $\exists$ limite f si dice derivabile in x_0

e $f'(x_0)$ è il coeff. della retta tangente al Γf

in $(x_0, f(x_0))$

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Proposizione

se f è derivabile in $x_0 \Rightarrow f$ è continua in x_0

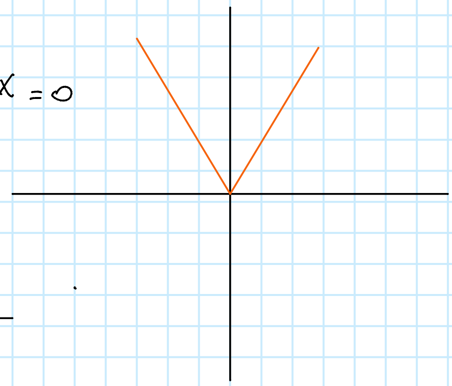
cioè $f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o(x - x_0)$

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ cioè f continua

Non è vero il viceversa.

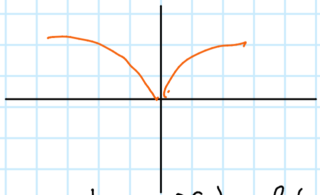
Esempi

- $f(x) = |x|$ non è derivabile in $x=0$



$$\lim_{x\to 0^\pm} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \pm 1$$

- $f(x) = \begin{cases} x^\alpha & \text{se } x > 0 \\ (-x)^\alpha & \text{se } x < 0 \end{cases}$



non è derivabile in $x=0$ $\lim_{x\to 0^\pm} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \pm\infty$

derivata dx e sx

$$\frac{df}{dx^+}(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad \text{dx} \qquad \frac{df}{dx^-}(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Proposizione

f è derivabile in $x_0 \iff \exists \; \frac{df}{dx^+}(x_0) = \frac{df}{dx^-}(x_0)$

Proprietà algebriche

① f pari $\Rightarrow$ f' dispari e viceversa

dim 1

se f è pari $f'(-x) = \lim_{\substack{h\to 0 \\ h = x - x_0}} \frac{f(-x+h)-f(-x)}{h} \overset{f \text{ pari}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(x-h)-f(x)}{-h} = -f'(x)$

② $(cf)'(x) = cf'(x)$ costante

③ $(f\pm g)'(x) = f' \pm g'$ somma

④ $(f\cdot g)' = f'g + fg'$ prodotto

dim 4

$$(fg)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} + \frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \right]$$

$$= g(x)\lim\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] + f(x) \lim_{h} \left[\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] = gf' + fg'$$

reciproco

5 Se f è derivabile in x e $f'(x) \neq 0 \Rightarrow 1/f$ è derivabile in x e $\left(1/f\right)' = -\dfrac{f'(x)}{f(x)^2}$

dim 5

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = \lim_{h\to 0} \overbrace{\frac{1}{h}\left(\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)}\right)}^{1/f'} = \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{-[f(x+h)-f(x)]}^{-f'(x)}}{h \underbrace{f(x+h)f(x)}_{f^2(x)}} = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

6 uso 5+4

dim $\left(\dfrac{f}{g}\right)' \underset{prod.}{=} \left(f \cdot \dfrac{1}{g}\right)' \underset{4}{=} \dfrac{f'}{g} + f\left(\dfrac{1}{g}\right)' \underset{5}{=} \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

composizione

7 $\left.\begin{array}{l} f, g \text{ derivabili in } x_0 \\ f \text{ derivabile in } g(x_0) \end{array}\right\} \Rightarrow f \circ g$ derivabile in x_0.

e $(f\circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))\, g'(x_0)$

dim

Dobbiamo vedere che

$f(g(x)) - f(g(x_0)) = f'(g(x_0))\, g'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$

So che

1 $g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$

2 $f(g(x)) = f(g(x_0)) + f'(g(x_0))(g(x)-g(x_0)) + \underset{o(x-x_0)}{\underset{\shortparallel}{o(g(x)-g(x_0))}}$

$= f(g(x_0)) + f'(g(x_0)) \underbrace{g'(x_0)(x-x_0)}_{\text{uso } 1} + o(x-x_0)$

inversa

8) f invertibile in un int di x_0 e derivabile in x_0 con $f'(x_0) \neq 0 \Rightarrow f^{-1}$ è derivabile in $f(x_0)$ e si ha

$(f^{-1})'(f(x_0)) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

dim. 8

Sappiamo che

1 $f^{-1}(f(x)) = x$

2 $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$

$$f^{-1}(\underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)}_{= y}) = x_0 + x - x_0$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x_0 = f^{-1}(y_0) \\ y_0 = f(x_0) \end{array}}$$

$$y = y_0 + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$$

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) + (x-x_0) = f^{-1}(y_0) + \frac{y-y_0}{f'(x_0)} + o(y-y_0)$$

$$\Rightarrow \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y-y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

derivate di f. elementari

- $(c)' = 0 \quad \forall c \in \mathbb{R}$
- $(ax+b)' = a \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$
- $(x^n)' = n\, x^{n-1}$

dim

$$(x^n)' = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} h^j - x^n}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{n x^{n-1} h + o(h)}{h} = n x^{n-1}$$

oss $\to$ se $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ ha grado $n \Rightarrow p'(x)$ ha deg $n-1$

- $\sin'(x) = \cos x$

dim

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cdot \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x)[\cos h - 1]}{h} + \frac{\sin h}{h} \cdot \cos x =$$

$$= \lim_{h \to 0} \underbrace{h \cdot \sin(x)}_{\downarrow\, 0} \cdot \underbrace{\left(\frac{\cos h - 1}{h^2}\right)}_{\downarrow\, \frac{1}{2}} + \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\downarrow\, 1} \cos x = \cos(x)$$

- $\cos'(x) = \sin(x)$

- $(\tan(x))' \underset{\text{dim}}{=} \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\overbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}^{1}}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$

- $(e^x)' = e^x \quad x \in \mathbb{R}$

dim

$(e^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \left(\frac{e^h - 1}{h}\right)^{1} = e^x \cdot 1 = e^x$

- $(\log(x))' = \frac{1}{x} \quad x>0 \quad \sim \quad (\log(|x|))' = \frac{1}{x} \quad x\neq 0$

dim

$\lim_{h\to 0} \frac{\log(x+h) - \log(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\log\left(\frac{x+h}{x}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\log\left(1+\frac{h}{x}\right) = \lim_{h\to 0} \left(\frac{\log(1+\frac{h}{x})}{\frac{h}{x}}\right)^{1} \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$

9 f derivabile $\Rightarrow (e^f)' = f' e^f$

10 f derivabile e $f>0 \Rightarrow \log(f') = f'/f$

11 f,g derivabili $f>0 \Rightarrow f^g = e^{g\log(f)} \Rightarrow (f^g)' = (g\log(f))' \cdot e^{g\log(f)} =$

$= e^{g\log f}\left(g'\log f + \frac{gf'}{f}\right) = f^g\left(g'\log f + g\frac{f'}{f}\right)$

nota $(\log f)' = f'/f$

Esempi

- $x^\alpha \quad x>0 \quad \alpha \in \mathbb{R}$

$x^\alpha = e^{\alpha\log(x)} \Rightarrow (x^\alpha)' = (e^{\alpha\log(x)})' = e^{\alpha\log(x)}\left(\frac{\alpha}{x}\right) = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$

- $a^x = e^{x\log a} \quad a>0 \quad x\in\mathbb{R}$

$(a^x)' = (e^{x\log a})' = e^{x\log a} \cdot (\log a) = a^x \log(a)$

- $\underset{x>0}{x^x} = e^{x\log(x)} \Rightarrow (x^x)' = e^{x\log(x)} \cdot \left(\frac{x}{x} + \log(x)\right) = x^x(1+\log x) =$

$(\arcsin y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

$\arcsin(y) = \sin x \Big|^{-1}_{[-\pi/2,\ \pi/2]}$

$y = \sin x \Rightarrow x = \arcsin y \ \star$

$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$

$(\arcsin(y))' \underset{\downarrow}{=} \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} \overset{\star}{=} \frac{1}{\cos(\arcsin y)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin y)}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

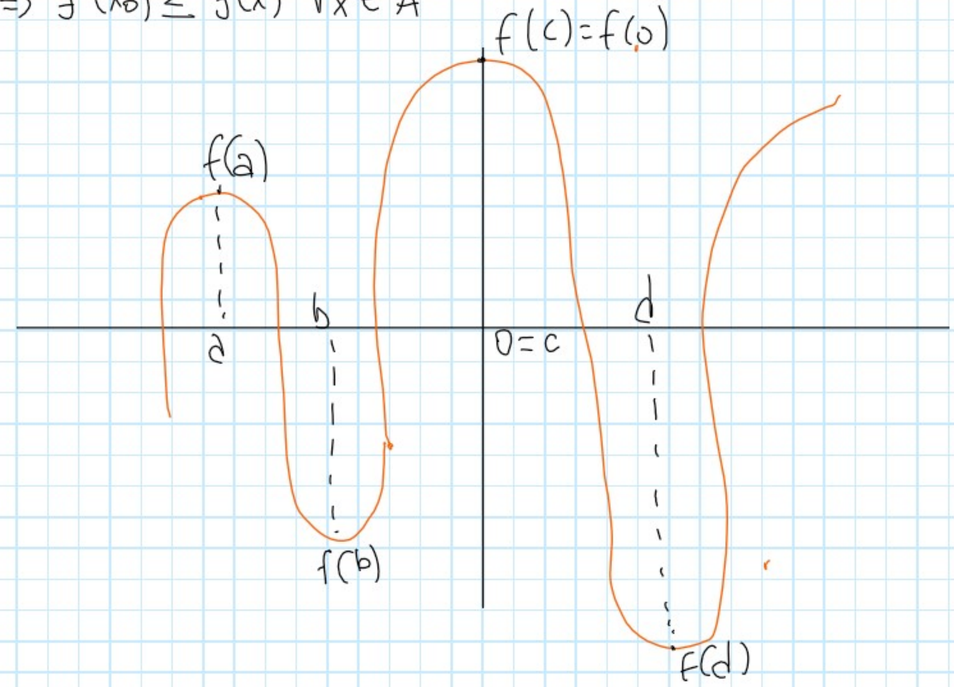
prop f inversa derivata

$\arccos(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ $\quad$ $\arctan(y) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$

TEOREMI SULLE DERIVATE

definizione

- x_0 è p.to di massimo relativo locale di f su A
$\iff \exists\ \delta > 0$ t.c. $f(x_0) \geq f(x)\ \forall x \in A \cap B_\delta(x_0)$
- x_0 è p.to di minimo relativo locale di f su A
$\iff \exists\ \delta > 0$ t.c. $f(x_0) \leq f(x)\ \forall x \in A \cap B_\delta(x_0)$
- x_0 è p.to di massimo assoluto globale di f su A
$\iff f(x_0) \geq f(x)\ \forall x \in A$
- x_0 è p.to di minimo assoluto globale di f su A
$\Rightarrow f(x_0) \leq f(x)\ \forall x \in A$



a p.to di max relativo $\Rightarrow f(a)$ max rel.
b p.to di min relativo $\Rightarrow f(b)$ min rel.
c p.to di max assoluto $\Rightarrow f(c)$ max ass.
d p.to di min assoluto $\Rightarrow f(d)$ min ass.

nota

Un min/max assoluto è anche relativo
$\Lambda \neq$ non vale il viceversa

nota

affinche x_0 sia p.to di max/min è necessario che $f'(x_0) = 0$

nota

x_0 p.to di max $\Rightarrow$ $f(x) \nearrow$ a sx e $f(x) \searrow$ a dx

x_0 p.to di min $\Rightarrow$ $f(x) \searrow$ a sx e $f(x) \nearrow$ a dx

Come calcolare max e min.

Calcolare $f'(x)$

Trovare i candidati p.ti di min e max ponendo $f'(x) = 0$

Studiare sgn di $f'(x)$ ponendo $f'(x) > 0$

Distinguere p.ti di min/max relativi e assoluti

Sostituire i punti nella funzione e trovare $f(min)$, $f(max)$ cioè min e max

CRITERIO DI FERMAT

$f: A \to \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} 1\ \ x_0 \in int(A) \\ 2\ \ x_0 \text{ p.to di } \overset{\min}{\underset{\vee}{}}\max \text{ relativo per } f \text{ su } A \\ 3\ \ f \text{ derivabile in } x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\text{Tesi}}{f'(x_0) = 0}$$

dim

Sp.g supp x_0 p.to di min relativo

hp. 1 x_0 p.to interno $\Rightarrow \exists\ \delta_1 > 0$ t.c. $B_{\delta_1}(x_0) \subset A$

hp 2 x_0 pto di min $\Rightarrow \exists\ \delta_1 > \delta > 0$ t.c. $f(x_0) \leq f(x)\ \forall x \in B_\delta(x_0)$

se $x \in B_\delta(x_0) \to \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \begin{cases} \geq 0 & \text{se } x > x_0 \\ \leq 0 & \text{se } x < x_0 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \\ f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 \leq f'(x_0) \leq 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

Permette di individuare i p.ti di max e min.

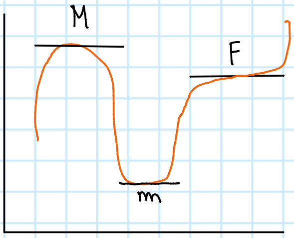
Quindi l'annullamento della derivata prima è cond necessaria affinché x_0 sia pto di min/max relativo

Cioè i punti di max e min sono $\underset{}{\overset{f'=0}{\text{stazionari}}}$

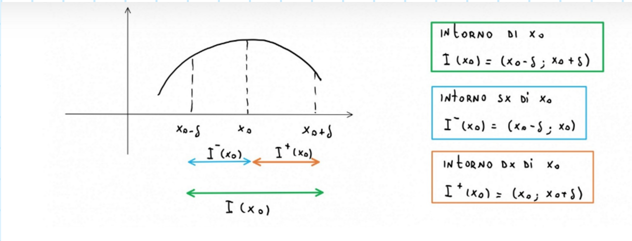
Non vale il viceversa

I punti stazionari possono essere p.ti di flesso orizzontale e non min/max

$f(x) = x^3$ $f'(x) = 3x^2$ $f'(0) = 0$ ma 0 è p.to di flesso orizz e non min/max

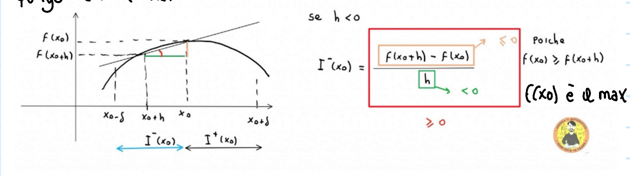


Significato geometrico

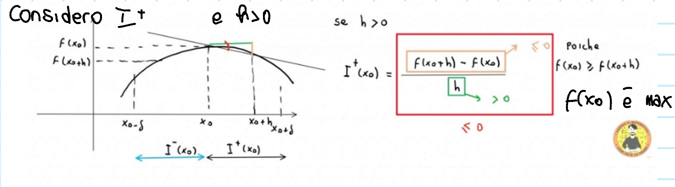


Considero I^-

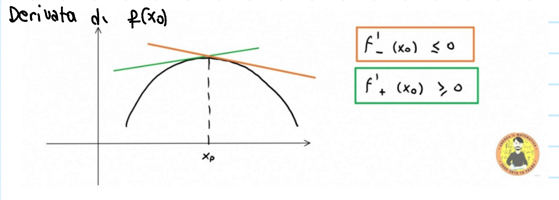
pongo l'incremento $h < 0$

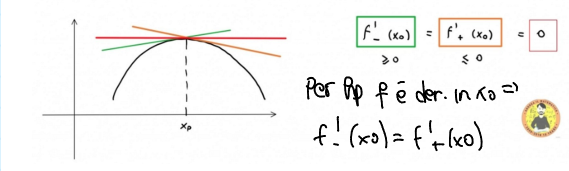


Considero I^+ e $h > 0$



Derivata di $f(x_0)$





Per Ip f è der. in $x_0 \Rightarrow$

$f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$

Corollario

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua $\overset{W}{\Rightarrow}$ f ammette max e min

Il max potrebbe coincidere con un estremo $x_0 \in \{a, b\}$

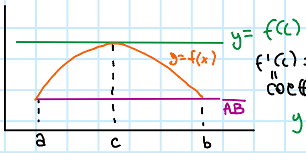
Il max potrebbe essere interno ma f non è derivabile in $x_0 \in (a, b)$

Il max è interno e f derivabile in x_0 $\Big\} \underset{\text{Fermat}}{\Rightarrow} f'(x_0) = 0$

Teorema di Rolle

$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} 1 \;\; f \text{ continua su } [a, b] \\ 2 \;\; f \text{ derivabile su } (a, b) \\ 3 \;\; \ell = f(a) = f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \, \xi \in (a, b) \text{ t.c. } f'(\xi) = 0$$



$f'(c) = 0$
$\shortparallel$
coeff. angolare della retta y tangente a $f(x)$ in c
y ∥ all'asse x   y ∥ $\overline{AB}$

dim

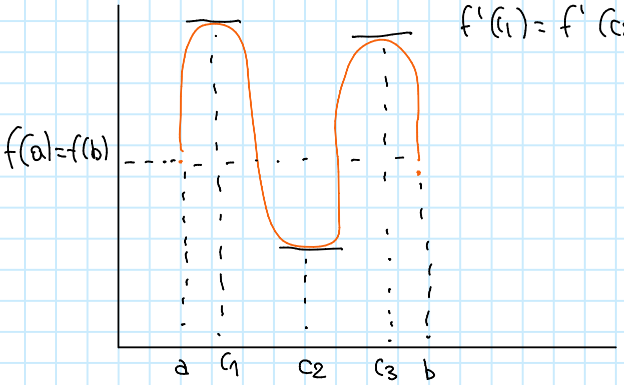
Per 1 + Weierstrass $\exists$ max e min di $f(x)$ in $[a, b]$

con $\max\limits_{x \in [a,b]} f(x) \geq \ell \geq \min\limits_{x \in [a,b]} f(x)$

Quindi ho 2 casi

ⓐ Se sia il max che il min sono al bordo $\Rightarrow \min f(x) = \max f(x) \Rightarrow$
f è costante per 3 cioè $f(x) = \ell \;\; \forall x \in [a, b] \Rightarrow f'(x) = 0 \;\; \forall x \in [a, b]$

ⓑ Se $\min f(x) \neq \max f(x) \Rightarrow$ o $\min f(x) \neq \ell \;\vee\; \max f(x) \neq \ell$
S.p.g. sia il $\max f(x) \neq \ell \Rightarrow \exists \; \xi \in [a, b]$ t.c. $f(\xi) = \max\limits_{x \in [a,b]} f(x) > \ell$
$\Rightarrow \xi \notin \{a, b\} \Rightarrow \xi \in (a, b) \underset{\text{Fermat}}{\Rightarrow} f'(\xi) = 0$
so che $f(a) = f(b)$
e sono nel caso b
ξ non è un estremo



$f'(c_1) = f'(c_2) = f'(c_3) = 0$

Teorema di Darboux

1 $f: [a,b] \to \mathbb{R}$
2 C^1 su $[a,b]$
3 $f'(a) < 0$ e $f'(b) > 0$

$\Rightarrow \exists\, \xi \in [a,b]$ t.c. $f'(\xi) = 0$

dim

Per W. f ha max e min

Il p.to di min ξ deve essere interno $\xi \in (a,b)$ perché $f'(b) \neq 0$ e $f'(a) \neq 0$ per hp. e un p.to di min deve essere stazionario

(a) b non può essere p.to di min locale

$$f'(b) \left\{ \frac{f(b) - f(x)}{b - x} \xrightarrow[x \to b^-]{} f'(b) > 0 \right. \underset{\text{perm sgn.}}{\Rightarrow} \frac{f(b) - f(x)}{b - x} > 0 \text{ in } [b - \delta, b)$$

$$\Rightarrow f(b) - f(x) > 0 \quad \forall x \in (b - \delta, b)$$

$f(b) > f(x) \Rightarrow b$ non è p.to di min.

(b) Analog. a non è p.to di min

$$f'(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(a) - f(x)}{a - x} < 0 \underset{\text{p. segno}}{\Rightarrow} \frac{f(a) - f(x)}{a - x} < 0 \quad \forall x \in (a, a+\delta) \Rightarrow$$

$f(a) - f(x) > 0$ ho moltiplicato per $a - x < 0$

$\Rightarrow f(a) > f(x) \quad \forall x \in (a, a+\delta) \Rightarrow$

$f(a)$ non può essere p.to di min

$$\Rightarrow \exists\, \xi \in (a,b) \underset{\text{Fermat}}{\Rightarrow} f'(\xi) = 0$$

Corollario

f' manda intervalli in intervalli

dim

$f \in C^1 \Rightarrow f'$ continua $\Rightarrow f'$ manda CPT $\to$ CPT

connessi $\to$ connessi

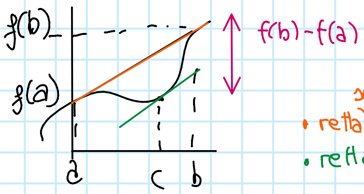
TEOREMA DI LAGRANGE

1 $f: [a,b] \to \mathbb{R}$

2 f continua su $[a,b]$

3 f derivabile su (a,b)

$\Rightarrow$ Tesi: $\exists\, c \in (a,b)$ t.c. $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$



$\overline{AB} \parallel \bar{C}$

secante a f(x)

- retta passante per A e B $\to \overline{AB}$
- retta tangente a f(x) in c. $\bar{C}$

dim

Sia $h(x) = f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

Ora hp 1 Rolle h è continua su $[a,b]$

hp 2 Rolle h è derivabile su (a,b)

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$h(a) = f(a)$$

$$h(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{\cancel{b-a}}\cancel{(b-a)} = f(a)$$

Quindo ho hp 3 di Rolle $h(a) = h(b)$ hp 3 Rolle

Quindi $\exists\, c \in (a,b)$ t.c.

$$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\Rightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

cioè i coeff. ang delle rette tangenti sono =
$\Rightarrow$ le rette sono $\parallel$.

Corollario

Se $I \subsetneq \mathbb{R}$, Intervallo,
$f: I \to \mathbb{R}$ continua e derivabile in int(I)
Allora

1 se $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in \text{int}(I) \Rightarrow f(x)$ è deb. decres.

2 se $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \text{int}(I) \Rightarrow f(x)$ è deb. crescente

3 $f'(x) = 0 \quad \forall x \in \text{int}(I) \Rightarrow f(x)$ è costante

dim

1 se $a, b \in I$ con $a < b \Rightarrow [a,b] \subseteq I$

dim

1 se $a, b \in I$ con $a < b \Rightarrow [a, b] \subseteq I$

Applico La Grange $\Rightarrow \exists\, c \in (a, b)$ t.c. $\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(c) \leq 0$

$\Rightarrow f(b) - f(a) \leq 0$ perché $b - a \geq 0 \Rightarrow f(b) \leq f(a)$

2 se $a, b \in I$ con $a < b \Rightarrow [a, b] \subseteq I$

Per La grange $\exists\, c \in (a, b)$ t.c. $\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(c) \geq 0$

$b - a \geq 0 \Rightarrow f(b) - f(a) \geq 0 \Rightarrow f(b) \geq f(a)$

3 Se vale 3 $\Rightarrow$ vale 1 e 2 $\Rightarrow$ f è deb. cresc e debolm decresc

$\Rightarrow$ f è costante

Contro esempio

Serve che I sia un intervallo

$f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ $\quad f(-1) = -1 < f(1) = 1$

f non è decres. su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ma è decrescente su $(-\infty, 0)$ e su $(0, +\infty)$

TEOREMA DI CAUCHY

1 $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$

2 f, g continue su $[a, b]$

3 f, g derivabili su (a, b)

$\Rightarrow \exists\, c \in (a, b)$ t.c.

$[f(b) - f(a)]\, g'(c) = [g(b) - g(a)]\, f'(c)$

dim

f. ausiliaria

Sia $h(x) = [f(b) - f(a)]\, g(x) - [g(b) - g(a)]\, f(x)$

hp1 Rolle $h(x)$ è continua su $[a, b]$

hp2 Rolle $h(x)$ è derivabile su (a, b)

e $h'(x) = [f(b) - f(a)]\, g'(x) - [g(b) - g(a)]\, f'(x)$

hp 3 Rolle $\quad h(a) = h(b)$

$\cdot\ h(a) = [f(b) - \cancel{f(a)}]\, g(a) - [g(b) - \cancel{g(a)}]\, f(a) =$

$= f(b)\, g(a) - g(b)\, f(a)$

· $h(b) = [\cancel{f(b)} - f(a)]g(b) - [\cancel{g(b)} - g(a)]f(b) =$

$= g(a)f(b) - f(a)g(b)$

h soddisfa Rolle

$\Rightarrow \exists c$ t.c. $h'(c) = 0$

$[f(b) - f(a)]g'(c) - [g(b) - g(a)]f'(c) = 0$

$\Rightarrow [f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c)$

nota se prendo $g(x) = x$ riottengo La Grange

Corollario

se $g'(x) \neq 0 \Rightarrow \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

DERIVATE SUCCESIVE

definizione

$$\frac{d^n f}{d x^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} f}{d x^{n-1}}\right) = f^{(n)} \equiv \text{derivata } n\text{-esima di } f.$$

Proposizione

Sia $f: A \to \mathbb{R}$, A aperto, $x_0 \in A$

Se f e' derivabile 2 volte in x_0.

Allora:

1 se x_0 é p.to stazionario cioè $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$

$\Rightarrow$ x_0 è p.to di min. locale stretto cioè $f(x_0) < f(x)$

$\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ $x \neq x_0$

2 Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$ $\Rightarrow$ x_0 ē max. locale stretto

3 Se x_0 é min. locale $\Rightarrow$ $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) \geq 0$

4 Se x_0 è max locale $\Rightarrow$ $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) \leq 0$

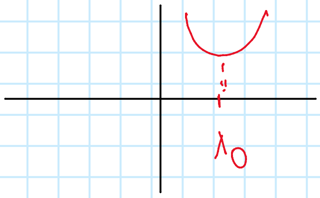
dim

1) So che $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} > 0$$

$\Rightarrow$ per la perm. del sgn. $\frac{f'(x)}{x - x_0} > 0$ con $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(x) > 0 & x \in (x_0, x_0+\varepsilon) \Rightarrow f \text{ strett. cresc.} \\ f'(x) < 0 & x \in (x_0-\varepsilon, x_0) \Rightarrow f \text{ strett. decres.} \end{cases}$$



2) analogo

3) x_0 min locale per $f \Rightarrow f'(x_0) = 0$

$\Downarrow$

$\exists \varepsilon$ t.c. $\overbrace{f(x) \geq f(x_0)}^{*}$ $\forall x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$

Quindi per Lagrange $\forall x \in (x_0, x_0+\varepsilon)$ $\exists c_x \in (x_0, x)$

t.c. $f'(c_x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ per $*$

Ma allora $f''(x_0) = \lim_{c_x \to x_0} \dfrac{f'(c_x) - f'(x_0)}{c_x - x_0} \geq 0$

perché $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f'(c_x) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f''(x_0) \geq 0$

4) Analogo a 3

Nota

Se f'' è $\neq 0 \Rightarrow$ c'è un'invers. di monotonia

Proposizione

$$\begin{cases} \cdot\ f: A \to \mathbb{R} \quad A \text{ int di } x_0. \\ \cdot\ f \text{ derivabile } n\text{-volte in } x_0 \\ \cdot\ f^{k}(x_0) = 0 \text{ con } 1 \leq k < n \text{ e } f^{(n)}(x_0) \neq 0 \end{cases}$$

Allora

1 Se n è pari e $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ è un min loc. stretto

2 Se n è pari e $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ è un max loc. stretto

3 Se n è dispari e $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow f$ è strett. cresc. $\Rightarrow$ x_0 non è max o min.

4 Se n è dispari e $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow f$ è strett. decresc $\Rightarrow$ x_0 non è max o min.

Dato $A \subseteq \mathbb{R}$ aperto si indica con

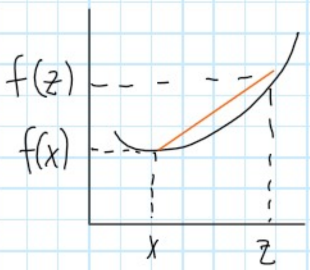
$C^n(A) = \{ f : A \to \mathbb{R}$ derivabili n-volte con $f^{(n)}$ continua$\}$

FUNZIONI CONVESSE E CONCAVE

definizione

$f : I \to \mathbb{R}$, I intervallo è convessa se $\forall\, x < y < z$
si ha che $f(y) \leq f(x) + \boxed{\frac{f(z) - f(x)}{z - x}}(y - x)$

coeff. angolare



a segmento sta sopra al

f è concava se $-f$ è convessa

combinazione convessa

La disuguaglianza
si può scrivere così:

$y = \lambda x + (1 - \lambda) z \qquad \lambda \in [0, 1]$

si ha $f(y) = f(\lambda x + (1 - \lambda) z) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(z)$

Proposizione

$f: I \to \mathbb{R}$ derivabile, f convessa $\Leftarrow\Rightarrow$ f' crescente

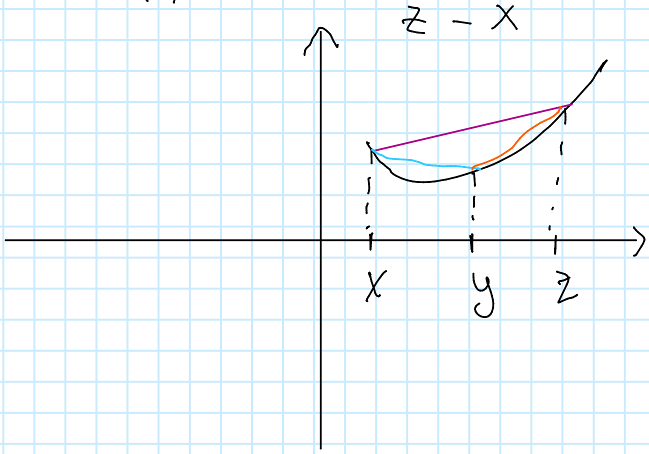
$\boxed{\Rightarrow}$

$\forall\, x < y < z$

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

$\downarrow$ per $y \to x$ $\qquad\qquad$ $\downarrow$ $y \to z$

$$f'(x) \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq f'(z) \Rightarrow f' \text{ crescente}$$



la pend xy < la pend. xz

< la pend yz

pend = coeff. angolare

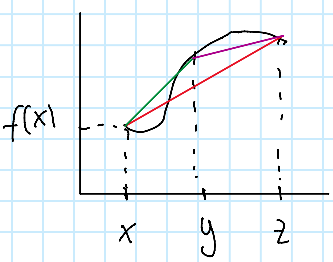
$\Leftarrow$

Se f' è crescente

Supp. per ass. f non convessa cioè

$\exists\, x < y < z$ t.c. $f(y) > f(x) + \dfrac{f(z) - f(x)}{z - x}(y - x)$

In particolare $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} > \dfrac{f(z) - f(y)}{z - y}$



Per La Grange $\exists\, \alpha \in (x, y)$ e $\beta \in (y, z)$ t.c.

$$f'(\alpha) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} > \frac{f(z) - f(y)}{z - y} = f'(\beta)$$

contraddice f' crescente

Corollario

Se $f: I \to \mathbb{R}$ è derivabile due volte $\Rightarrow f$ è convessa $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0$

Se $f: I \to \mathbb{R}$ è convessa e derivabile due volte in $x_0 \Rightarrow f''(x_0) \geq 0$

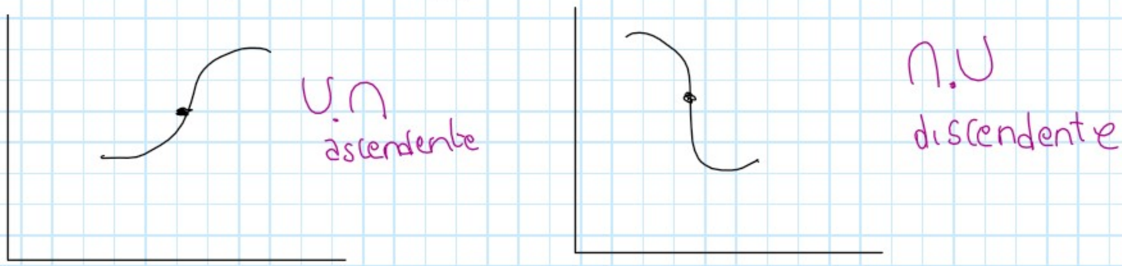
PUNTI DI FLESSO

I p.ti in cui la funzione passa da concava a convessa e viceversa si chiamano p.ti di flesso

Sia f cont. e derivabile $f: (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$

e f è convessa in $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ ed f è concava in $(x_0, x_0 + \varepsilon)$

$\Rightarrow x_0$ è p.to di flesso.



Definizione

$f: (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ cont. in x_0.

cambia concavità in x_0 e

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{array}{l} \to +\infty \\ \to -\infty \end{array}$$

$\Rightarrow$ x_0 è p.to di flesso a tangente verticale

Proposizione

$f: I \to \mathbb{R}$ I int. aperto f convessa $\Rightarrow$

1 f. continua in I

2 $\forall x \in I \quad \exists \ \frac{df}{dx^-}(x) \leq \frac{df}{dx^+}(x)$

3 se $x \leq y \Rightarrow \frac{df}{dx^\pm}(x) < \frac{df}{dx^\pm}(y)$

4 $\mathrm{disc}\left(\frac{df}{dx^-}\right) = \mathrm{disc}\left(\frac{df}{dx^+}\right) \Rightarrow f$ è derivabile $\forall x \in \mathrm{disc}\left(\frac{df}{dx^\pm}\right)$

$\equiv$ ins. num. di p.ti angolosi ess. disc. a salto.

dim

$2 \Rightarrow 1)$ Se f è der. a dx e a sx $\Rightarrow f$ è continua

2. Fisso $y \in I$, $\forall x < y < z$ ho

quantità negativa che diventa sempre + piccola

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

monotona crescente in x — monotona crescente in z $\Rightarrow$ per $z \to y$ va decrescendo

per $x \to y$ aumenta

facendo $\lim_{x \to y}$ e $\lim_{z \to y}$ $\Rightarrow \exists \ \frac{df}{dx^-}(y) \leq \frac{df}{dx}(y)$

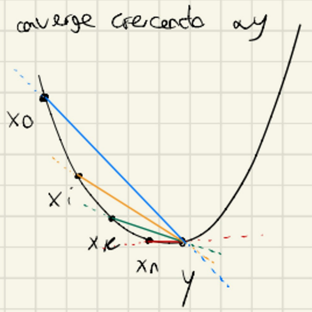
$\Rightarrow \boxed{2}$

3) segue dalla monotonia dei rapporti incrementali

$3 \Rightarrow 4)$ deriva da f monotona $\Rightarrow \mathrm{disc}(f)$ numerabile

Monotona crescente in x:

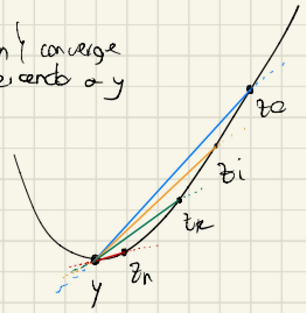
$\{x_n\}$ converge crescendo a y



Il coefficiente angolare di queste rette è negativo ma per $x \to y$ diventa sempre più piccolo, e infine in $(y-\varepsilon, y)$ positivo.

Monotona crescente in z:

$\{z_n\}$ converge decrescendo a y



Il coefficiente angolare di queste rette è positivo e crescente in z. Per $z \to y$ ovviamente decresce.

STUDIO DI FUNZIONE

1 dominio
2 segno di $f(x)$
3 simmetrie (PARI - DISPARI - PERIODICHE)
4 discontinuità
5 limiti agli estremi del dominio (incluso $\pm\infty$)
6 asintoti (orizz, vert, obliqui)
7 $f'(x)$
8 segno di $f'(x)$, monotonia di f', max e min locali.
9 discontinuità di f' (p.ti angolosi, cuspidi, flessi verticali)
10 $f''(x)$
11 segno di $f''(x)$, I concavità e I di convessità, flessi, max e min ass.
12 Traccia Γ f(x)

HOPITAL

Servono a risolvere lim. della forma $\frac{0}{0}$ v $\frac{\infty}{\infty}$

I TEOREMA $(H, \frac{0}{0})$

1 Sia $x_0 \in \mathbb{R}$, I int di x_0 $(x_0 \in I)$

2 f, g continue su I $\quad f(x_0) = g(x_0) = 0$

3 f, g derivabili su $I \setminus \{x_0\}$ $\quad g'(x_0) \neq 0 \quad \forall x \in I \setminus \{x_0\}$

Allora se $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

dim

OSS. g non si annulla in $I \setminus \{x_0\}$ perchè se $g(x_1) = 0 = g(x_0) \overset{\text{Rolle}}{\Rightarrow}$ $\Rightarrow \exists\, c \in (x_0, x_1) \subset I$ per cui $f'(c) = 0$ contro ip. 3

$\vdash$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \quad \text{perchè } f(x_0) = g(x_0) = 0$$

Per Cauchy $\exists\, \xi_x \in (x_0, x)$ t.c. $\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}$

se $x \to x_0 \Rightarrow \xi_x \to x_0$

Quindi $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} \xrightarrow{x \to x_0} l$ Per Teo di conf. di limiti

Non vale il viceversa

esempio

$f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x}) \qquad g(x) = \sin x$

$f'(x) = 2x \sin(\frac{1}{x}) + x^2 \cos(\frac{1}{x}) \qquad g'(x) = \cos(x)$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \underset{\downarrow\, 0}{x}\, \underbrace{\frac{x}{\sin x} \cdot \sin(\tfrac{1}{x})}_{\text{limitata}} \quad x \to 0 \qquad \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x \sin(\frac{1}{x}) + x^2 \cos(\frac{1}{x})}{\cos(x)} \;\nexists \lim$$

Teorema (H, 8) $x_0 = +\infty$

1 Se $g, f \in C((a,+\infty))$ continue

2 se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$

3 se f, g derivabili su $(a,+\infty)$, $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,+\infty)$

Allora se $\exists \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

dim

$\tilde{f}(t) = f\left(\frac{1}{t}\right) \qquad \tilde{g}(t) = g\left(\frac{1}{t}\right) \qquad \tilde{f}, \tilde{g}$ Cont. su $\left(0, \frac{1}{a}\right)$

$\lim_{t \to 0} \tilde{f}(t) = 0 = \lim_{t \to 0} \tilde{g}(t) \Rightarrow \tilde{f}, \tilde{g}$ sono estendibili

per continuita' anche sull'origine $\Rightarrow$ ricado al teo precedente con x_0 finito

$\tilde{f}'(t) = f'\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)$

$\tilde{g}'(t) = g'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)$

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\tilde{f}'(t)}{\tilde{g}'(t)} = \lim_{t \to 0^+} \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} \overset{x = 1/t}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

$$\Rightarrow l = \lim_{t \to 0^+} \frac{\tilde{f}(t)}{\tilde{g}(t)} = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(1/t)}{g(1/t)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

$\downarrow$

Teo precedente

Non vale il viceversa

es

$$h(x) = \frac{\frac{1}{x^2} \sin x}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)} \Rightarrow h'(x) = \frac{\frac{\cos x}{x^2} - \frac{2}{x^3} \sin x}{\cos\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2}}$$

III TEOREMA $\left(H, \frac{\infty}{\infty}\right)$

- I int. di x_0
- $I^* = I \setminus \{x_0\}$
- $f, g \in C(I^*)$
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$
- f, g derivabili su I^*, $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$

oss: $x_0 = \pm\infty$, numero
$\ell = \pm\infty$, numero

Allora se $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$

dim

caso $\ell \in \mathbb{R}$

dim che $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{t.c.} \quad \ell - \varepsilon \leq \frac{f'(x)}{g'(x)} \leq \ell + \varepsilon \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$$

faccio una serie di manip. algebriche:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} \cdot \frac{f(x)}{f(x) - f(x_1)} \cdot \frac{g(x) - g(x_1)}{g(x)} =$$

$$= \frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} \cdot \boxed{\frac{1 - \frac{g(x_1)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_1)}{f(x)}}} = h(x)$$

$h(x)$ per $x \to x_0$ come si comporta.

$1 - \frac{g(x_1)}{g(x)} \Rightarrow$ num $\to 1$ $\Rightarrow h(x) = 1 + o(1)$ per $x \to x_0$

$\to 0$ e anche il den $\Uparrow$

per Cauchy $\exists\, \xi_x \in (x, x_1)$ t.c. $\frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}$

Dunque

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} \cdot h(x)$$

Passo a liminf e limsup perché $\exists$ sempre

$$\Rightarrow \limsup_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \limsup_{x \to x_0} \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} \cdot \overbrace{\lim_{x \to x_0} h(x)}^{=1} \le \ell + \varepsilon$$

Analogo con inf

$$\liminf_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \ge \ell - \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \ell - \varepsilon \le \liminf_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \le \limsup_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \le \ell + \varepsilon$$

ε arbitrario

$$\Rightarrow \liminf_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell = \limsup_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

caso $\ell = +\infty$

dim che $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

sia $x \to x_0^+$ $\quad x_0^-$ è analogo

$\forall M > 0 \ \exists\, \delta > 0$ t.c. $\frac{f'(x)}{g'(x)} \ge M \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$

faccio una serie di manip. algebriche:

faccio una serie di manip. algebriche:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} \cdot \frac{f(x)}{f(x)-f(x_1)} \cdot \frac{g(x)-g(x_1)}{g(x)} =$$

$$= \frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} \cdot \boxed{\frac{1-\frac{g(x_1)}{g(x)}}{1-\frac{f(x_1)}{f(x)}}} = h(x)$$

$h(x)$ per $x \to x_0^+$ come si comporta.

$1-\underbrace{\frac{g(x_1)}{g(x)}}_{\to 0} \Rightarrow$ num $\to 1$ $\quad \Rightarrow h(x) = 1 + o(1)$ per $x \to x_0^+$

e anche il den $\Uparrow$

per Cauchy $\exists\, \xi_x \in (x, x_1)$ t.c. $\dfrac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} = \dfrac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}$

Dunque

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} \cdot h(x)$$

Passo a liminf

$$\Rightarrow \liminf_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \liminf_{x \to x_0} \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} \cdot \overbrace{\lim_{x \to x_0} h(x)}^{=1} \geq +\infty$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

$\downarrow$

def liminf.

esempio

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{\log(1+x)}{x}} - e}{x}$$

chiamo $g(x) = x$ $\quad f(x) = e^{\frac{\log(1+x)}{x}} - e$

1) e' $\frac{0}{0}$

2) non si annulla in o ne e' o la sua derivata

3) Uso de L hopital

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{1/x \log(1+x)} \cdot \left(\frac{\frac{x}{x+1} - \log(1+x)}{x^2} \right)}{1}$$

Riapplico De L'Hôpital.

$f_1(x) = \frac{x}{x+1} - \log(1+x)$ $\quad g_1(x) = x^2$

$$f_1'(x) = -\frac{1}{1+x} + \frac{[(x+1) - x]}{(x+1)^2} = -\frac{1}{1+x} + \frac{1}{(x+1)^2} =$$

$g_1'(x) = 2x$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f_1'(x)}{g_1'(x)} = \left[-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} \right] \cdot \frac{1}{2x}$$

$$= \frac{1}{x+1} \left[-1 + \frac{1}{x+1} \right] \cdot \frac{1}{2x}$$

$$= \frac{1}{x+1} \left[\frac{\cancel{-x} \cancel{-1} \cancel{+1}}{x+1} \right] \frac{1}{2\cancel{x}} = \underbrace{\frac{1}{x+1} \left[-\frac{1}{x+1} \right]}_{-1} \cdot \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{x+1} \to 1$, $-\frac{1}{x+1} \to -1$, $\frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$

$-1 \cdot \frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x} = \lim_{x\to 0} \underbrace{(1+x)^{1/x}}_{\to e} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} = -\frac{e}{2}$$