TEOREMI 1

giovedì 3 marzo 2022 12:23

I NUMERI REALI

Lezioni --> 2-4-7-8
Capitolo 2 Giusti
Lezioni --> 5-6-132 Gobbino

PROPOSIZIONE

$x^2=2$ non ha soluzione in $\mathbb{Q}$

<u>dim</u>

Supponiamo per assurdo che $x^2=2$ abbia sol in $\mathbb{Q}$, sia essa $x=p/q$ con $p,q\in\mathbb{N}$ e $(p,q)=1$. Allora $x^2=\left(\frac{p}{q}\right)^2=\frac{p^2}{q^2}=2 \Rightarrow p^2=2q^2 \Rightarrow p$ pari cioè $p=2K$ $K\in\mathbb{N}$. $\Rightarrow$ q è dispari perché $(p,q)=1 \Rightarrow q=2K+1$

Riprendo $p^2=2q^2$ | Sostituisco $p=2K \Rightarrow p^2=4K^2=2q^2 \Rightarrow$ (divido per 2)

$2k^2=q^2 \Rightarrow q$ pari | ↯ perché q era dispari

DEFINIZIONI

Intervalli

$]a,b[\,:=(a,b)=\{x\in\mathbb{R} \mid a<x<b\}$ ≡ intervallo aperto → nota $a,b\notin(a,b)$

$[a,b]:=\{x\in\mathbb{R} \mid a\le x\le b\}$ ≡ intervallo chiuso →

$[a,b)=\{x\in\mathbb{R} \mid a\le x<b\}$ ≡ intervallo semi-aperto a dx

$(a,b]=\{x\in\mathbb{R} \mid a<x\le b\}$ ≡ intervallo semi-aperto a sx

$(a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R} \mid x>a\}$ ≡ semiretta aperta a dx di a

$[a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R} \mid x\ge a\}$ ≡ semiretta chiusa a dx di a

$(-\infty,a)=\{x\in\mathbb{R} \mid x<a\}$ ≡ semiretta aperta a sx di a

$(-\infty,a]=\{x\in\mathbb{R} \mid x\le a\}$ ≡ semiretta chiusa a sx di a.

$b-a$ ≡ lunghezza dell'intervallo

a,b ≡ estremi dell'intervallo

$\mathbb{R}^+=(0,+\infty)$ $\mathbb{R}^-=(-\infty,0)$

PROPOSIZIONE

Definizione assiomatica di $\mathbb{R}$

In $\mathbb{R}$ sono definite due operazioni $\boxed{+}$ e $\boxed{\cdot}$, un'ordinamento $\boxed{\leq}$ $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$

- Proprietà di $+$
  1. p. commutativa $\rightarrow$ $a+b=b+a$
  2. p. associativa $\rightarrow$ $a+(b+c)=(a+b)+c$
  3. $\exists!\, 0$ elt. neutro t.c. $a+0=0+a=a$
  4. $\exists!$ l'opposto $-a$ t.c. $a+(-a)=(-a)+a=0$
- Proprietà di $\cdot$
  1. p. commutativa $\rightarrow$ $a \cdot b = b \cdot a$
  2. p. associativa $\rightarrow$ $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b)\, c$
  3. $\exists!\, 1$ elt. neutro $1>0$ t.c. $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$
  4. $\exists!$ l'inverso $a^{-1}_{\neq 0}$ t.c. $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$

$\mathbb{R}$ è un campo

- Proprietà di $\leq$
  1. p. riflessiva $\rightarrow$ $a \leq a$
  2. p. antisimmetrica $\rightarrow$ $a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b$
  3. p. transitiva $\rightarrow$ se $a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$
  4. ordine totale $\rightarrow$ se $a \leq b \vee b \leq a$
- Altre proprietà
  - $+\cdot$ p. distributiva $\rightarrow$ $a(b+c) = ab + ac$
  - $+\leq$ se $a \leq b \Rightarrow a+c \leq b+c$
  - $\cdot\leq$ se $a \geq b$ e $c \geq 0 \Rightarrow ac \geq bc$
- assioma di continuità $\rightarrow$ Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Se A sta a sx di B (cioè $\forall a \in A$ $\forall b \in B$ $a \leq b$) allora $\exists$ almeno un pto $c \in \mathbb{R}$ t.c. $a \leq c$ $\forall a \in A$, $c \leq b$ $\forall b \in B$

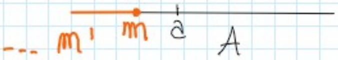
In $\mathbb{Q}$ non vale

DEFINIZIONI

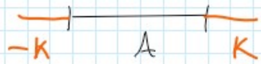
- R relazione, $B \subseteq A$ si dice **catena** se $R_{|B}$ è totale cioè $\forall x,y \in B$ $x \le y \vee y \le x$
- $x \in (A, \le)$, x è **massimale** se $x \le y \Rightarrow x = y$
- x è un **maggiorante** per $B \subseteq A$ se $y \le x \ \forall y \in B$
- $(A, \le)$ totalmente ordinato è **ben ordinato** se $\forall B \subseteq A$, $B \neq 0$ $\exists$ un **minimo** cioè $\exists x \in B$ t.c. $x \le y \ \forall y \in B$ ($\mathbb{N}$ è ordinato)
- Se $A \neq 0$ e $\forall B \subseteq A$ catena $\exists x_B$ maggiorante per B $\Rightarrow \exists \bar{x}$ massimale in A

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ $A \neq \emptyset$

- A è **limitato inferiormente** se $\exists m \in \mathbb{R}$ t.c. $m \le a \ \forall a \in A$
  Tutti gli m si chiamano **minoranti** di A



- A è **limitato superiormente** se $\exists n \in \mathbb{R}$ t.c. $n \ge a \ \forall a \in A$
  Tutti gli m si chiamano **maggioranti** di A
- A è **limitato** se è contemporaneamente lim. inf. e sup.
  cioè $\exists K \in \mathbb{R}$ t.c $\underbrace{|a| \le K}_{-K \le a \le K}$ $\forall a \in A$



- M è il **massimo** di A $M = \max A$ se: 1) $M \ge a \ \forall a \in A$ → Mi dice che M è maggiorante
  2) $M \in A$
- m è il **minimo** di A $m = \min A$ se 1) $m \le a \ \forall a \in A \to$ m è un minorante
  2) $m \in A$

Osservazioni

- Max e min non devono $\exists$ per forza e se $\exists$ sono unici → in realtà sì
- I maggioranti / minoranti non $\exists$ per forza, anzi $\exists \iff$ A è limitato super. / inferiormente, se $\exists$ non sono mai unici

---

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ $A \neq \emptyset$

$\sup A = +\infty$ se A non è limitato superior. → $\forall r \in \mathbb{R}\ \exists a \in A \mid a \geq r$

$\sup A = L \in \mathbb{R}$ se A è lim. supe. 1) $a \leq L\ \forall a \in A$
↳ L è il più piccolo dei maggioranti di A 2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists a \in A$ t.c. $L - \varepsilon \leq a$

sup A ≡ estremo superiore

$\forall r \in \mathbb{R}\ \exists a \in A$ t.c $a \leq r$

$\inf A = -\infty$ se A non è limitato inferior.

$\inf A = \ell \in \mathbb{R}$ se A è lim. infer. 1) $\ell \leq a\ \forall a \in A$ 2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists a \in A$ t.c. $a \leq \ell + \varepsilon$
↳ ℓ è il più grande dei minoranti di A ⇓ $\nexists$ minoranti + grandi di ℓ

inf A ≡ estremo inferiore

TEOREMA

Esistenza del sup

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, A limitato superior. Allora $\exists$ il sup (il più piccolo dei maggioranti)

dim

Chiamo B l'insieme dei maggioranti di A

$B \neq \emptyset$ perché A è lim. sup. per hp.

A sta a sx di B cioè $\forall a \in A$ e $\forall b \in B$ $a \leq b$ per def. di maggior.

Per assioma di continuità $\exists\, c \in \mathbb{R}$ t.c. 1 $a \leq c\ \forall a \in A$
2 $c \leq b\ \forall b \in B$

1 mi dice che c è maggiorante, $c \in B$
2 mi dice che $c \leq$ di tutti i maggioranti

⇒ c'è il sup A cioè il minimo dei maggioranti

Analogo per l'inf.

Osservazioni

sup A e inf A $\exists!$ sempre (event. $+\infty$, $-\infty$)

$\exists \operatorname{Max} A \iff \sup A \in A \qquad \operatorname{Max} A = \sup A$

PROPOSIZIONE

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ sono numerabili, [$\mathbb{N}$ so già che è numerabile]

1) $\mathbb{Z}$ è numerabile.

Costr. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ bij t.c. $f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{se } n \text{ è pari} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$

$\mathbb{Z} = -\mathbb{N} \cup \mathbb{N}$ e l'unione (anche ∞) di insiemi numerabili è numerabile

2) $\mathbb{Q}$ è numerabile

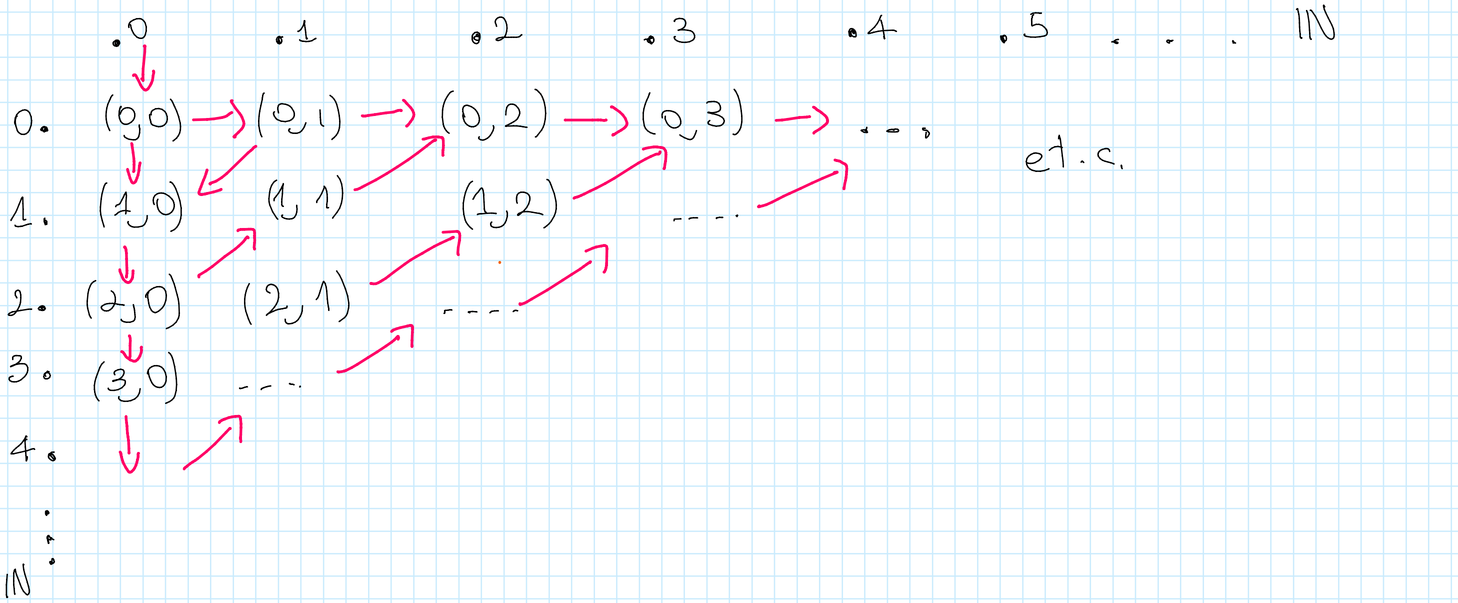
Costruisco $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ f surj.

$(p, q) \longrightarrow p/q$

$\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ per (1) $\Rightarrow$ devo dim che $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è numer.

oss. che f non è inj. es: $(1,2) \to \frac{1}{2}$, $(2,4) \to \frac{1}{2}$

Ma anche se non copro tutto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ non è un problema perché in realtà ho $\tilde{f} : H \times H \to \mathbb{Q}$ bij con $\underbrace{H \times H}_{\infty} \subseteq \mathbb{N}$ e un sottoinsieme ∞ di un insieme numerabile è numerabile $\Rightarrow$ $\mathbb{Q}$ è numerabile



PROPOSIZIONE

$\exists !$ di $\mathbb{R}$ tramite estensione di $\mathbb{Q}$

completezza in sp. metrici $\neq$

$\mathbb{R}$ è un campo ordinato con una proprietà: la completezza
$\Updownarrow$
$\exists$ del sup
$\Updownarrow$
as. di continuità: $\exists$ elt. separatore

Esistenza di $\mathbb{R}$

a) Una sezione di Dedekind di $\mathbb{Q}$ è una partizione di $\mathbb{Q}$
$\mathbb{Q} = A \cup B$ t.c. $A, B \neq \emptyset$ e $x \leq y$ $\forall x \in A$ e $\forall y \in B$
A e B sono due semirette disgiunte

b) prendo le sezioni per cui $\nexists x \in A$ t.c. $x \geq y$ $\forall y \in A$ ($\nexists \max A$)
Voglio dare una struttura di campo ordinato su A e B

$A_q = \{x \in \mathbb{Q}$ t.c. $x < q\}$ $\quad B_q = \{x \in \mathbb{Q}$ tc $x \geq q\}$ $\quad q \in \mathbb{Q}$

$q \xleftrightarrow{biG}$ sezioni

c) C'è una struttura di ordine
$(A, B) \leq (A', B') \iff A \subseteq A'$ ordine totale

d) Quindi data (A, B) sezione estendo le operazioni $+$ e $\cdot$ a tutte le sezioni "scrivendo" una sezione come unione di sezioni con estremo razionale. (tramite l'inclusione)

e) Il campo risultante è $\mathbb{R}$ ed è unione crescente di sezioni che è comunque una sezione
Quindi identifico i reali con le semirette dei razionali

Unicità di $\mathbb{R}$

Sia $\mathbb{K}$ campo ordinato $\Rightarrow$ K coincide con questa struttura.

1) 1 è l'el neutro di $\cdot$ $\rightsquigarrow$ $1+1$, $1+1+1$, etc ottengo numeri $\neq$
$\Rightarrow \exists$ $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{K}$

2) $\Rightarrow$ se c'è $\mathbb{N}$ c'è $\mathbb{Q}$ $\Rightarrow$ $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{K}$

3) Per la prop. dell'el. separatore ogni $q \in \mathbb{Q}$ si identifica con le sue sezioni $\Rightarrow \mathbb{R} \subseteq \mathbb{K}$.

4) In realtà $\mathbb{R} = \mathbb{K}$ perché se $\exists\, x \in \mathbb{K} \setminus \mathbb{R}$ $\quad x = S = (A, B)$

$A = \{y \in \mathbb{Q} \mid y < x\}$ cioè non posso aggiungere a $\mathbb{K}$ un punto in più mantenendo l'ordine totale.

PROPOSIZIONE

Proprietà archimedea di $\mathbb{R}$

$\forall\, x, y \in \mathbb{R}$ t.c. $0 < x < y$ $\exists\, n \in \mathbb{N}$ t.c. $nx > y$

dim

Se fosse falso $\Rightarrow n \leq y/x$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ cioè $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$ avrebbero un maggiorante in $\mathbb{R}$

densità

- $\mathbb{Q}$ è denso, cioè tra due razionali $\exists$ sempre un altro razionale mi basta prendere la media
- $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$

$\forall\, x, y \in \mathbb{R}$ $\quad x < y$ $\quad \exists\, z \in \mathbb{Q}$ t.c. $x < z < y$

dim

$y - x > 0$. Prendo $n \in \mathbb{N}$ t.c. $n(y-x) > 1$ cioè $1/n < y - x$

supp $x = 0 \Rightarrow 0 < 1/n < y$

supp $x > 0$ e $K = \max\{J \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \frac{J}{n} \leq x\} \Rightarrow$

$$\frac{K}{n} \leq x < \underset{\substack{\shortparallel \\ z}}{\frac{K+1}{n}} \leq x + \frac{1}{n} < y.$$

DEFINIZIONE

Valore assoluto

$$|x| = \begin{cases} x & se \ x \geq 0 \\ -x & se \ x < 0 \end{cases} \qquad \sqrt{a^2} = \begin{cases} a & se \ a \geq 0 \\ -a & se \ a < 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \sqrt{a^2} = |a|$$

$|a| = \max\{a, -a\}$

disuguaglianza triangolare

$|a+b| \leq |a| + |b|$

DEFINIZIONE

I numeri complessi

- Nascono perché $x^2+1=0$ non ha sol in $\mathbb{R}$.
  Introduco allora $i^2 = -1 \Rightarrow x^2+1=0$ ha soluzioni $x = \pm i$
  $\forall$ eq di 2° $x^2 + ax + b = 0$ ha sol. $x = -a \pm \sqrt{a^2 - b}$
  avrò: • 2 sol reali se $a^2 > b$
  - 1 sol. doppia $x = -a$ se $a^2 = b$
  - 2 sol non reali se $a^2 < b$ $\quad x = -a \pm i\sqrt{b-a^2}$
- Un numero complesso z è della forma $z = a + ib$ $\quad a, b \in \mathbb{R}$
  $a \equiv$ p. reale $\qquad b \equiv$ p. immaginaria. $\qquad \mathbb{C} \equiv$ insieme dei n. complessi

  $+ \rightarrow (a+ib) + (c+id) = (a+c) + i(b+d)$

  $\cdot \rightarrow (a+ib) \cdot (c+id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$
- Si può definire un ordine totale (non completo)
  $(a+bi) \leq (c+di)$ se $a < c$ o $a = c$ e $b \leq 2$
- $-z = -a - ib$ è l'opposto di $a + ib = z$
- $z^{-1} = (a+ib)^{-1} = \dfrac{a-ib}{a^2+b^2} \rightarrow$ inverso di z
- $|z| = \sqrt{a^2+b^2} \rightarrow$ modulo di z $\qquad |z| \in \mathbb{R}$
- $\overline{z} = a - ib \rightarrow$ coniugato di z

Con queste nuove notazioni ho che • $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ $\quad$ • $z\overline{z} = |z|^2$

• $\overline{\overline{z}} = z$ $\quad$ • $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$

Osservazione

se $z \in \mathbb{R}$ cioè $z = a+ib$ e $b=0$ si ha che

$|z| = \sqrt{a^2} = |a|$

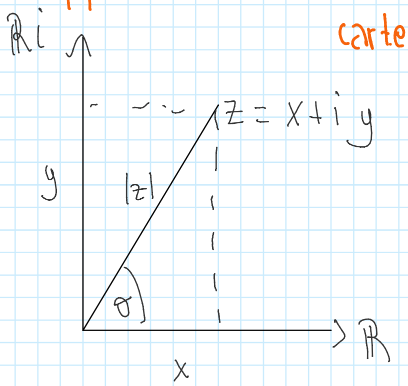
Proprieta'

- $|z| \geq 0$ • $|z| = 0 \iff z = 0$ • $|\bar{z}| = |z|$
- $|Re(z)| \leq |z|$ • $|Im(z)| \leq |z|$
- $z + \bar{z} = 2Re(z)$ • $z - \bar{z} = 2i Im(z)$

Operazioni

- $\dfrac{z}{w} = \dfrac{z\bar{w}}{|w|^2}$
- $|zw| = |z|\,|w|$
- $|z+w| \leq |z| + |w|$

Rappresentazione cartesiana e trigonometrica di $\mathbb{C}$



cartes. $z \in \mathbb{C}$ $z = x+iy$ $|\cdot|: \mathbb{C} \to [0, +\infty)$

$|z| = \sqrt{x^2+y^2} = d(x,y)$

trigonometrica

θ = argomento di z definito a meno di multipli di 2π

$x = |z|\cos\theta$ $y = |z|\operatorname{sen}\theta$

$z = x+iy = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$

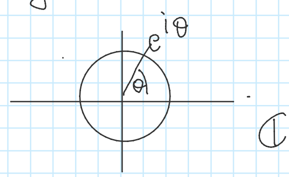
$z^n = |z|^n(\cos(n\theta) + i\operatorname{sen}(n\theta))$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$z \cdot w = |z|\,|w|(\cos(\theta+\varphi) + i\operatorname{sen}(\theta+\varphi))$ con $w = |w|(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)$

Rappresentazione esponenziale di $\mathbb{C}$

$e^{i\theta} = (\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$ e = Numero di Nepero $e = 2{,}71\ldots$

$z = |z|e^{i\theta}$ $e^{i\theta}: \mathbb{R} \to \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$



$e^z: \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ $e^z = e^x e^{yi} = e^x(\cos y + i\operatorname{sen} y)$

$z \cdot w = |z|\,|w|\,e^{i(\theta+\varphi)}$ $z^n = (|z|e^{i\theta})^n = |z|^n e^{in\theta}$

Radici di un numero complesso $z^n = w$

$z^n = w$ con $z = |z| e^{i\theta}$ $w = |w| e^{i\varphi}$

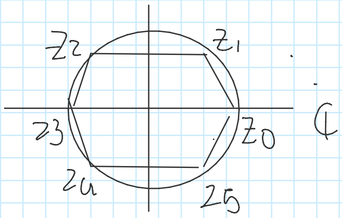
$z^n = |z|^n e^{i\theta n} = w = |w| e^{i\varphi}$ si ha $\underbrace{|z|^n = |w|}_{|z| = |w|^{1/n}}$ e $n\theta = \varphi + 2k\pi$

$\Rightarrow |z| = \sqrt[n]{|w|}$ e $\theta = \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}$

radici n-esime di 1 (caso $w = 1$)

$z_k = e^{i \cdot \frac{2k\pi}{n}}$ $k = 0, \dots, n-1$ $w = 1 \cdot e^{0i + 2k\pi i}$

I p.ti si trovano sulla circonf. di centro 0 e raggio 1 e precis. ai vertici di un poligono regolare inscritto di n lati



- $\mathbb{C}$ è alg. chiuso $\forall p(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$ con $a_j \in \mathbb{C}$ $\exists$ sempre $\bar{t}$ t.c. $p(\bar{t}) = 0$ cioè $\exists$ sempre una radice
- Se $p(t)$ ha grado n $\Rightarrow$ ci sono al più n radici
- $p(t) = a_n \prod_{j=1}^{n} (t - t_j)^{\alpha_j}$ = fattorizzazione di p in $\mathbb{C}$

  α_j = molteplicità di t_j $\sum_{j=1}^{h} \alpha_j = n$