INTEGRALI

giovedì 23 giugno 2022 10:37

INTEGRALE DI RIEMANN

Sia $a<b$, $[a,b]$

$\pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ $t_0 = a$, $t_n = b$ $t_0 < t_1 < \dots < t_n$. π è una partizione di $[a,b]$ e $[a,b] = \bigcup_{k=1}^{n} I_k$ $I_k = [t_{k-1}, t_k]$

dove $|I_k| \equiv$ ampiezza dell'intervallo $= x_k - x_{k-1}$. Dunque $\bigcup_{k=1}^{n} I_k = [a,b]$

DEFINIZIONE

Dati π_1, π_2 partizioni di $[a,b]$ dico che π_1 è più fina di $\pi_2 \iff \pi_2 \subset \pi_1$

π_1 ha più punti di π_2. π_1 ha tutti i p.ti di π_2 + altri punti

Osservazioni

Sia $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$. π è più fina di entrambe. π $\exists$ sempre

Sia $\pi_0 = \{a, b\}$. π_0 è la partizione meno fina di tutte

NOTA

Da questo punto in poi considereremo $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, $[a,b]$ intervallo, f limitata.

SOMME SUPERIORI E INFERIORI DI f RELATIVI A UNA PARTIZIONE

Hp. sopra + π partizione di $[a,b]$

- $S(f, \pi) \equiv$ somma superiore di f relativa a π $= \sum_{k=1}^{m} (t_k - t_{k+1}) \sup_{[t_{k-1}, t_k]} f$

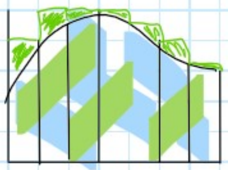
$\pi = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$ con $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$

riscrittura

- $S(f, \pi) = \sum_{k=1}^{m} |I_k| M_k(f)$ dove $M_k(f) = \sup_{I_k}(f)$, $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ $|I_k| = x_k - x_{k-1}$

SOMMA INFERIORE

$s(f, \pi) = \sum_{k=1}^{m} |I_k| m_k(f)$ dove $m_k(f) = \inf_{I_k}(f)$, $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ $|I_k| = x_k - x_{k-1}$



Osservazione

$M_k \geq m_k$ $\forall k$ $1 \leq k \leq m$ $\Rightarrow S(f,\pi) \geq s(f,\pi)$

PROPOSIZIONE $\mapsto$ raffino le partizioni

Hp: π_1, π_2 partizioni di $[a,b]$

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$

f limitata

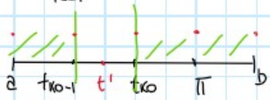
Se π_2 è più fina di $\pi_1 \Rightarrow$ 1) $S(f, \pi_2) \leq S(f, \pi_1)$

2) $s(f, \pi_2) \geq s(f, \pi_1)$

dim

S.p.g. chiamo $\pi_1 = \pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ $\quad \pi_2 = \pi \cup \{t'\}$

$\underbrace{S(f,\pi_1)}_{\sum_{k=1}^{n} |I_k| M_k} - S(f,\pi_2) = |I_{k0}| \underbrace{\sup_{I_{k0}}(f)}_{M_{k0}} - \left(|I'| \sup_{I'} f + |I''| \sup_{I''} f \right)$ dove $I' = [t_{k0-1}, t']$ e $I'' = [t', t_{k0}]$



ⓐ Noto che $|I'| \sup_{I'} f \leq |I'| M_{k0}$ cioè il sup dell'intervallino I' < sup di tutto l'intervallo

$|I''| \sup_{I''} f \leq |I''| M_{k0}$ ⓑ

Sommo a e b

$|I'| \sup f + |I''| \sup f \leq |I_{k0}| M_{k0}$ $\qquad$ perchè $|I'| + |I''| = |I_{k0}|$

cambio sgn $\mapsto$ $-(|I'| \sup_{I'} f + |I''| \sup_{I''} f|) \geq -|I_{k0}| M_{k0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{S(f,\pi_1)}_{|I_{k0}| M_{k0}} - \underbrace{S(f,\pi_2)}_{|I'| \sup f + |I''| \sup f} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad S(f,\pi_1) \geq S(f,\pi_2)$

TEOREMA

$[a,b]$, $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata, π_1 e π_2 partizioni di $[a,b]$ $\Rightarrow$ Allora $S(f,\pi_1) \geq s(f,\pi_2)$

dim

$\pi = \pi_1 \cup \pi_2$ è una partizione che raffina entrambe

Uso la prop. precedente $\mapsto$ $S(f,\pi_1) \underset{①}{\geq} S(f,\pi) \underset{\text{proprietà}}{\geq} s(f,\pi) \underset{②}{\geq} s(f,\pi_2)$

DEFINIZIONE DI INTEGRALE

$\int^* = S(f)$ = Integrale superiore di f su $[a,b]$ $\equiv \inf\{ S(f,\pi)$ t.c. π è una partizione finita di $[a,b]$

$\int_* = s(f)$ = integrale inferiore di f su $[a,b]$ $\equiv \sup\{ s(f,\pi)$ t.c. π è una partizione finita di $[a,b]$

PROPOSIZIONE

$S(f) \geq s(f)$ $\qquad \int^*, \int_*$

dim

Se π_1 è partizione di $[a,b]$ $\quad S(f,\pi_1) \overset{\text{Teo}}{\geq} s(f,\pi)$ $\forall \pi$ partizione di $[a,b]$

$S(f,\pi_1)$ è un maggiorante di $\{ s(f,\pi)$ t.c. π è partizione di $[a,b]\}$ (il sup è il min. dei maggioranti)

$\Rightarrow S(f,\pi_1) \geq s(f) = \sup\{ s(f,\pi)$ t.c π è partizione di $[a,b]\}$
(il sup è il min. dei maggioranti)

$\Rightarrow S(f,\pi_1) \geq s(f)$ $\quad \forall \pi_1$ partizione

$\Rightarrow s(f)$ è un minorante di $\{S(f,\pi_1)$ t.c. π_1 è partizione$\}$

$\Rightarrow S(f) = \inf\{ S(f,\pi_1)$ t.c. π_1 partizione$\} \geq s(f)$
inf = il più grande dei minoranti

DEFINIZIONE

f è integrabile secondo Riemann su $[a,b] \iff S(f) = s(f) = \int_a^b f(t)\,dt$

OSSERVAZIONE

Se f è integrabile. Allora $m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq M(b-a)$ dove $M = \sup_{[a,b]} f$ $\quad m = \inf_{[a,b]} f$

dim

$\pi_0 = \{a, b\}$

$$\underbrace{S(f,\pi_0)}_{= M(b-a)} \geq S(f) = \int_a^b f(t)\,dt = s(f) \geq \underbrace{s(f,\pi_0)}_{= m(b-a)}$$

Proposizione

f è integrabile $\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \pi$ partizione t.c. $\overbrace{S(f,\pi) - s(f,\pi)}^{\geq 0 \text{ sempre.}} < \varepsilon$

dim

$\boxed{\Rightarrow}$ f è integrabile $\Rightarrow S(f) = s(f) = \int_a^b f(t)\,dt$.

Fisso $\varepsilon > 0$. Dato che $S(f) = \inf\{S(f,\pi)$ t.c. π partizione$\}$ $\exists \pi_1$ t.c. $S(f) + \frac{\varepsilon}{2} \geq S(f,\pi_1)$

cioè $S(f) + \varepsilon/2$ non è più l'inf. in particolare non è più un minorante

Inoltre $\exists \pi_2$ t.c. $s(f) - \varepsilon/2 \leq s(f,\pi_2) \leq s(f,\pi)$

cioè $s(f) - \varepsilon/2$ non è più il sup {delle somme inferiori}

Considero $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$

Sommo 1 + 2 e cambio di sgn. la seconda

$\boxed{1}$ $s(f) + \frac{\varepsilon}{2} \geq S(f,\pi_1) \geq S(f,\pi)$

π raffina π_1

$\boxed{-2}$ $-s(f) + \frac{\varepsilon}{2} \geq -s(f,\pi_2) \geq -s(f,\pi)$

$\boxed{1+(-2)}$ $\varepsilon \geq S(f,\pi) - s(f,\pi) \geq 0$

$\boxed{\Leftarrow}$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \pi$ partizione t.c. $S(f,\pi) - s(f,\pi) < \varepsilon$

$0 \leq S(f) - s(f) \leq S(f,\pi) - s(f,\pi) < \varepsilon \quad \Rightarrow S(f) - s(f) = 0 \quad \Rightarrow f$ è integrabile

perchè $S(f) \leq S(f,\pi)$ perchè $S(f)$ è l'inf

$s(f) \geq s(f,\pi)$ perchè $s(f)$ è il sup

Teorema

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ x $f \begin{cases} \text{continua } 3 \\ \text{monotona } 1 \\ \text{Lipschitziana } 2 \end{cases}$ è integrabile dim 1

S.p.g. suppongo f crescente $f(a) \le f(x) \le f(b)$ f limitata per ip.

Chiamo $\pi_n \equiv$ la partizione uniforme di $[a,b]$ cioè $\pi_n = \{x_n$ t.c. $0 \le k \le n\}$ $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$

cioè suddivido $[a,b]$ in sottointervalli della stessa lunghezza

$$S(f,\pi_n) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(\frac{b-a}{n}\right)}_{I_k} \underbrace{f(t_k)}_{\text{"estremo dx di } I_k\text{" sup di } I_k \text{ f cresc.}}$$

$$s(f,\pi_n) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{b-a}{n}\right) f(t_{k-1})$$

$\hookrightarrow$ est. sx di I_k inf di I_k

$$0 \le S(f,\pi_n) - s(f,\pi_n) = \frac{b-a}{n} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} [f(t_k) - f(t_{k-1})]}_{\text{s. Telescopica}} = \underbrace{\frac{b-a}{m}(f(b) - f(a))}_{\xrightarrow{n\to+\infty} 0} \Rightarrow S(f,\pi_n) - s(f,\pi_n) \to 0$$

$$\Rightarrow m > \frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{\varepsilon} \Rightarrow S(f,\pi_n) - s(f,\pi_n) < \varepsilon \Rightarrow f \text{ è integrabile}$$

dim 2-3

f Lip $\Rightarrow$ f continua $\Rightarrow$ f limitata

$\boxed{*}$ $S(f,\pi) - s(f,\pi) \le L\,\delta(b-a)$ con $\delta = \max\{|I_k|$ t.c. $1 \le k \le n\} \equiv$ parametro di finezza

$\pi = \{t_0, \dots, t_n\}$ $I_k = [t_{k-1}, t_k]$

Se vale $*$ ho l'integrabilità.

$$S(f,\pi) = \sum_{k=1}^{n} |I_k|\, M_k$$

$\hookrightarrow = \sup_{I_k} f = \max_{I_k} f = f(c_k)$ $c_k \in I_k$ $\hookrightarrow$ p.to di max.

$$s(f,\pi) = \sum_{k=1}^{m} |I_k|\, m_k$$

$\hookrightarrow = \inf_{I_k} f = \min_{I_k} f = f(d_k)$ $d_k \in I_k$ $\hookrightarrow$ p.to di min.

Quindi $|c_k - d_k| \le |I_k| \le \delta$

Quindi $S(f,\pi) - s(f,\pi) = \sum_{k=1}^{n} |I_k|(M_k - m_k)$

$\Rightarrow 0 \le M_k - m_k = |f(c_k) - f(d_k)| \underset{\text{Lip.}}{\le} L|c_k - d_k| \le L\,\delta \Rightarrow$

$$S(f,\pi) - s(f,\pi) = \sum_{k=1}^{m} |I_k|(M_k - m_k) \le L\,\delta \underbrace{\sum_{k=1}^{n} |I_k|}_{(b-a)}$$

TEOREMA

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua $\Rightarrow$ f è integrabile

dim

Per hp f è limitata ed è u.c. perchè continua in un cpt.

Fissiamo $\varepsilon > 0$ $\exists n \in \mathbb{N}$ e prendiamo $\pi = \{t_0 = a, t_1, \dots, t_n, b\}$ con $t_{i+1} - t_i = \frac{b-a}{n}$

Calcolo $S(f,\pi) - s(f,\pi) = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{(t_{k+1} - t_k)}_{\frac{b-a}{n}} (\sup_{t_k, t_{k+1}} f - \inf f) \le \frac{b-a}{n} \sum \max f - \min f$

Scelgo n t.c. $\frac{b-a}{n} \le \delta(\varepsilon)$ dato dall'u.c di f.

$\Rightarrow \frac{b-a}{n} \sum \max f - \min f \le \frac{b-a}{n} \cdot n \cdot \varepsilon = (b-a)\varepsilon$

NOTE

1) La stessa dim vale per $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua e limitata

Infatti fisso $\varepsilon > 0$ e sia $\pi = \{t_0, \dots, t_{n+2}\}$ t.c. $t_0 = a$ $t_1 = a + \varepsilon$, $t_{k+1} - t_k = \frac{b-a-2\varepsilon}{n}$

$t_{n+1} = b - \varepsilon$, $t_{n+2} = b$

$S(f,\pi) - s(f,\pi) = 4C\varepsilon + \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a-2\varepsilon}{2} (\sup f - \inf f) \le 4C\varepsilon + (b-a)\varepsilon$

2) La dim vale anche per $f: I \to \mathbb{R}$ limitata con $disc(f)$ finito

3) Teorema

$f: I \to \mathbb{R}$ limitata con $disc(f)$ finito o numerabile $\Rightarrow$ f è integrabile

4) Teorema Vitali Lebesgue

$f: I \to \mathbb{R}$ limitata e integrabile $\Leftrightarrow$ $disc(f)$ è trascurabile

$E \subseteq \mathbb{R}$ è trascurabile se $\forall \varepsilon$ $\exists \{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ t.c.
$E \subseteq \bigcup_n I_n$ e $\sum_n |I_n| \le \varepsilon$

E numerabile $\Rightarrow$ E trascurabile. Non vale $\not\Leftarrow$ (Insieme di Cantor)

TEOREMA MEDIA INTEGRALE

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua $\exists \bar{x} \in [a,b]$ t.c. $f(\bar{x}) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \Rightarrow (b-a) f(\bar{x}) = \int_a^b f(x)\,dx$

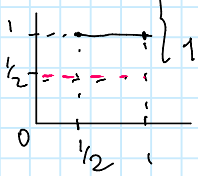
dim

Si ha $(b-a) \cdot \min f \le \int_a^b f \le (b-a) \max f \Rightarrow \min f \le \frac{\int_a^b f}{b-a} \le \max f \Rightarrow \exists \bar{x}$ t.c. $f(\bar{x}) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f$

Controesempio

Se f è integrabile non continua allora non vale il Teo

$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 1 & \text{se } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$



$\int f = \frac{1}{2}$ ma $\frac{1}{2}$ non è un valore assunto dalla funzione

Definizione

$\mathcal{R}(I) = \{ f : I \to \mathbb{R} \text{ integrabili} \}$

Linearità di $\int$

$f, g \in \mathcal{R}(I) \Rightarrow$ 1) $c \cdot f \in \mathcal{R}(I) \ \forall c \in \mathbb{R}$ e $\int_I cf = c \int_I f$

2) $f+g \in \mathcal{R}(I)$ e $\int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g$

In particolare $\mathcal{R}(I)$ è uno sp. vettoriale e $f \to \int f$ è una f. lineare su $\mathcal{R}(I)$

dim

1a caso $a>0$

$S(af, \pi) = a\, S(f, \pi) \quad \forall \pi$

$s(af, \pi) = a\, s(f, \pi) \quad \forall \pi$

$\sup_\pi (s(af, \pi)) = a \cdot \sup_\pi (s(f, \pi)) = a \cdot \inf_\pi S(f, \pi) = \inf_\pi (S(af, \pi)) = a \int_I f$

1b caso $a<0$

$-f \in \mathcal{R}(I)$ infatti $S(-f, \pi) = -s(f, \pi) \quad \forall \pi$ e $s(-f, \pi) = -S(f, \pi) \Rightarrow$

$\sup_\pi (s(-f, \pi)) = \inf_\pi (S(-f, \pi))$

2 $S(f+g, \pi) = \sum_k (t_{k+1} - t_k) \sup_{(t_k, t_{k+1})} (f+g) \le \sum_k (t_{k+1} - t_k)(\sup f + \sup g) = S(f, \pi) + S(g, \pi)$

$s(f+g, \pi) \ge s(f, \pi) + s(g, \pi) \quad \forall \pi$

Quindi

$\int f + \int g = \sup_{\pi_1} (s(f, \pi_1)) + \sup_{\pi_2} (s(g, \pi_2)) = \sup_\pi \left(s(f, \pi) + s(g, \pi) \right) \le \sup_\pi (s(f+g), \pi) \le$

$\le S(f+g, \pi) \le \inf_{\pi_1} (S(f, \pi_1)) + \inf_{\pi_2} (S(g, \pi_2)) = \int f + \int g \Rightarrow$ Tesi

nota

$\int$ si comporta bene per somma di domini

additività rispetto al dominio

$I = I_1 \cup I_2$

$I_1 \cap I_2 = \emptyset$

Se $f \in \mathcal{R}(I) \Rightarrow f|_{I_1} \in \mathcal{R}(I_1)$ e $f|_{I_2} \in \mathcal{R}(I_2)$

e $\int_I f = \int_{I_1} f + \int_{I_2} f$

dim

Siano $f_1(x) = \begin{cases} f(x) & se \ x \in I_1 \\ 0 & se \ x \in I_2 \end{cases}$ e $f_2(x) = \begin{cases} 0 & se \ x \in I_1 \\ f(x) & se \ x \in I_2 \end{cases}$

$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$

Affermo che $f_1 \in R(I_1)$ e $\int_I f_1 = \int_{I_1} f$ idem con f_2

$\downarrow$

Se questo è vero, allora per linearità

$\int_I f = \int_I f_1 + f_2 = \int_{I_1} f_1 + \int_{I_2} f_2$

Fisso $\varepsilon > 0$ e sia π partizione di I t.c. $S(f,\pi) - s(f,\pi) \le \varepsilon$

Posso supporre $I_1 \le I_2$ e sia $\pi_1 = \pi|_{I_1}$ partizione di I_1 e $\pi_2 = \pi|_{I_2}$ partizione di I_2

Per questo motivo aggiungo a π il punto $\sup I_1 = \inf I_2$

Si ha dunque

$$\left.\begin{aligned} S(f|_{I_1}, \pi_1) - s(f|_{I_1}, \pi_1) &\le S(f,\pi) - s(f,\pi) \le \varepsilon \\ S(f|_{I_2}, \pi_2) - s(f|_{I_2}, \pi_2) &\le S(f,\pi) - s(f,\pi) \le \varepsilon \end{aligned}\right\} \Rightarrow f|_{I_1} \in R(I_1) \text{ e } f|_{I_2} \in R(I_2)$$

Si ha anche che

$S(f|_{I_1}, \pi_1) = S(f_1, \pi)$ e $s(f|_{I_1}, \pi_1) = s(f_1, \pi) \Rightarrow f_1 \in R(I) \Rightarrow \int_I f_1 = \int_{I_1} f$

$S(f|_{I_2}, \pi_2) = S(f_2, \pi)$ e $s(f|_{I_2}, \pi_2) = s(f_2, \pi) \Rightarrow f_2 \in R(I) \Rightarrow \int_I f_2 = \int_{I_2} f$

Osservazione

Quanto detto si scrive con

$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$ dove $I = (a,c)$ $I_1 = (a,b)$ $I_2 = (b,c)$ $\forall a<b<c$

Per convenzione si pone $\cdot \int_a^a f = 0$, $\cdot \int_a^b f = -\int_b^a f$ se $a<b$

Osservazione

$f, g \in R(I)$ se $f \le g \Rightarrow \int_I f \le \int_I g$ *

Proposizione

$f \in R(I) \Rightarrow |f| \in R(I)$ e $|\int f| \le \int |f|$

dim

Siano ε, π t.c. $S(f,\pi) - s(f,\pi) \le \varepsilon$

$\sup f - \inf f \ge \sup |f| - \inf |f|$ $\quad (|a-b| \ge ||a| - |b|| \ \forall a,b)$

(t_k, t_{k+1}) $\quad (t_k, t_{k+1})$ $\quad (t_k, t_{k+1})$ $\quad (t_k, t_{k+1})$

$\Rightarrow S(|f|, \pi) - s(|f|, \pi) \le S(f,\pi) - s(f,\pi) \le \varepsilon \Rightarrow |f| \in R(I)$

Osservo che $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)| \ \forall x \Rightarrow -\int |f| \le \int f \le \int |f| \Leftrightarrow |\int f| \le \int |f|$

$\uparrow$ *

Integrali via calcolo diretto

$f(x) = x \quad [a,b]$ voglio calcolare $\int_a^b f(x)dx$

$x_K = a + \frac{K}{n}(b-a)$ partiz. unif. π_n

$$S(f, \pi_n) = \sum_{K=1}^{n} \left(\frac{b-a}{n}\right)\left[a + \frac{K}{n}(b-a)\right] = (b-a)a + \left[\frac{(b-a)}{n}\right]^2 \cdot \overbrace{\sum_{K=1}^{n} K}^{= \frac{n(n+1)}{2}}$$

$$= (b-a)a + (b-a)^2 \cdot \frac{1}{2} \underbrace{\frac{n(n+1)}{n^2}}_{\xrightarrow{n\to+\infty} 1}$$

$$\xrightarrow{n\to+\infty} = (b-a)a + \frac{1}{2}(b^2+a^2-2ab) = \cancel{b}a - a^2 + \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}a^2 - \cancel{a}b = \frac{1}{2}[b^2-a^2]$$

es

$f(x) = x^2$ tra $[0, e]$

$x_n = 0 + \frac{K}{n}(e-0) \qquad \pi_n$ partizione uniforme

$$S(f, \pi_n) = \sum_{K=1}^{n} \frac{e}{n}\left[\frac{Ke}{n}\right]^2 = \frac{e^3}{n^3}\sum_{K=1}^{n} K^2 = \frac{e^3}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^3 \cdot \frac{2}{6} = \frac{e^3}{3}$$

es

$f(x) = \frac{1}{x} \quad [1,2]$

$x_n = 1 + \frac{K}{n}$

$1°$: $\frac{1}{n}$, ..., last: $\frac{1}{2n}$

$$S(f, \pi_n) = \sum_{K=0}^{n} \frac{1}{n}\left[\frac{1}{1+\frac{K}{n}}\right] = \sum_{K=0}^{n} \frac{1}{n+K} = \sum_{J=n}^{2n} \frac{1}{J} = \sum_{K=0}^{2n} \frac{1}{K} - \sum_{K=0}^{n-1} \frac{1}{K} = H(2n) - H(n) =$$

$$= \log(2n) + \cancel{\gamma} + o(1) - \log(n-1) \cancel{\gamma} - \cancel{o}(1) = \log\left(\frac{2n}{n-1}\right) =$$

$$= \log(2) - \log\Big(\underbrace{\frac{n}{n-1}}_{\xrightarrow{n\to+\infty} 0}\Big) = \log 2$$

DEFINIZIONE DI PRIMITIVA

$f: I \to \mathbb{R}$ f. integrabile, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $F: I \to \mathbb{R}$ derivabile. Se $f = F'$ F si dice primitiva di f.

- Se F_1, F_2 sono primitive di f. $\Rightarrow (F_1 - F_2)' = f - f = 0 \Leftrightarrow F_1(x) = F_2(x) + c \quad \forall x \in I$ per $c \in \mathbb{R}$
- $\int f(x)\,dx = \{F: I \to \mathbb{R}, F' = f\}$
  $\downarrow$ integrale indefinito

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

$f: I \to \mathbb{R}$ continua, I intervallo chiuso, $x_0 \in I$, sia $F_{x_0}(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt \quad \forall x \in I$

Allora F_{x_0} è una primitiva di f, cioè F_{x_0} derivabile e $F_{x_0}' = f$

la costante si ottiene ponendo $F_{x_0}(x_0) = a$

dim

calcoliamo $F_{x_0}'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F_{x_0}(x+h) - F_{x_0}(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_{x_0}^{x+h} f(t)dt - \int_{x_0}^{x} f(t)dt\right) =$

$$= \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f(t)dt}_{\text{media}} = \lim_{h\to 0} f(x_h) = f(x)$$

$\hookrightarrow x_h \in (x-|h|, x+|h|) \cap I$

Osservazione

$a, b \in I \quad a < b \qquad$ Allora $\int_a^b f(t)dt = F_{x_0}(b) - F_{x_0}(a) = F(b) - F(a)$

dove F è una qualunque primitiva di f

Tabelle di primitive

Funzione	Primitiva
k (cost.)	kx
$x^\alpha,\ \alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
x^{-1}	$\log\|x\|$
$\operatorname{sen} x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\operatorname{sen} x$
a^x	$\frac{a^x}{\log a}$

Funzione	Primitiva
$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$	$\operatorname{tg} x$
$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = 1 + \operatorname{cotg}^2 x$	$-\operatorname{cotg} x$
$\frac{x}{x^2+k}$	$\frac{1}{2}\log\|x^2+k\|$
$\frac{1}{x^2+k^2},\ k \neq 0$	$\frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{x}{k}$
$\frac{1}{\sqrt{k^2-x^2}},\ k > 0$	$\operatorname{arcsen}(\frac{x}{k})$
$\frac{1}{\sqrt{k+x^2}},\ k \neq 0$	$\log\|x + \sqrt{x^2+k}\|$

Tabella 1

Funzione	Primitiva
$f(x)^\alpha f'(x),\ \alpha \neq -1$	$\frac{f(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\frac{f'(x)}{f(x)}$	$\log\|f(x)\|$
$f'(x)\cos f(x)$	$\operatorname{sen} f(x)$
$f'(x)\operatorname{sen} f(x)$	$-\cos f(x)$
$f'(x)a^{f(x)}$	$\frac{a^{f(x)}}{\log a}$

Funzione	Primitiva
$\frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$	$\operatorname{tg} f(x)$
$\frac{f'(x)}{\operatorname{sen}^2 f(x)}$	$-\operatorname{cotg} f(x)$
$\frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$	$\operatorname{arcsen} f(x)$
$\frac{f'(x)}{1+f(x)^2}$	$\operatorname{arctg} f(x)$
$\frac{f'(x)}{\sqrt{1+f(x)^2}}$	$\log\|f(x) + \sqrt{1+f(x)^2}\|$

Regole di integrazione

1 linearità

$$\int f \pm g = \int f \pm \int g$$

dim

$$(F \pm G)' = F' \pm G'$$

2 Parti

$$\int F' \cdot G = FG - \int FG'$$

dim

$$(FG)' = F'G + FG' \Rightarrow F'G = (FG)' - FG' \overset{\text{integro}}{\Rightarrow} \int F'G = \int (FG)' - \int FG' = FG - \int FG'$$

es

$$\int \underset{G}{\log(x)} \cdot \underset{F'}{1} = x\log x - \int x \frac{1}{x}\,dx = x\log x - \int 1\,dx = x\log x - x + c$$

regoli ne

$\int e^x P(x)\,dx$ oppure $\int \sin x\, P(x)\,dx$ si integra e^x o $\sin x$ e si deriva $P(x)$ cioè $e^x = F'$ $P(x) = G$

$\int e^x \sin(x)$ integro e^x e derivo $\sin(x)$ (eterno ritorno)

3 Sostituzione

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x)) + c = \int f(y)\,dy\,\Big|_{y=\varphi(x)}$$

dim

$$(F\circ\varphi)' = F'(\varphi)\cdot\varphi' \qquad f = F' \Rightarrow \int (F\circ\varphi)' = \int F'(\varphi)\cdot\varphi'$$

$$\overset{\shortparallel}{F}(\varphi) + c = \int \underset{f}{\underset{\shortparallel}{F'}}(\varphi)\cdot\varphi'$$

es

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} = \int \frac{1}{1+y^2}\Big|_{y=e^x} = \arctan(e^x) + c.$$

regole

- $\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,dx = \int \frac{1}{y}\,dy\,\Big|_{y=\varphi(x)} = \log(|\varphi(x)|) + c$
- $\int f(\sqrt{x})\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{f(y)}{y}\,dy\,\Big|_{y=\sqrt{x}}$

$y = \sqrt{x}$ $\qquad dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$

es

$$\int x e^{\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{e^y y^2}{y}\,dy = \frac{1}{2}\int e^y\cdot y = \frac{1}{2}\left[e^y\cdot y - \int e^y\cdot dy\right] = \frac{1}{2}\left[e^y\cdot y - e^y\right] + c$$

$$= \frac{1}{2}e^y(y-1) + c = \frac{1}{2}e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) + c$$

Area cerchio $\quad$ C $\cos(t)$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\overset{B}{dx} = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\,.\,\overset{B}{\cos(t)\,dt} = \int \cos^2(t)\,dt = \cos(t)\sin(t) + \int \sin^2(t) =$$

A $x = \sin t \Rightarrow t = \arcsin x$ A1

B $dx = \cos(t)\,dt$

$$= +\cos(t)\sin t + \int 1\,dt - \int \cos^2(t)\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\int \cos^2(t) = +\cos(t)\sin(t) + t \Rightarrow$$

$$\int \cos^2(t) = \frac{1}{2}\left[+\underset{C}{\cos(t)}\underset{A}{\sin(t)} + \underset{A1}{t}\right] + c = \frac{1}{2}\left[\underset{A1}{\arcsin x} + \underset{A}{x}\underset{C}{\sqrt{1-x^2}}\right]$$

$$\text{Area cerchio} = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2} = \left[\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right]_{-1}^{1} = 2\arcsin(1) = \pi$$

$$\pi/2 - (-\pi/2) =$$

F. iperboliche

$\sinh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$ $\quad \sinh'(x) = \cosh(x) \Rightarrow \int \sinh(x) = \cosh(x) + c$

$\cosh(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$ $\quad \cosh'(x) = \sinh(x) \Rightarrow \int \cosh(x) = \sinh(x)$

$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

4) Integrazione di f. razionali

$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad p, q \in \mathbb{R}[x]$

Come det. una primitiva

STEP 1 fattorizzazione

STEP 2 divisione

STEP 3 vedere i diversi casi +integrazione

STEP 1

fattorizzare $Q(x)$

$Q(x) = \prod_{i=1}^{m} Q_i(x)^{\alpha_1}$ $\quad \alpha_i \in \mathbb{N}$ $\quad \alpha_i :=$ molteplicità algebrica $\quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \deg Q_i = \deg Q$ con $\deg Q_i \in \{1, 2\}$

cioè non è detto che Q si fattorizzi come prodotto di pol. di grado 1

STEP 2

$\frac{P}{Q} = P_1 + \frac{P_2}{Q}$ con $\deg P_2 < \deg Q$

STEP 3

Adesso $\frac{P}{Q} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{P_{i,j}(x)}{Q_i(x)^j}$ con $\deg P_{i,j} < \deg Q_i$

In particolare $\deg P_{i,j} \in \{0, 1\}$ cioè:

- se $\deg P_{i,j} = 0 \Rightarrow P_{i,j}$ è una costante c
- se $\deg P_{i,j} = 1 \Rightarrow P_{i,j}$ è un pol del tipo $ax + c$

Vedo i diversi casi

Situazione $\frac{P}{Q^j}$ con $Q^j \in \{1, 2\}$ e $\deg P < \deg Q$

caso $\deg Q = 1$ $\quad p(x) = 1$ cioè $\deg P = 0$

$$\int \frac{1}{(x+a)^j} \, dx = \begin{cases} \log(|x+a|) & \text{se } j = 1 \\ -\frac{1}{j-1} \cdot \frac{1}{(x+a)^{j-1}} & \text{se } j > 1 \end{cases}$$

caso $\deg Q = 2$ cioè $Q(x) = x^2 + ax + b$ $\deg P = 1$

$P(x) = (2x + a) + c = Q'(x) + c$

$\int \frac{P}{Q^J} = \int \frac{Q'(x)}{Q^J(x)} + c \int \frac{1}{Q(x)^J}$ cambio di var $y = Q(x)$

$$\int \frac{Q'(x)}{Q(x)^J} dx = \int \frac{1}{y^J} dy = \begin{cases} \log(y) \text{ se } J = 1 \\ -\frac{1}{J-1} \cdot \frac{1}{y^{J-1}} \text{ se } J > 1 \end{cases}$$

caso $\deg Q = 2$ e $\deg P = 0$

$$Q(x) = x^2 + ax + b = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + b - \frac{a^2}{4} = \left(b - \frac{a^2}{4}\right)\left[\left(\frac{x + \frac{a}{2}}{\sqrt{b - \frac{a^2}{4}}}\right)^2 + 1\right]$$

$y = \frac{x + \frac{a}{2}}{\sqrt{b - \frac{a^2}{4}}}$ cambio di var $= \left(b - \frac{a^2}{4}\right)(1 + y^2)$

Resta da fare $\int \frac{1}{(x^2+1)^J}$

se $J = 1$ $\int \frac{1}{x^2+1} = \arctan x + c$

se $J > 1$ abbasso il grado integrando per parti $\frac{2x}{(x^2+1)^J} = -\frac{1}{J-1} \frac{1}{(x^2+1)^{J-1}}$

$I_J = \int \frac{1 + x^2 - x^2}{(x^2+1)^J} = I_{J-1} - \frac{1}{2} \int \frac{2x^2}{(x^2+1)^J} = I_{J-1} - \frac{1}{2} \int \frac{2x \cdot x}{(x^2+1)^J} =$ primitiva di cui $\int$ è I_{J-1}

$= I_{J-1} + \frac{1}{2(J-1)} \frac{x}{(x^2+1)^{J-1}} - \frac{1}{2(J-1)}$ $\Rightarrow I_{J-1} = \left(1 - \frac{1}{2(J-1)}\right) I_{J-1} + \frac{1}{2(J-1)} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^{J-1}}$

Praticamente scrivo I_J in termini di I_{J-1} e itero il procedimento cioè scrivo I_{J-1} in termini di I_{J-2} etc. fino ad arrivare a $\arctan(x) + c$.

Osservazioni

$\int P(x) \log(Q(x))$ e $\int P(x) \arctan(Q(x))$

integrando per parti diventano integrali di f. razionali

esempio

$\int \frac{1}{x^3 - 1} dx$

$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$

$\frac{1}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2+x+1} = \frac{Ax^2 + Ax + A + Bx^2 - Bx + Cx - C}{x^3 - 1}$

$\begin{cases} A + B = 0 \\ A - B + C = 0 \\ A - C = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} A = -B \\ -2B + C = 0 \\ +B = -1 - C \end{cases}$ $\begin{cases} * \\ 2 + 3C = 0 \\ * \end{cases}$ $\begin{cases} A = 1/3 \\ C = -2/3 \\ B = -1 + 2/3 = -1/3 \end{cases}$

$\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{3} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{3} \frac{(x+2)}{x^2+x+1} = \frac{1}{3} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{6} \frac{2x+4}{x^2+x+1} = \frac{1}{3} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{6} \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{x^2+x+1}$

$$\int \frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{3}\log|x-1| - \frac{1}{6}\log|x^2+x+1| - \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{1}{x^2+x+1}}_{*}$$

$*$

$$x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \quad \text{pongo } y = x+\frac{1}{2} \Rightarrow \int \frac{1}{x^2+x+1} = \int \frac{1}{y^2+3/4} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2y}{\sqrt{3}}\right)+c =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+c.$$

in generale

$$\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{y}{a}\right)+c = \int \frac{1}{y^2+a^2}\,dy$$

dim

$$\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{y}{a}\right)' = \frac{1}{a}\,\frac{1}{1+y^2/a}\cdot\frac{1}{a} = \frac{1}{\cancel{a^2}}\cdot\frac{\cancel{a^2}}{y^2+a}$$

nel nostro caso $a = \sqrt{3}/2$

$$\int \frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{3}\log|x-1| - \frac{1}{6}\log|x^2+x+1| - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+c.$$

es

$$\int \arctan(x)\cdot 1\,dx = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\cdot x\cdot 2 = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$$

$\hookrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}$

sostituzioni razionalizzanti

Sia $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ una f. razionale

Si usano in 4 casi

1) $\int$ con esponenziali
2) $\sqrt[n]{ax+b}$
3) $\sqrt{x^2+bx+c}$
4) $\int \sin x$, $\cos x$

esempi $\boxed{1}$

schema $\downarrow$

$$\int R(e^x)\,dx = \int \frac{R(e^x)}{e^x}\,e^x\,dx = \int \frac{R(y)}{y}\,dy$$

$y = e^x \quad dy = e^x$

$\hookrightarrow$ f. razionale

es 1

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx = \int \frac{e^x}{1+e^x}\cdot e^x\,dx = \int \frac{y}{1+y}\,dy = \int \frac{y+1}{1+y} - \frac{1}{1+y}\,dy = y - \log|1+y| + c = e^x - \log(1+e^x)+c$$

$e^x = y \quad dy = e^x\,dx$

es 2

$$\int \frac{16^x}{3+8^x}\,dx = \int \frac{2^{4x}}{3+2^{3x}}\,dx = \int \frac{2^{3x}}{3+2^{3x}}\cdot 2^x\,dx = \frac{1}{\log 2}\int \frac{y^3}{3+y^3}\cdot dy \ldots$$

$y = 2^x \quad dy = 2^x\log(2)\,dx$

esempi 2 Schema 1

$\int R\left(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$ si pone $y=\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ $m = mcm$ (indici)

es 1

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{x-3}}\,dx = \int \frac{y^2+5}{\cancel{y}} 2y\,dy = \int 2y^2+10 = 2\frac{y^3}{3} + 10y = \frac{2}{3}\sqrt{(x-3)^3} + 10\sqrt{x-3} \qquad \frac{1}{2}y + \frac{5}{2}$$

$y=\sqrt{x-3} \Rightarrow x = y^2+3 \quad dx = 2y\,dy$

es 2

$$\int \frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{x}}\,dx = \int \frac{y^6+y^3}{y^6-y^2} 6y^5\,dy = 6\int \frac{y^3[y^3+1]}{y^2[y^4-1]}\cdot y^5\,dy = 6\int \frac{y^6(y^3+1)}{y^4-1} = \dots$$

$y=\sqrt[6]{x} \Rightarrow x = y^6 \Rightarrow dx = 6y^5\,dy$

esempio 3

es

$$\int R(x, \sqrt{a^2-x^2}) = \int R(a\sin t, a\cos t)\, a\cos t\, dt =$$

$x = a\sin t \qquad dx = a\cos t$

$$= \int R\left(\frac{2ya}{1+y^2}, \frac{a(1-y^2)}{1+y^2}\right)\cdot \frac{2a}{1+y^2}\,dy$$

es

$$\int R(x, \sqrt{x^2+c})\,dx$$

se $c>0 \Rightarrow x = \sqrt{c}\,\sinh(t)$ $\Rightarrow \int \tilde{R}(e^t)\,dt$

se $c<0 \Rightarrow x = \sqrt{-c}\,\cosh(t)$

in alternativa

$(x+y)^2 = x^2+c \Rightarrow y = -x + \sqrt{x^2+c} \Rightarrow x = \frac{-y^2+c}{2y}$ e $dx = \left(\frac{-y^2+c}{2y}\right)' dy$

$\int \tilde{R}(y)\,dy$

Schema

- 1ª tecnica $\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx = \sqrt{a}\cdot x + y$ funziona se $a>0$
- 2ª tecnica $\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx = y(x-\lambda)$ funzione se $p(x)$ ha radici reali
  (λ: radice pol.)
- 3ª tecnica a seconda del segno di a $p(x) = \alpha \pm (\beta x + \gamma)^2$
  e si pone $y = \beta x + \gamma \Rightarrow \int \sqrt{\alpha \pm y^2}\,dy$ e da qui procedo con $\cos(t)$ o $\cosh(t)$

es 1 tecnica

$$\int \sqrt{7x^2+2x+1}\,dx = \int \sqrt{7}x + y\,dy \Rightarrow 7x^2+2x+1 = \cancel{7x^2} + y^2 + 2\sqrt{7}xy$$ è di 1° in x

es 2 tecnica

$$\sqrt{x^2+3x-4} = y(x+4) \Rightarrow x^2+3x-4 = y^2(x+4)^2$$

(-4 radice polinomio)

$$(\cancel{x+4})(x-1) = y^2(x+4)^2$$

$$x = \frac{4y^2+1}{1-y^2} \Rightarrow \int\sqrt{x^2+3x-4}\,dx = \int y\left(\frac{4y^2+1}{1-y^2}+4\right)\left(\frac{4y^2+1}{1-y^2}\right)' dy$$

$y(x+4)$

esempio 4

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2y}{1+y^2}, \frac{1-y^2}{1+y^2}\right)\frac{2}{1+y^2}\,dy$$
↳ f. razionale

$\cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2}$ $\quad y = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow x = 2\arctan y \Rightarrow dx = \frac{2}{1+y^2}\,dy$

$\sin x = \frac{2y}{1+y^2}$

es

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{\cancel{1+y^2}}{\cancel{2}y}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{1+y^2}}\,dy = \log(y) + c = \log\left|\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right| + c$$

regola trigonometria $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin(2x)$

Riepilogo tecniche di integrazione
- calcolo diretto
- Parti
- sostituzione
- f. razionali
- sostituzioni razionalizzanti

Metodo di scomposizione di Hermite

$P, Q \in \mathbb{R}[x]$ $\quad \deg P < \deg Q$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P^*(x)}{Q^*(x)} + \frac{d}{dx}\left[\frac{\hat{P}(x)}{\hat{Q}(x)}\right]$$ dove $P^*(x)$ e $\hat{P}(x)$ sono incognite

$Q^*(x)$ ha le stesse radici di Q ma tutte semplici

$\hat{Q}(x)$ ha le stesse radici multiple di Q ma con molteplicità diminuita di 1

$\deg P^* < \deg Q^*$

$\deg \hat{P} < \deg \hat{Q}$

es.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^4 - x^3 + 2}{x^3(x-1)^2}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P^*(x)}{x(x-1)} + \frac{d}{dx}\left[\frac{\hat{P}(x)}{x^2(x-1)}\right] = \left(\frac{a_0}{x} + \frac{a_1}{x-1}\right) + \frac{d}{dx}\left[\frac{bx^2+cx+d}{x^2(x-1)}\right]$$

$$= 2\log(x) - \log(x-1) + \frac{-2x^2 + x + 1}{x^2(x-1)}$$
↓
conti

esercizio teorico 1.

Se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua $\quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ part. di $[a,b]$

$c_k \in [x_{k-1}, x_k]$

Allora $\left|\int_a^b f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})\,f(c_k)\right| \leq (b-a)\,\omega_f(\delta_k)$

dove $\delta_k = \max(x_k - x_{k-1})$

dim

1) $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua $\overset{H.C.}{\Rightarrow}$ f. u. c. cioè $\forall x,y \quad |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<w(\delta)$

2) Sia π part. qualsiasi

$$S(f,\pi) \geq \underset{\underset{\pi}{\inf} S(f,\pi)}{\underset{\|}{S(f)}} = \int_a^b f(x)\,dx = \underset{\sup(s(f,\pi))}{s(f)} \geq s(f,\pi)$$

continua $\Rightarrow$ integrabile

3) $$\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})[\underset{\underset{I_k}{\inf(f)}}{f(\hat{x}_k)} - f(c_k)] \leq \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) f(c_k) \leq \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})[\underset{\underset{I_k}{\sup f}}{f(\tilde{x}_k)} - f(c_k)]$$

4) Osservo che $\forall x,y \in I_k \quad \exists \delta_k$ t.c. $|x-y|<\delta_k \Rightarrow |f(x)-f(y)|<w(\delta_k)$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) f(c_k) \right| \leq \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})\, w_f(\delta_k) \underset{\hat{\delta} = \max\{|I_k|\}}{\leq} \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})\, w(\hat{\delta}) =$$

$$= w(\hat{\delta}) \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = (b-a)\, w(\hat{\delta}) \quad \square$$

es Teorico 2

Se f è continua su $[a,b]$ e $f \geq 0$ e $f(x_0) > 0 \quad x_0 \in [a,b]$

Allora $\int_a^b f(x)\,dx > 0$

dim

f continua $\Rightarrow$ f integrabile

$$\int_a^b f \geq s(\pi, f) = \sum_{k=0}^{n} |I_k|\, f(x_k) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq \hat{k}}}^{n} \underset{\geq 0}{|I_k|\, f(x_k)} + \underbrace{|I_{\hat{k}}|\, f(x_{\hat{k}})}_{\geq 0} > 0$$

$x_0 = a \quad x_n = b \quad \Rightarrow \int_a^b f\,dx \geq s(\pi, f) > 0 \Rightarrow$ Tesi $\qquad \hat{x}_k$ è x_0 per qualche k.

INTEGRALI IMPROPRI GENERALIZZATI

$f: [a,b) \to \mathbb{R} \qquad b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ f è integrabile su $[a,c]$ $\forall c < b$

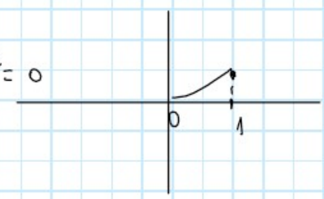
Si dice che f è integrabile (in senso improprio) su $[a,b)$ se $\exists \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\,dx =$
$= \int_a^b f(x)\,dx \in \mathbb{R}$

Più in generale: $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ con $a,b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ è integrabile se dato $x_0 \in (a,b)$
f è integrabile su $(a, x_0]$ e $[x_0, b)$ e si pone $\int_a^b f = \int_a^{x_0} f + \int_{x_0}^b f$

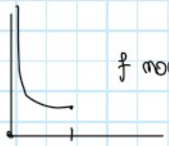
ESEMPIO

$f(x) = x^\alpha \qquad x \in (0,1] \quad \alpha \in \mathbb{R}$ il problema è a 0.

caso $\alpha \geq 0$ $\to$ $f(x)$ è sempre integrabile $\quad \lim_{x \to 0} x^\alpha = 0$



caso $\alpha<0$



f non è limitata

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^1 f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}\left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_\varepsilon^1=\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{1}{\alpha+1}-\frac{\varepsilon^{\alpha+1}}{\alpha+1}=\frac{1}{\alpha+1}-\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{\varepsilon^{\alpha+1}}{\alpha+1}=\begin{cases}\text{se } \alpha+1>0 \Rightarrow \alpha>-1 \Rightarrow \frac{1}{\alpha+1}\\ \text{se } \alpha+1<0 \Rightarrow \alpha<-1 \Rightarrow +\infty\end{cases}$$

caso $\alpha=-1$

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^1\frac{1}{x}\,dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}[\log x]_\varepsilon^1=0-\lim_{\varepsilon\to0^+}\log\varepsilon=\lim_{\varepsilon\to0^+}\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)=+\infty$$

Conclusione

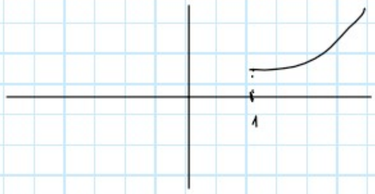
f è int. su $(0,x_0] \Leftrightarrow \alpha>-1$

cambio intervallo

$[1,+\infty)$

caso $\alpha\geq0 \Rightarrow$

x^α cresce



$$\lim_{M\to+\infty}\int_1^M x^\alpha=\lim_{M\to+\infty}\left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_1^M=$$

$$+\infty-\frac{1}{\alpha+1}=+\infty$$

caso $\alpha<0$

$$\lim_{M\to+\infty}\int_1^M x^\alpha=\lim_{M\to+\infty}\left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_1^M=\lim_{M\to+\infty}\frac{M^{\alpha+1}}{\alpha+1}-\frac{1}{\alpha+1}$$

se $\alpha+1>0 \Rightarrow \alpha>-1 \Rightarrow +\infty$

se $\alpha+1<0 \Rightarrow \alpha<-1 \Rightarrow -\frac{1}{\alpha+1}$

caso $\alpha=-1$

$$\lim_{M\to+\infty}\int_1^M\frac{1}{x}\,dx=\lim_{M\to+\infty}[\log x]_1^M=+\infty-0=+\infty$$

Conclusione

L'integrale converge su $(1,+\infty) \Leftrightarrow \alpha<-1$

Quindi su $(0,+\infty)$ $\int x^\alpha$ non converge mai

$(0,1]$ conv $\Leftrightarrow \alpha>-1$ e su $[1,+\infty)$ conv $\Leftrightarrow \alpha<-1$

TEOREMA (confronto)

$f,g:[x_0,+\infty)\longrightarrow[0,+\infty)$

f,g integrabili su $[x_0,M]$ $\forall M<+\infty$

1 Se $f\leq g$ e g integrabile su $[x_0,+\infty) \Rightarrow f$ è integrabile su $[x_0,+\infty)$

2 Se $f\leq g$ e f non è integrabile $\Rightarrow g$ non è integrabile su $[x_0,+\infty)$

dim Teorema

Hp: $\begin{cases} 0 \le f \le g \\ g \text{ integrabile su } [x_0, +\infty) \end{cases}$

Quindi $0 \le \int_{x_0}^{M} f(x)\,dx \le \int_{x_0}^{M} g(x)\,dx$

$\Rightarrow \limsup \int_{x_0}^{M} f(x)\,dx \le \int_{x_0}^{+\infty} g < +\infty \Rightarrow M \to \int_{x_0}^{M} f$ è crescente e limitata

$\Rightarrow \exists \lim_{M \to +\infty} \int_{x_0}^{M} f = \int_{x_0}^{+\infty} f \le \int_{x_0}^{+\infty} g$

OSS.

$f \ge 0$ f non è int. su $[x_0, +\infty) \Leftrightarrow \lim_{M \to +\infty} \int_{x_0}^{M} f(x) = +\infty$

infatti $M \to \int_{x_0}^{M} f$ è una f. monotona crescente

Corollario confronto asintotico

f, g def. positive per $x \to +\infty$

$f \sim g$ cioè $\lim_{x \to +\infty} \frac{f}{g} = 1$ (va bene anche $f \sim cg$ $c \in (0, +\infty)$)

Allora f è integrabile su $[x_0, +\infty) \Leftrightarrow g$ è integrabile su $[x_0, +\infty)$

DEFINIZIONE

$f: I \to \mathbb{R}$ dove $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo anche illimitato

f è ass. integrabile su I

1 Se $|f|$ è integrabile in senso improprio su I

2 Se f è integrabile su $[a, b] \subseteq I$ con $-\infty < a < b < +\infty$

Teorema

$f: I \to \mathbb{R}$ assolutamente integrabile $\Rightarrow f$ è integrabile

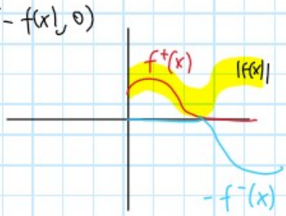
dim

$f^+(x) \equiv$ parte positiva di $f \equiv \max(f(x), 0)$

$f^-(x) \equiv$ parte negativa di $f = \max(-f(x), 0)$

$f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ $x \in I$

$|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$



In particolare $0 \le f^{\pm}(x) \le |f(x)|$

confronto

$\Rightarrow f^+(x)$ e $f^-(x)$ sono integrabili su $I \Rightarrow f$ è integrabile

additività del limite

e $\int f = \int f^+ - \int f^-$

Osservazione

$$\left|\int f\right| = \left|\int f^+ - \int f^-\right| \le \int f^+ + \int f^- = \int |f|$$

$$\int |f| = \int f^+ + \int f^-$$

Proposizione

Siano f_1 e f_0 due funzioni positive integrabili su $[\delta, 1]$ $\forall \delta > 0$

Se $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{f_0(x)} = 1$ allora $\lim_{\delta \to 0} \int_\delta^1 f_1(x)dx$ o è finito per entrambi o è ∞ per entrambi

es: $f_0(x) = \frac{1}{x}$ e $f_1(x) = \frac{1}{\log(1+x)}$

CRITERIO SERIE - INTEGRALI

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $\quad a_n = f(n)$ $\quad f: [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f \geq 0$, f decrescente, e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Si hanno allora le disuguaglianze:

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) \geq \int_1^{N+1} f(x)dx \geq \sum_{n=2}^{N+1} f(n)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{n=1}^{N} f(n) \geq \int_1^{N} f(x)dx}_{} \geq \sum_{n=2}^{N} f(n) \quad \forall N \geq 2$$

Teorema

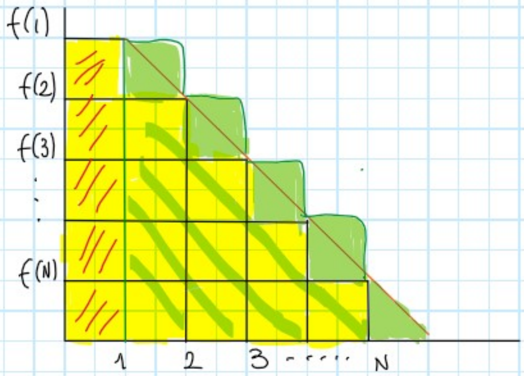
$f \geq 0$, f decrescente allora $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < +\infty \iff \int_1^{\infty} f(x)dx < +\infty$

$\Rightarrow$

$\Leftarrow$

Se faccio il lim passo alle serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \geq \int_1^{\infty} f(x)dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) - f(1)$$



$y = f(x)$

A $\sum_{n=2}^{N+1} f(n) =$ area di ogni rett + escluso ///

B $\sum_{n=1}^{N} f(n) =$ + ///

Osservazione

- Sia $b_N = \left(\sum_{n=1}^{N} f(n) - \int_1^{N} f(x)dx \right) \in [0, f(1)]$ $\forall N$

2) b_N è limitata (per 2 mi serve 3)

3) b_N è decrescente

$$b_{N+1} - b_N = \sum_{n=1}^{N+1} f(n) - \sum_{n=1}^{N} f(n) - \int_1^{N+1} f(x)dx + \int_1^{N} f(x)dx =$$

$$= f(N+1) - \int_N^{N+1} f(x)dx \leq 0 \quad \Rightarrow b_N \text{ è decrescente}$$

2) $b_N \xrightarrow[N]{} \inf_N (b_N) = b \in [0, f(1)]$

Quindi $\sum_{n=1}^{N} f(n) = \int_1^{N} f(x)dx + \underset{[0, f(1)]}{b} + o(1)$ per $N \to +\infty$

Questo vale anche quando $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = +\infty$

Γ di Eulero

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, dt$$

a L'integrale e' finito $\forall x > 0$

b $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$

c $\Gamma(n) = (m-1)!$

d Γ e' una funzione C^{∞} nella x

dim

a) $I_m = \int_0^{+\infty} t^m e^{-t} \, dt$

se $m = 0$ $\quad I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 0 - (-1) = 1$

se $m \geq 1$ $\quad I_m = \left[t^m(-e^{-t})\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} m\, t^{m-1} (e^{-t}) dt = 0 + m\, I_{m-1}$

Quindi $\begin{cases} I_0 = 1 \\ I_m = m\, I_{m-1} \end{cases} \Rightarrow I_m = m!$

Più in generale

Se $\lambda > 0$ $\quad \int_0^{+\infty} t^m e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda^m} \int_0^{+\infty} y^m e^{-y} \frac{dy}{\lambda} = \frac{m!}{\lambda^{m+1}}$

$\lambda t = y \Rightarrow t^m = \frac{y^m}{\lambda^m} \quad dt = \frac{dy}{\lambda}$

* (continua dopo)

Per quali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ converge $\quad I(\alpha,\beta) = \int_0^1 t^{\alpha} \left[\log\left(\frac{1}{t}\right)\right]^{\beta} dt$

Problemi
- converge a 0 se $\alpha < 0$
- converge a 1 se $\beta < 0$

pongo $\quad y = \log\left(\frac{1}{t}\right) \Rightarrow t = e^{-y} \quad dt = -e^{-y} dy$

$$I(\alpha,\beta) = \int_{\infty}^{0} e^{-\alpha y}\, y^{\beta} (-e^{-y} dy) = \int_0^{\infty} y^{\beta} e^{-(\alpha+1)y} dy$$

$\hookrightarrow$ problematico a 0 e a $+\infty$ $\Rightarrow$ spezzo

$\int_1^{+\infty} y^{\beta} e^{-(\alpha+1)y} dy$ converge $\iff \alpha+1 > 0$ perchè lo confronto con $\int_0^{+\infty} y^m e^{-(\alpha+1)y} dy$

con $m \geq \beta$
$0 \leq y^{\beta} \leq y^m$

$\int_0^1 y^{\beta} e^{-(\alpha+1)y} dy$ converge $\iff \beta > -1$

$\hookrightarrow$ conf. asintotico

$I(\alpha,\beta)$ conv $\iff \begin{cases} \alpha > -1 \\ \beta > -1 \end{cases}$

* Dunque $\quad I(\alpha,m) = \int_0^{+\infty} y^m e^{-(\alpha+1)y} dy = \frac{m!}{(\alpha+1)^{m+1}}$

b) Int. per parti

Lemma

Posto $\Gamma_m(x) \doteq \int_0^{+\infty} [\log(t)]^m t^{x-1} e^{-t} dt$

Ho che

a Γ_m è ass. conv. $\forall m \in \mathbb{N}$ $\forall x>0$

b $\Gamma_m(x+h) = \Gamma_m(x) + h\,\Gamma_{m+1}(x) + o(h)$ per $h \to 0$ $\forall x>0$

c $\Gamma_m'(x) = \Gamma_{m+1}(x)$ deriva da b usando def di derivata

d $\Gamma_m(x) = [\Gamma_0(x)]^m$ oss: $\Gamma_0 = \Gamma(x)$ per induzione da c

dim lemma

a) $\int_0^{+\infty} |\log(t)|^m t^{x-1} e^{-t} dt = \int_0^1 \text{ — a1} \quad \int_1^{+\infty} \text{ — a2}$

a1) $\int_0^1 \left[\log\left(\frac{1}{t}\right)\right]^m t^{x-1} e^{-t} dt \underset{e^{-t}<1}{\leq} \int_0^1 \left[\log\left(\frac{1}{t}\right)\right]^m t^{x-1} dt \overset{*}{=} \frac{m!}{x^{m+1}}$

a2) $\int_1^{+\infty} [\log(t)]^m t^{x-1} e^{-t} dt \leq \int_1^{+\infty} t^{x+m-1} e^{-t} dt \leq \Gamma(x+m)$

$0 \leq \log(t) \leq t$

b) fisso $x>0$ $\delta \in (0,x)$ $|h| \leq \delta$

$R(h) = \Gamma_m(x+h) - \Gamma_m(x) - h\,\Gamma_{m+1}(x)$

Tesi $R(h) = o(h)$ per $h \to 0$

$R(h) = \int_0^{+\infty} [\log(t)]^m t^{x-1} e^{-t} [t^h - 1 - h\log(t)] dt$

uso Taylor Lagrange

$$\begin{cases} g(s) = t^s \\ g'(s) = \log(t)\, t^s \\ g''(s) = [\log(t)]^2 t^s \end{cases}$$

$g(h) = g(0) + h\,g'(0) + h''g''(\xi)$

$[t^h - 1 - h\log(t)] = \frac{h^2}{2} (\log t)^2 t^\xi$

con $|\xi| \leq \delta$

Ora t^s è convessa

$\max_{|s|\leq\delta} t^s = \max(t^\delta, t^{-\delta}) \leq t^\delta + t^{-\delta}$

$0 \leq t^h - 1 - h\log t \leq \frac{h^2}{2} (\log t)^2 (t^\delta + t^{-\delta})$

$|R(h)| \leq \frac{h^2}{2} \int_0^{+\infty} |\log(t)|^{m+2} t^{x-1} e^{-t} (t^\delta + t^{-\delta}) dt = \frac{h^2}{2}(J^+ + J^-)$

con $J^\pm = \int_0^{+\infty} |\log(t)|^{m+2} t^{x\pm\delta-1} e^{-t} dt \underset{0<\delta<x}{<} +\infty$

Quindi $|R(h)| \leq c\,h^2$ cioè $R(h) = O(h^2)$ e quindi è $o(h)$