LIMITI

venerdì 12 agosto 2022 13:32

LEZIONE DA 13 A 24 esclusa 23 NOVAGA E CARMINATI

Definizione di limite con gli intormi

Siano E,F due spazi metrici. Sia $f: E \setminus \{x_0\} \to F$ una funziome, con x_0 punto di accumulazione per E.

Si dice che f ha limite ℓ per $x \to x_0$ in F cioè $\lim_{x \to x_0} f = \ell$ se:

$\forall$ V intormo di ℓ in F $\exists$ U intorno di x_0 in E tale che $f(U \setminus \{x_0\}) \subseteq V$

grafica mente

Unicita' del limite

Il limite se esiste e' unico

dim

- Supponiamo per assurdo che il limite mom sia unico, cioè $\lim_{x\to x_0} f = \ell \land \lim_{x\to x_0} f = m$ com $\ell \neq m$
- Siamo V_1 imtormo di ℓ e V_2 intormo di m in F tale che $\boxed{V_1 \cap V_2 = \emptyset}$* (intorni disgiunti)
- Dato che x_0 è punto di accumulaziome per E, per def. di limite $\exists$ U_1 e U_2 due intormi di x_0 t.c:
  - $\forall x \in U_1 \cap E$ con $x \neq x_0$ $f(x) \in V_1$
  - $\forall x \in U_2 \cap E$ con $x \neq x_0$ $f(x) \in V_2$

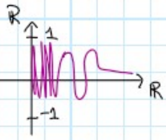
Tale x esiste sicuro? Si

- $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ perchè x_0 è p.to di accumulazio ne per $E \Rightarrow U_1 \cap U_2 \supseteq \{\infty \text{ punti}\}$. Dunque sia $x \in U_1 \cap U_2 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} -f(x) \in V_1 \text{ perche' } x \in U_1 \\ -f(x) \in V_2 \text{ perche' } x \in U_2 \end{array}\right\} \Rightarrow V_1 \cap V_2 \supseteq \{f(x)\} \text{ cioe' } V_1 \cap V_2 \neq \emptyset \text{ ↯ perchè } *$$

Esempio di mom esistenza del limite

$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 0} f(x)$



Definizione di $\overline{\mathbb{R}}$ e intorno di $\pm\infty$

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ U \text{ e' intormo di } +\infty \iff \exists\, x \text{ t.c. } y \in U \ \forall y > x \\ \cdot\ U \text{ e' intorno di } -\infty \iff \exists\, x \text{ t.c. } y \in U \ \forall y < x \end{array}\right\} \text{ sono definiti i } \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \begin{cases} \to \ell \in \mathbb{R} \\ \to +\infty \\ \to -\infty \\ \to \nexists \end{cases}$$

Teorema di permanenza del segno

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell > 0 \lor \ell = +\infty \Rightarrow f(x) > 0$ defimitivamente

dim

Per def. di limite $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ t.c. $\ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell + \varepsilon$ $\forall x \in E \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Scelgo $\varepsilon = \ell/2 \Rightarrow \ell - \ell/2 \leq f(x) \leq \ell + \frac{\ell}{2} \Rightarrow 0 < \frac{\ell}{2} \leq f(x) \leq \frac{3}{2}\ell$

Analogamente

Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow f(x) > 0$ definitivamente

dim

$\forall M \in \mathbb{R}$ $\exists \delta > 0$ t.c. $f(x) > M$ $\forall x \in E \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Scelgo $M = 2000 \Rightarrow f(x) > 2000 = M$ def.

Proprietà algebriche dei limiti

Siano $g, f : E \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ tale che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = m \in \mathbb{R}$. Allora

1 $\lim_{x \to x_0} f+g = \ell + m$

2 $\lim_{x - x_0} f \cdot g = \ell \cdot m$

3 se $m \neq 0$ $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{m}$, se $m=0$ e $\ell \neq 0$ e $g(x) > 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \ell > 0 \\ -\infty & \text{se } \ell < 0 \end{cases}$ se $g(x) < 0 \Rightarrow \begin{cases} -\infty & \text{se } \ell > 0 \\ +\infty & \text{se } \ell < 0 \end{cases}$

dim

1) fisso $\varepsilon > 0$ $\exists$ U_1 intorno di x_0 tale che $f(U_1 \setminus \{x_0\}) \subseteq \overset{\text{palla di raggio } \varepsilon/2 \text{ e centro } \ell \equiv \text{intorno } V_1 \text{ di } \ell}{B_{\varepsilon/2}(\ell)}$ $\wedge$ $\exists$ U_2 intorno di x_0 t.c. $g(U_2 \setminus \{x_0\}) \subset \overset{\text{palla di raggio } \varepsilon/2 \text{ e centro } m \equiv \text{intorno } V_2 \text{ di } m}{B_{\varepsilon/2}(m)}$

Chiamo $U = U_1 \cap U_2$, U è int. di x_0. Sia $x \in U \setminus \{x_0\} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = \ell + r_1 & \text{con } |r_1| < \varepsilon/2 \\ f(x) = m + r_2 & \text{con } |r_2| < \varepsilon/2 \end{cases} \Rightarrow f(x) + g(x) = \ell + m + \overset{\varepsilon}{\overbrace{r_1 + r_2}}$

$x \in U \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) + g(x) \in \underset{\text{intorno } V \text{ di } (\ell+m)}{\underbrace{B_\varepsilon(\ell+m)}}$ e cioè $(f+g)(U \setminus \{x_0\}) \subseteq B_\varepsilon(\ell+m)$

2) $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \ell \cdot m \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} |f(x)g(x) - \ell m| = 0 \Rightarrow$

$$0 < |f(x)g(x) - \ell g(x) + \ell g(x) - \ell m| \leq |f(x)g(x) - \ell g(x)| + |\ell g(x) - \ell m| \leq \underset{0}{\underbrace{|\overset{0}{\overbrace{f(x) - \ell}}| \cdot |\overset{\text{è limitata in un int di } x_0}{g(x)}|}} + \underset{0}{\underbrace{|\ell| \cdot |\overset{0}{\overbrace{g(x) - m}}|}} = 0 + 0 = 0$$

Convenzioni e forme indeterminate

convenzioni ↓

- $\pm\infty \pm \infty = \pm \infty$, $\pm\infty + c = \pm\infty$, $(\pm\infty)(\pm\infty) = +\infty$, $(+\infty)(-\infty) = -\infty$, $\frac{\pm\infty}{c} = \begin{cases} +\infty & \text{se } c > 0 \\ -\infty & \text{se } c < 0 \end{cases}$ $\frac{\ell}{0} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \ell > 0 \\ -\infty & \text{se } \ell < 0 \end{cases}$

f. indeterminate ↓

$+\infty - \infty$, $-\infty + \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, 1^∞

LIMITI DI SUCCESSIONI

$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successiome in E se $\exists$ $f : \mathbb{N} \to \overset{\mathbb{R}}{\overset{\cup|}{E}}$, $n \to a_n$ t.c. $a_n = f(n)$. È definito $\lim_{n \to +\infty} f(n) = \lim_{n \to +\infty} a_n = \ell \in E \Longleftrightarrow$

$\forall$ V int. di ℓ in E $\exists$ U int di $+\infty$ t.c. $f(n) \in V$ $\forall m \in U \cap \mathbb{N} \Longleftrightarrow \underset{\text{definitivamente}}{\underbrace{\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } a_n \in V \ \forall n > n_0}}$

- Uma successiome si dice convergente se $\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell \in E = \mathbb{R}^n$
- Uma successiome si dice divergente se $\lim_{n \to +\infty} a_n = \pm\infty \in E = \overline{\mathbb{R}}$

⊕ $U_1 = \{n \geq n_1\}$ $U_2 = \{n \geq n_2\}$ $U = U_1 \cap U_2 = \{n \geq \max\{n_1, n_2\}\}$

Composizione con funzioni continue

Se $\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell$ e $f : \overset{\text{int di } \ell}{U_0} \to \mathbb{R}$, f continua in ℓ, $\exists$ n_0 t.c. $f(a_n)$ è ben defimita $\forall n \geq n_0$ e $\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = f(\ell)$

dim

$\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell \Rightarrow \forall$ U int. di ℓ $\exists$ $\bar{m}$ t.c. $a_n \in U$ $\forall n \geq \bar{n}$ [$\Rightarrow$ buona def. di $f(a_n)$ per $n \geq \bar{n}$] $\overset{\text{composiz.}}{\Rightarrow} \lim_{n \to +\infty} f(a_n) = f(\ell)$

Esercizio

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua e $\begin{cases} a_0 = \alpha \in \mathbb{R} \\ a_{n+1} = f(a_n) \end{cases}$ se $\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow \overset{\ell \text{ è p.to fisso per } f}{\overbrace{\ell = f(\ell)}}$

dim

Se $\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists\, \bar{n}$ t.c. $\ell - \varepsilon < \overset{a_{n+1} = f(a_n) \Rightarrow a_n = f(a_{n-1})}{\overbrace{a_n < \ell + \varepsilon \quad \forall n \geq \bar{n} \Rightarrow \ell - \varepsilon < f(a_{n-1})}} < \ell + \varepsilon$ $\forall n \geq \bar{n} \Rightarrow \underset{\substack{\text{comp. f. cont.} \\ \| \\ f(\ell)}}{\lim_{n \to +\infty} f(a_{n-1})} = \ell$ // unicità limite $\Rightarrow f(\ell) = \ell$

Teorema del confronto

Siano $f, g : E \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, x_0 p.to di accumulaziome per E. Supponiamo $^*\boxed{f \leq g}$ in un int. di x_0, $\lim_{x \to x_0} f = \ell \wedge \lim_{x \to x_0} g = m \Rightarrow \ell \leq m$

dim

Sia $h = g - f \Rightarrow \lim_{x \to x_0} h = m - \ell$

Supp. per assurdo ehe $\ell > m \Rightarrow m - \ell < 0 \overset{\text{Teo Permanenza del segno}}{\Rightarrow} h(x) < 0$ im um int. di $x_0 \Rightarrow h = g - f < 0$ in un int. di $x_0 \Rightarrow g < f$ in un int. di x_0 ↯ *

Teorema dei 2 Carobinieri

Siano $f, g, h : E \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$. Supponiamo $f \leq h \leq g$ in un int. di x_0. Se $\lim_{x \to x_0} f = \lim_{x \to x_0} g = \ell \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} h = \ell$

dim

caso $\ell = +\infty$

$\forall$ V int. di $+\infty$ $\left[\text{del tipo } \overset{\text{semiretta}}{\overline{(a, +\infty)}} \text{ con } a \in \mathbb{R}\right]$ $\exists$ U int di x_0 t.c. $f(x) \in V$ cioe` $f(x) > a$ $\forall x \in U \Rightarrow h(x) \geq f(x) > a$ $\forall x \in U \Rightarrow \lim_{x \to x_0} h(x) = +\infty$

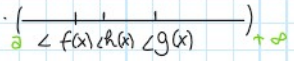
caso $\ell = -\infty$

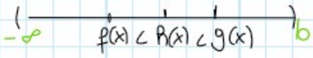
$\forall$ V int. di $-\infty$ del tipo $\left[\overset{\text{semiretta}}{\overline{(-\infty, b)}} \text{ con } b \in \mathbb{R}\right]$ $\exists$ U int. di x_0 t.c. $g(x) \in V$ cioè $g(x) < b$ $\forall x \in U \Rightarrow f(x) < h(x) < g(x) < b$ $\forall x \in U \Rightarrow \lim_{x \to x_0} h(x) = -\infty$

caso $\ell \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ U int. di x_0 t.c. $f(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$ e $g(x) \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$ $\forall x \in U \overset{f < h < g}{\Rightarrow} h(x) \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$ $\forall x \in U \Rightarrow \lim_{x \to x_0} h(x) = \ell$

grafi camente





corollario con valore assoluto

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \iff \lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0$$

dim

$\Leftarrow$

Se $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0 \Rightarrow \underset{\downarrow 0}{-|f(x)|} \leq \underset{\downarrow 0}{f(x)} \leq \underset{\downarrow 0}{|f(x)|}$ per Carabinieri $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$

$\Rightarrow$

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists$ U int di x_0 tc $f(x) \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ $\forall x \in U \Rightarrow |f(x)| \in [0, \varepsilon) \subseteq (-\varepsilon, \varepsilon) \underset{\text{def di limite}}{\Rightarrow} \lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0$

Corollario infinitesima x limitata = infinitesima

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ f, g : E \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R} \\ \cdot\ \lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \\ \cdot\ |g(x)| \leq M \text{ in un int. di } x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) g(x) = 0$$

dim

$|f(x) g(x)| \leq M |f(x)| \Rightarrow -M \underset{\downarrow 0}{|f(x)|} \leq f(x) g(x) \leq M \underset{\downarrow 0}{|f(x)|} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} M \cdot |f(x)| = 0$ Per carabinieri $\lim_{x \to x_0} f(x) g(x) = 0$

Esempio di limite di successione

$a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Se $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0 \not\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$. E' vero $\iff a_n > 0$ def.

Infatti sia $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ $a_n \to 0$ ma $\frac{1}{a_n} = (-1)^n \cdot n$ non ha limite perchè $\frac{1}{a_{2n}} \to +\infty$ e $\frac{1}{a_{2n+1}} \to -\infty$

Limite da tabellina

$$\lim_{n \to +\infty} a^n = \begin{cases} 0 & \text{se } |a| < 1 \\ +\infty & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ \nexists & \text{altrimenti} \end{cases}$$

caso $a > 1$

$a = 1 + \delta$ $\delta > 0$

$$\underset{\downarrow +\infty}{(1+\delta)^n} \overset{\text{Bernoulli}}{\geq} \underset{\downarrow +\infty}{1 + n\delta} \geq \underset{\downarrow +\infty}{n\delta} \quad n \to +\infty \quad \text{per carabinieri}$$

caso $0 < |a| < 1$

$$\lim_{n \to +\infty} |a^n| = \lim_{n \to +\infty} |a|^n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{|a|}\right)^n} = 0 \qquad \frac{1}{|a|} > 1 \text{ perchè } |a| < 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{|a|}\right)^n \to +\infty$$

caso $a = 1$

è la succ. costante

criterio del rapporto

Sia a_n una successione a termini positivi. Se $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$ $\rightarrow$

- $\ell > 1 \Rightarrow a_n \to +\infty$ e a_n è crescente
- $\ell < 1 \Rightarrow a_n \to 0$ e a_n è decrescente
- $\ell = 1 \Rightarrow$ boh!

dim

caso $\ell < 1$

1 Per def. di limite $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0$ t.c. $\ell - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \ell + \varepsilon \; \forall n \geq n_0$. Poichè $\ell < 1$ scelgo ε t.c $\ell + \varepsilon < 1 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \; \forall n \geq n_0 \Rightarrow a_n$ decresc.

2 $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0$ t.c. $\ell - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \ell + \varepsilon \; \forall n \geq n_0$. Poichè $\ell > 1$ scelgo ε t.c. $\ell - \varepsilon > 1 \Rightarrow 1 < \ell - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow a_n < a_{n+1} \Rightarrow a_n$ è cresc

Nel caso 2 $a_n > (\ell - \varepsilon)^n \sim \ell^n \to +\infty$ per $\ell > 1$

Nel caso 1 $a_n < (\ell + \varepsilon)^n \sim \ell^n \to 0$ per $\ell \in [0,1)$

Ordini di ∞

$n^\alpha << a^n << n! << n^n$ per $\alpha > 0$ e $a > 1$

dim

- $x_n = \frac{n^\alpha}{a^n} \to 0$ con $\alpha > 0$ e $a > 1$

uso c. rapporto

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{(n+1)^\alpha}{a^{n+1}}}{\frac{n^\alpha}{a^n}} = \frac{(n+1)^\alpha}{a^n \cdot a} \cdot \frac{a^n}{n^\alpha} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \cdot \frac{1}{a} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha \cdot \frac{1}{a} \longrightarrow \frac{1}{a} \underset{\text{rapporto}}{<} 1 \Rightarrow x_n \to 0$$

- $x_n = \frac{a^n}{n!} \to 0$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} = \frac{a^n \cdot a}{n!(n+1)} \cdot \frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1} \to \underset{\text{rapporto}}{0} \Rightarrow x_n \to 0$$

- $x_n = \frac{n!}{n^n}$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)\, n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} \cdot \frac{\cancel{n+1}}{\cancel{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \underset{\text{reciproco}}{=} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow x_n \to 0$$

$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

Proposizione

x_n monotona cioè $x_{n+1} \geq x_n \; \forall n \; \vee \; x_{n+1} \leq x_n \; \forall n$ se x_n è limitata $\Rightarrow x_n$ converge.

dim

$\{x_n\}$ ha almeno un p.to di accumulazione

Supp x_n crescente $\Rightarrow$ l'unico p.to di accum è $\sup_x x_n \Rightarrow \exists x_{n_k} \to x = \sup(x_n) \Rightarrow x_n \to x$

Supp x_n decrescente $\Rightarrow$ p.to di accum è $\inf x_n \Rightarrow \exists x_{n_k} \to x = \inf(x_n) \Rightarrow x_n \to x$

$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e$ per $n \to +\infty$

$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

STEP 1 x_n è crescente

STEP 2 x_n è limitata

$\Rightarrow x_n$ converge

mi servono 1 e 2.

STEP 3 x_n converge ad e

STEP 1

- x_n è crescente

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \cdot \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)}{k!\, n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right)$$

$$x_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n+1}\right) \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) = x_n \Rightarrow x_{n+1} \geq x_n$$

perchè $\frac{j}{n+1} < \frac{j}{n} \Rightarrow \left(1 - \frac{j}{n+1}\right) > \left(1 - \frac{j}{n}\right) \Rightarrow \prod \left(1 - \frac{j}{n+1}\right) > \prod \left(1 - \frac{j}{n}\right)$

STEP 2

- x_m è limitata

$$X_m = \sum_{K=0}^{m}\frac{1}{K!}\prod_{J=0}^{K-1}\left(1-\frac{J}{n}\right) < \sum_{K=0}^{m}\frac{1}{K!} \underset{\downarrow}{\overset{ⓐ}{\le}} 1+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2^{k-1}} = 1+\sum_{J=0}^{m-1}\frac{1}{2^J} \underset{\downarrow}{\overset{ⓑ}{=}} 1+\frac{\overbrace{1-\frac{1}{2^n}}^{\text{al più è } 1.}}{1-\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{\frac{1}{2}} = 1+2=3 \quad \forall n$$

ⓐ perchè $K! \ge 2^{K-1} \ \forall K \in \mathbb{N}$ ⓑ perchè $\sum_{K=0}^{n} x^K = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ prog geometrica.

Quindi per la proposizione (x_n monotona + limitata $\Rightarrow x_n$ converge) $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$ è crescente e limitata (<3) $\Rightarrow$ converge

STEP 3

- $x_n = (1+\frac{1}{n})^n \to e$

$$x_m \le \sum_{K=0}^{\infty}\frac{1}{K!} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\underbrace{\sum_{K=0}^{n}\frac{1}{k!}}_{\text{somma } \infty \ \rightsquigarrow \text{ serie}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} \overset{\text{def.}}{=} e \in \mathbb{R} \qquad e = 2{,}71\ldots$$

Dim a

$K! \ge 2^{K-1}$ per induzione

$$\text{PB}\begin{cases} K=1 \Rightarrow K! = 1 \ge 2^0 = 1 \\ K=2 \Rightarrow 2! = 2 \ge 2^1 = 2 \end{cases}$$

$$\text{PI} \quad \text{supp} \quad (K-1)! \ge 2^{K-2} \quad \underset{\boxed{\substack{K(K-1)! \ge 2(K-1)! \\ K\ge 2}}}{K! \ge 2(K-1)!} \ge 2^{K-2}\cdot 2 = 2^{K-1}$$

dim b

$$(a^n - b^n) = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\_+b^{n-1}) = (a-b)\sum_{K=0}^{n-1} a^{n-K+1}b^K$$ ponendo $a=1$ e $b=x$

Esercizio + Stirling

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x^n n!}{n^n} \qquad x>0$$

rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{x^n\cdot n!} = \frac{\cancel{x^n}\cdot x\,\cancel{(n+1)}\,\cancel{n!}}{\cancel{x^n}\cdot\cancel{n!}\,\cancel{(n+1)}}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{x}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{x}{e} = \begin{cases} +\infty & \text{se } x>e \\ 0 & \text{se } x\in(0,e) \end{cases}$$

se $x=e$ uso Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x^n n!}{n^n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{e}{n}\right)^n n! \sim \lim_{n\to+\infty}\cancel{\left(\frac{e}{n}\right)^n}\sqrt{2\pi n}\cdot\cancel{\left(\frac{n}{e}\right)^n} \longrightarrow +\infty$$

Definizione di ~ "asintoticamente equivalenti", si comporta come

$a_n \sim b_n$ per $n\to+\infty$ se $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = 1$

LIMITI di Polinomi

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{P(n)}{Q(n)} \sim \lim_{n\to+\infty}\frac{a_N n^N}{b_M n^M} \qquad p(n) = \sum_{K=0}^{N} a_K n^K \quad q(n) = \sum_{K=0}^{M} b_K n^K$$

$$\| $$

$$\frac{a_N}{b_M}\lim_{n\to+\infty} n^{N-M} = \begin{cases} \operatorname{sgn}\left(\frac{a_N}{b_M}\right)\cdot\infty & \text{se } N>M \\ \frac{a_N}{b_M} & \text{se } N=M \\ 0 & \text{se } N<M \end{cases}$$

dim

$$\left.\begin{aligned} P(n) &= a_N n^N\left(1+\sum_{K=0}^{N-1}\frac{a_K}{a_N}\frac{1}{n^{N-K}}\right) \\ Q(n) &= b_M n^M\left(1+\sum_{K=0}^{M-1}\frac{b_K}{b_M}\frac{1}{n^{M-K}}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{P(n)}{Q(n)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{a_N n^N}{b_M n^M}\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\overbrace{\sum_K \frac{a_K}{a_N}\frac{1}{n^{N-K}}}^{\to 0}\Big\}\to 1}{1+\underbrace{\sum_K \frac{b_K}{b_M}\frac{1}{n^{M-K}}}_{\to 0}\Big\}\to 1}$$

Quindi nei limiti conta solo il termine che va a $+\infty$ più velocemente o a 0 più lentamente

Limite della $\sqrt[n]{\text{polinomi / costanti}}$

$\lim_{n\to+\infty} a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ con $a>0$

se $a=1$ $\Rightarrow a^{\frac{1}{n}} = 1^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{1} = 1$

se $a>1$ $\Rightarrow a^{\frac{1}{n}}$ è decrescente, $a^{\frac{1}{n}} > 1$ $\forall n \Rightarrow \exists \lim_{n\to+\infty} a^{\frac{1}{n}} = \ell \geq 1 \Rightarrow a^{\frac{1}{n}} \geq \ell$ $\forall n \Rightarrow a \geq \ell^n$ $\forall n \Rightarrow \ell = 1$

se $a \in (0,1)$ $\Rightarrow a^{\frac{1}{n}}$ è crescente, $a^{\frac{1}{n}} < 1$ $\forall n \Rightarrow \exists \lim_{n\to+\infty} a^{\frac{1}{n}} = \ell \leq 1 \Rightarrow a^{\frac{1}{n}} \leq \ell$ $\forall n \Rightarrow a \leq \ell^n$ $\forall n \Rightarrow \ell = 1$

$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \to e$ per $x \to +\infty$ con parte intera

$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ perchè $\underset{\underset{e}{\downarrow}}{\left(1+\frac{1}{\lfloor x\rfloor+1}\right)^{\lfloor x\rfloor}} \leq \underset{\underset{e \text{ carab.}}{\downarrow}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} \leq \underset{\underset{e}{\downarrow}}{\left(1+\frac{1}{\lfloor x\rfloor}\right)^{\lfloor x\rfloor+1}}$

Simboli di Landau

o-piccolo

Sia $f(x)$ t.c. $\lim f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$, $x_0 \in \mathbb{R}$

g è $o(f)$ per $x \to x_0$ cioè $g(x) = o(f(x))$ se $\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$

cioè se $f(x) \to 0 \Rightarrow g(x) \to 0$ più velocemente

$p(x)$ polinomio $p(x) = \sum_{k=0}^{\mathbb{N}} a_k x^k$

$$\begin{cases} p(x) = a_n x^n + o(x^n) & \text{per } x \to +\infty \\ p(x) = a_0 + o(1) & \text{per } x \to 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^\beta = o(x^\alpha) \text{ se } \beta \geq \alpha & \text{per } x \to 0 \qquad x^3 = o(x^2) \\ x^\beta = o(x^\alpha) \text{ se } \beta \leq \alpha & \text{per } x \to +\infty \qquad x^2 = o(x^3) \end{cases}$$

$$o(x^\alpha) + o(x^\beta) = \begin{cases} o(x^\alpha) & \text{per } x \to +\infty \\ o(x^\beta) & \text{per } x \to 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} o(x^3) + o(x^2) = o(x^3) \\ o(x^3) + o(x^2) = o(x^2) \end{matrix}$$

con $\alpha \geq \beta$

- $f + o(f) \sim f$ per $x \to x_0$
- $\frac{f+o(f)}{g+o(g)} \sim \frac{f}{g}$ per $x \to x_0$
- $f \cdot o(g) = o(f \cdot g)$ $\qquad x \cdot o(x^2) = o(x^3)$
- $o(f) \cdot o(g) = o(f \cdot g)$ $\qquad o(x)\, o(x^2) = o(x^3)$
- $o(f) + o(g) = o(\max(|f|,|g|))$

$\Big\}$ idem O-grande

O-grande

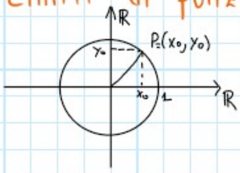
$O(f)$, per $x \to x_0$, è l'insieme delle funzioni g t.c.

$\exists\, C > 0$ e $\exists\, U$ int di x_0 t.c. $|g(x)| \leq C|f(x)|$ $\forall x \in U$ $x \neq x_0$

proprietà

- $o(f) \subseteq O(f)$
- $x^\beta = O(x^\alpha)$ $\begin{cases} \text{per } x \to +\infty \iff \beta \leq \alpha \\ \text{per } x \to 0 \iff \beta \geq \alpha \end{cases}$
- $p(x) = O(x^n) = a_n x^n + O(x^{n-1})$ per $x \to +\infty$

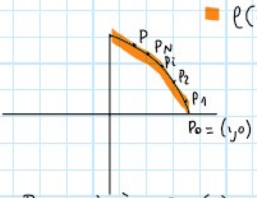
Limiti di funzioni trigonometriche



$S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$

$S^1 = \{(x,y)$ t.c. $x^2+y^2=1\} = \{z \in \mathbb{C}$ t.c. $|z|=1\}$

$\ell(P)$ = lunghetta dell'arco tra $(1,0)$ e P



■ $\ell(P) = x$ $\quad \ell(P) = \sup\limits_{\{P_i\}_i} \sum_{i=1}^{N} |P_{i+1}-P_i|$

dato che $x \in [0,2\pi)$ $\exists!$ $P \in S^1$ t.c. $\ell(P)=x$

$\ell(P) = \ell(x_0,y_0)$ e definiamo

$\sin(x) = x_0$ e $\cos(x) = y_0$

Estemdiamo $\sin(x)$ e $\cos(x)$ a funzioni 2π-periodiche su $\mathbb{R}$ cioè $\sin(x) = \sin(x_0)$ con $x_0 \in [0,2\pi)$ t.c. $x = x_0 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

defimizione altermativa

$e^{ix}: \mathbb{R} \to S^1$ è omo di gruppi $\quad \cos(x) = \mathrm{Re}(e^{ix}) \quad \sin(x) = \mathrm{Im}(e^{ix})$ dove e^{ix} è omo di periodo minimo 2π con $\mathrm{Im}(e^{ix}) > 0$

$e^{ix} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{ix}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(ix)^k}{k!}$

sin e cos sono f. Contimue

$\sin(x+h) = \sin(x)\cos(h) + \sin(h)\cos(x) \to \sin(x)$ cioè $\lim\limits_{x\to \underset{0}{x_0}} f(x) = f(x_0) = f(0)$

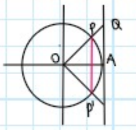
Limiti motevoli trigonometrici

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ cioè $\sin(x) = x + o(x)$ ← Taylor

dim

segue da $\boxed{\sin(x) \leq x \leq \tan(x)}$ disug. nota, divido per $\sin x \Rightarrow \frac{\sin(x)}{\sin(x)} \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$

$$\begin{tikzcd}
\frac{\sin(x)}{\sin(x)} \arrow[d] & \frac{x}{\sin x} \arrow[d] & \frac{1}{\cos x} \arrow[d, "x\to 0"] \\
1 & 1 & 1
\end{tikzcd}$$



dim la disuguaglianza

$\sin x \leq x$

$PP' = 2\sin(x)$ e $\overset{\frown}{PP'} = 2x$, per regole di geometria arco > segmento $\Rightarrow \sin x \leq x$

$\tan x \geq x$

$\text{Area}(OQA) = \underset{\text{base}}{\frac{1}{2} \cdot 1} \cdot \underset{h}{\tan(x)}$

$A(OAP) = \frac{\overset{\frown}{AP} \cdot A(\text{cerchio})}{\text{lung (circonf)}}$

Area OAP $\leq$ Area(OQA)

Area settore (OAP) : Area cerchio = $\overset{\frown}{AP}$: lungh. circonferenza $\Rightarrow$ Area settore OAP $= \frac{\pi \cdot x}{2\pi} = \frac{x}{2} \leq \frac{\tan x}{2} \Rightarrow x \leq \tan x$

Area cerchio πr^2 ma $r^2 = 1$, 2π = lungh. circonf., $\overset{\frown}{AP} = x = \frac{1}{2}\overset{\frown}{PP'} = \frac{1}{2} 2x = x$

conseguenze

- $\tan(x) \sim x + o(x)$ $\quad \lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

- $1-\cos(x) \sim \frac{1}{2}x^2 + o(x)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Limiti con exp.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \longrightarrow +\infty$ perchè $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \geq 1 + n^2\frac{1}{n} = 1+n \to +\infty$ ← Bernoulli $(1+x)^\alpha \geq 1+\alpha x$

alternativamente $\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^n \geq \left(1+n\frac{1}{n}\right)^n = 2^n \longrightarrow +\infty$

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n \longrightarrow 1$ perchè $1 \leq \left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}} < (e)^{\frac{1}{n}}$

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[d] & \left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}} \arrow[d, dashed, "\text{carab}"] & (e)^{\frac{1}{n}} \arrow[d, "n\to+\infty"] \\
1 & 1 & 1
\end{tikzcd}$$

- * $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \to e$ come funzione reale con parte principale già vista

- Sia $t \in \mathbb{R}$ fissato $\left(1+\frac{t}{n}\right)^n \overset{\text{def fmit.}}{=} \left[\left(1+\frac{t}{n}\right)^{n/t}\right]^t$

Se $t>0$ $\left(1+\frac{t}{n}\right)^{n/t} \longrightarrow e$ perchè uso $\boxed{*}$ con $x=\frac{n}{t}$, $\varphi(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \varphi\left(\frac{n}{t}\right)=\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=e$ perchè $x \to x^t$ e' continua su $(0,+\infty)$ e uso comp. di f. continue

Quindi $\left(1+\frac{t}{n}\right)^n \longrightarrow e^t$

Se $t<0$

$\left(1+\frac{t}{n}\right)^n = \left[\left(1+\frac{t}{n}\right)^{\frac{n}{t}}\right]^t$ $\quad \varphi\left(\frac{n}{t}\right) \overset{\overset{x=n/t}{\downarrow}}{=} \varphi(x)$

$\lim_n \left(1+\frac{t}{n}\right)^{n/t} = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^x$ pongo $k=-x-1 \Rightarrow x=-k-1$ $\quad x\to-\infty \Rightarrow k\to+\infty \Rightarrow \lim_{k\to+\infty}\left(\frac{-k}{-k-1}\right)^{-k-1} \overset{\text{inverso } t = = t}{=} \lim_{k\to+\infty}\left(\frac{k+1}{k}\right)^{k+1} =$

$= \lim_{k\to+\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\left(1+\frac{1}{k}\right) = e \cdot 1 = e$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\varphi(n/t) = \lim_{x\to-\infty}\varphi(x) = e$. Quindi $\left(1+\frac{t}{n}\right)^n \to e^t$ perchè $y \to y^t$ è continua su $(-\infty, 0)$

Definizione e proprietà di exp

$\exp = e^x : \mathbb{R} \to (0,+\infty)$

1 $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$

2 $e^x \geq 1+x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

3 $e^x \leq \frac{1}{1-x} \quad \forall x < 1$

4 e^x e' strett. crescente $\Rightarrow$ inj

5 $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

6 e^x è continua $[\Rightarrow$ surg. su $(0,+\infty)]$

7 e^x è L-lip. su $(-\infty, a]$ $\forall a \in \mathbb{R}$ con $L = e^a$

8 $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1 \Rightarrow e^x = 1+x+o(x)$ per $x\to 0$

dim

1) prop. potenze

2) segue da $\left(1+\frac{t}{n}\right)^n \to e^t$. Infatti $\left(1+\frac{t}{n}\right)^n \overset{\text{Bernoulli} \to \text{vale } \forall n \geq -1}{\textcircled{\geq}} \left(1+n\frac{t}{n}\right) = 1+t \Rightarrow e^x \geq 1+x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

3) metto ora $-t \Rightarrow e^{-t} \geq 1-t \Rightarrow \frac{1}{e^{-t}} \leq \frac{1}{1-t} \Rightarrow e^t \leq \frac{1}{1-t} \Rightarrow e^x \leq \frac{1}{1-x} \quad \forall x<1$

passo ai reciproci ma per farlo $1-t>0 \Leftrightarrow -t>-1 \Leftrightarrow t<1$

4) Se $x > x_0 \Rightarrow e^x - e^{x_0} = e^{x_0}\left(e^{x-x_0}-1\right) > 0 \Rightarrow e^x$ è crescente

8+6) se $\underset{\overset{\downarrow h\to 0}{0}}{h} \overset{②}{\leq} \underset{\overset{\vdots}{0}}{e^h - 1} \overset{③}{\leq} \underset{\overset{\downarrow}{0}}{\frac{1}{1-h} - 1} \Rightarrow \lim_{h\to 0} e^h - 1 = 0$

⑥ $\Rightarrow \lim_{x\to x_0} e^x - e^{x_0} = \lim_{x\to x_0} e^{x_0}\left(\underset{\overset{\downarrow}{0}}{\underbrace{e^{x-x_0}-1}}\right) = 0 \Rightarrow e^x$ è continua cioè $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

⑧ $h \leq e^h - 1 \leq \frac{1}{1-h} - 1 = \frac{h}{1-h}$ con $|h|<1$

sottraggo h

$0 \leq \underbrace{e^h - 1 - h}_{\omega(h)} \leq \frac{h}{1-h} - h = \frac{h^2}{1-h} \Rightarrow e^h = 1 + h + \underset{\overset{\shortparallel}{o(h)}}{\omega(h)}$ per $h \to 0$

divido per h

infatti $\underset{\overset{\downarrow}{0}}{0} \leq \underset{\overset{\vdots}{0}}{\frac{\omega(h)}{h}} \leq \underset{\overset{\downarrow}{0}}{\frac{h^{\cancel{2}}}{1-h} \cdot \frac{1}{\cancel{h}}}$ per $h\to 0$

$\Rightarrow e^h = 1 + h + o(h)$

$\Rightarrow e^h - 1 = h + o(h)$

$\Rightarrow \frac{e^h-1}{h} = 1 + \underset{\overset{\downarrow}{0}}{\frac{o(h)}{h}} \longrightarrow 1$

Definizione di log + proprietà

$\log : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ è l'inversa di exp.

1 strett. crescente

2 continua

3 è L-lip su $[\delta, +\infty)$ con $L = \frac{1}{\delta}$

4 $\log(1) = 0 \quad \log(t) > 0 \Leftrightarrow t > 1$

5 $\log(t \cdot s) = \log(t) + \log(s)$, $\log\left(\frac{t}{s}\right) = \log(t) - \log(s)$

$\log(t^s) = s\log(t)$, $-\log(t) = \log(t^{-1}) = \log\left(\frac{1}{t}\right)$

6 $\log(t) \leq t-1 \quad \forall t > 0$

7 $e^{x\log a} = a^x = \exp_a(x)$

8 $\log(1+\alpha) \leq \alpha \quad \forall \alpha > -1$

9 $\lim_{x\to+\infty} \log(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to 0^+}\log(x) = -\infty$

10 $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1 \Rightarrow \log(1+x) = x + o(x)$ per $x\to 0$

dim

1) è strett. crescente perchè inversa di una f. strett. crescente

2) idem continua

3) Se $x, y \in [\delta, +\infty)$ s.p.g. $x < y$ $\Rightarrow 0 < \log(y) - \log(x) \overset{\text{prop. log}}{=} \log\left(\frac{y}{x}\right) \overset{\text{add +1 e -1}}{=} \log\left(1 + \overbrace{\frac{y}{x} - 1}^{\alpha}\right) \overset{\log(1+\alpha) \le \alpha}{\le} \frac{y}{x} - 1 = \frac{y-x}{x} \overset{x > \delta \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{\delta}}{\le} \frac{1}{\delta}(y-x)$

$\Rightarrow |\log(y) - \log(x)| \le \frac{1}{\delta}|y-x| \quad \forall x, y \in [\delta, +\infty)$

5) $\underbrace{t = e^x \quad s = e^y}_{\Downarrow}$ $t.s = e^{x+y} = e^x . e^y \Rightarrow \log(e^{x+y}) = \log(e^x e^y) = \log(t.s)$

$x = \log(t) \quad y = \log(s) \Rightarrow \log t + \log s = x + y = \log(t.s)$

6) Io so che $e^x \ge 1 + x$ $\quad t = e^x \quad x = \log t \Rightarrow t \ge 1 + \log t \Rightarrow \log(t) \le t - 1$

8) $-\log(1+\alpha) = \log\left(\frac{1}{1+\alpha}\right) = \log\left(1 + \frac{1}{1+\alpha} - 1\right) = \log\left(\underbrace{1 - \frac{\alpha}{\alpha+1}}_{\log(t)}\right) \underset{\le}{\le} \underbrace{1 - \frac{\alpha}{\alpha+1} - 1}_{t-1} = \frac{-\alpha}{\alpha+1}$

Unendo 8 + 6 ho che

$$\frac{\alpha}{1+\alpha} \underset{a}{\le} \log(1+\alpha) \le \cancel{1} + \alpha - \cancel{1} = \alpha$$

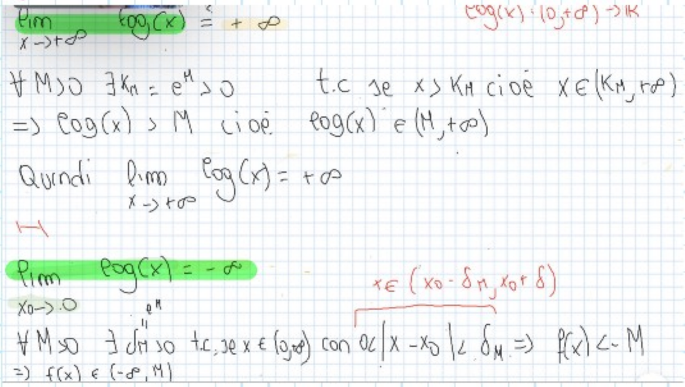
10) (i) $\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$ (ii) $\log(1+x) = x + o(x)$ per $x \to 0$

So che $\frac{x}{1+x} \le \log(1+x) \le x$ sottraggo x $\Rightarrow \frac{x}{1+x} - x \le \log(1+x) - x \le x - x = 0 \Rightarrow \frac{-x^2}{1+x} \le \underbrace{\log(1+x) - x}_{w(x)} \le 0 \quad \forall x > -1$

$\log(1+x) = x + w(x) = x + o(x)$ per $x \to 0$ (ii)

$\Rightarrow \frac{\log(1+x)}{x} = 1 + \frac{o(x)}{x} \longrightarrow 1$ per $x \to 0$

9)



$\lim_{x \to +\infty} \log(x) = +\infty$ $\qquad \log(x) : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$

$\forall M > 0 \; \exists K_M = e^M > 0$ t.c se $x > K_M$ cioè $x \in (K_M, +\infty)$

$\Rightarrow \log(x) > M$ cioè $\log(x) \in (M, +\infty)$

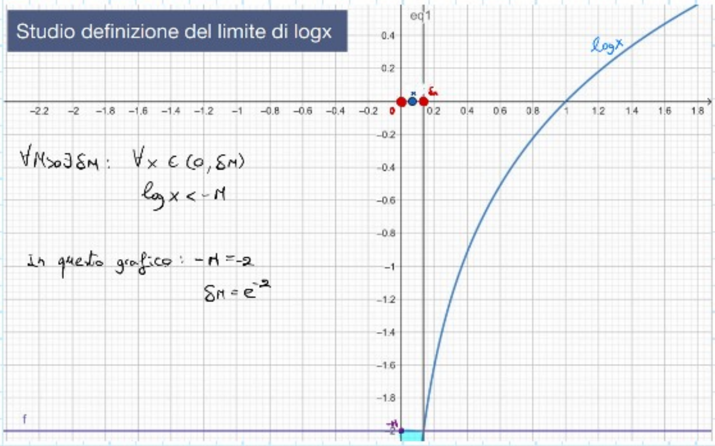
Quindi $\lim_{x \to +\infty} \log(x) = +\infty$

$\lim_{x_0 \to 0} \log(x) = -\infty$

$\forall M > 0 \; \exists \overset{e^M}{\overset{\shortparallel}{\delta_M}} > 0$ t.c. se $x \in (0, +\infty)$ con $\overbrace{0 < |x - x_0| < \delta_M}^{x \in (x_0 - \delta_M, x_0 + \delta)} \Rightarrow f(x) < -M$

$\Rightarrow f(x) \in (-\infty, M)$

graficamente



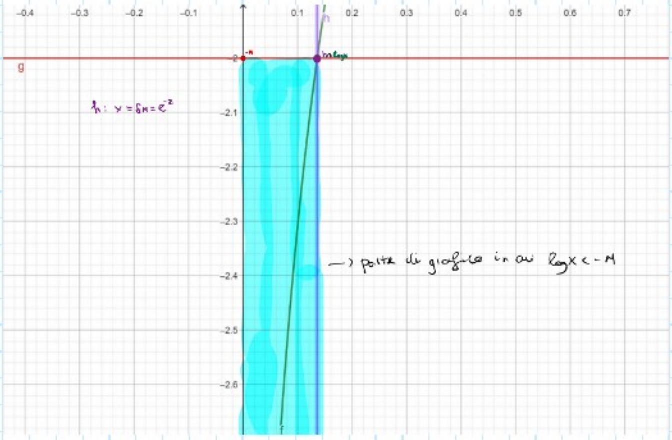
Studio definizione del limite di logx

$\forall M > 0 \; \exists \delta_M : \; \forall x \in (0, \delta_M)$

$\log x < -M$

In questo grafico: $-M = -2$

$\delta_M = e^{-2}$



$h: x = \delta_M = e^{-2}$

$\longrightarrow$ parte di grafico in cui $\log x < -M$

$\frac{x}{1+x} \le \log(1+x) \le x$

$e^x \le \frac{1}{1-x} \ \forall x < 1$ e $e^x \ge 1+x \ \forall x \in \mathbb{R}$

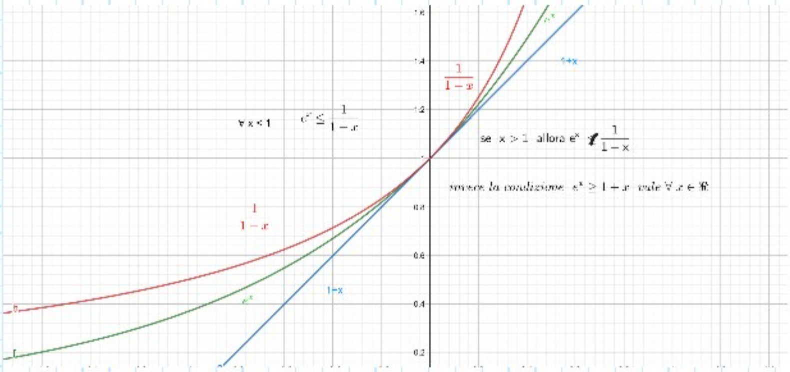
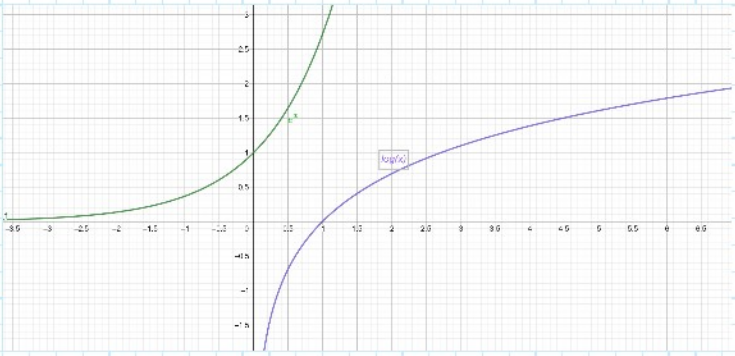


grafico di e^x e di $\log(x)$



Limiti com logaritmi ed exp.

- $\lim_{t \to +\infty} t^{\alpha} e^{-t} = \begin{cases} \text{se } \alpha \le 0 & \lim_{t \to +\infty} \frac{e^{-t}}{t^{\alpha}} = \frac{0}{\infty} = 0 \\ \text{se } \alpha > 0 & \lim_{t \to +\infty} \left(t\, e^{-t/\alpha}\right)^{\alpha} = 0 \end{cases}$

- $\lim_{x \to 0} x \log x \underset{\downarrow}{=} \lim_{t \to +\infty} -e^{-t}\, t = 0$

  $t = -\log(x) \Rightarrow x = e^{-t}$

$\boxed{a^x = e^{\log a^x} = e^{x \cdot \log a}}$ e^{CANE}

$a > 0 \quad a \ne 1$

- $\log_a x = \frac{\log(x)}{\log a}$ perchè $a \cdot \frac{\log x}{\log a} = e^{\left(\frac{\log x}{\log a}\right) \log a} = e^{\log x} = x$ cambio di var.

- $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{x \log a} - 1}{x \log a} \cdot \log a = \log a$

- $\lim_{x \to 0} \frac{\log_a (1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\log(1+x)}{\log a}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} \cdot \frac{1}{\log a} = \frac{1}{\log a}$

- $\lim_{x \to 0} x^x = \lim_{x \to 0} e^{\overbrace{x \log x}^{0}} = 1$

- $\lim_{x \to 0} \frac{x^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{x \log(x)} - 1}{x \log x} \log(x) = -\infty$

- $\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{\alpha} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{\alpha \log(1+x)} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{\alpha \log(1+x)} - 1}{\alpha \log(1+x)} \cdot \frac{\alpha \log(1+x)}{x} \to \alpha$

- $\lim_{x \to 0} x^{\alpha} \log(x) = 0 \quad \forall \alpha > 0$

caso $x > 0$ $\Rightarrow x^{\alpha} \log(x) = \frac{1}{\alpha} x^{\alpha} \log x^{\alpha}$ pongo $x^{\alpha} = y \xrightarrow{\alpha > 0} 0 \Rightarrow \lim_{y \to 0} \frac{1}{\alpha} \overbrace{y \log y}^{0} = 0$

caso $x < 0$ $\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} x^{-\alpha} \log x = 0 \quad \forall \alpha > 0 \Rightarrow y = \frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{y \to 0} -y^{\alpha} \log y = 0$

Limite dx e sx

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \Big|_{E \cap (x_0, +\infty)}$$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \Big|_{E \cap (-\infty, x_0)}$$

Osservazione

Se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0^{\pm}} f(x) = \ell$

Non vale $\Leftarrow$

Esempio $f(x) = \mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$ $\nexists \lim_{x \to 0} f(x)$ [f non è continua in x=0] $\exists \lim_{x \to 0^+} f = 1$ e $\exists \lim_{x \to 0^-} f = -1$

Osservazione

$\lim_{x \to x_0^+} f = \ell \iff \forall V$ int di ℓ $\exists \varepsilon > 0$ t.c $f(x) \in V \quad \forall x \in (x_0, \overset{\hookrightarrow \text{int dx di } x_0}{x_0 + \varepsilon})$

$\lim_{x \to x_0^-} f = \ell \iff \forall V$ int di ℓ $\exists \varepsilon > 0$ t.c. $f(x) \in V \quad \forall x \in (\overset{\hookrightarrow \text{int sx di } x_0}{x_0 - \varepsilon, x_0})$

Proposizione

Se $\exists \lim_{x \to x_0^{\pm}} f(x) = e^{\pm}$ con $e^+ = e^- \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} f(x)$

dim

Sia $\ell = e^+ = e^-$ per def.

$\forall V$ int di ℓ $\exists \varepsilon^{\pm}$ t.c. $f(x) \in V \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon^-, x_0)$

e $\forall x \in (x_0, x_0 + \varepsilon^+) \Rightarrow f(x) \in V \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}$

dove $\varepsilon = \min(\varepsilon^-, \varepsilon^+)$

Proposizione

$f : E \to \mathbb{R}$ monotona cioè $\begin{cases} x \le y \Rightarrow f(x) \le f(y) & \text{cresc.} \\ x \le y \Rightarrow f(x) \ge f(y) & \text{decresc.} \end{cases}$

Allora $\forall x_0$ deve essere p.to di accumulazione

cioè $\exists \lim_{x \to x_0^{\pm}} f(x) = f(x_0^{\pm})$ e

f crescente $\Rightarrow f(x_0^+) \ge f(x_0^-)$

f decrescente $\Rightarrow f(x_0^+) \le f(x_0^-)$

dim

$E \cap (-\infty, x_0)$ e x_0 p.to di accum. $\Rightarrow x_0 = \sup(E \cap (-\infty, x_0))$

- se f è crescente $\exists \lim_{x \to x_0} f \Big|_{E \cap (-\infty, x_0)} = \lim_{x \to x_0^-} f = \sup_{x \in E \cap (-\infty, x_0)} f(x)$

- se f è decrescente $\exists \lim_{x \to x_0} f \Big|_{E \cap (-\infty, x_0)} = \lim_{x \to x_0^-} f = \inf_{x \in E \cap (-\infty, x_0)} (f(x))$

idem se ho $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$

$E \cap (x_0, +\infty)$ e x_0 p.to di accum. di $E \cap (x_0, +\infty) \Rightarrow x_0 = \inf(E \cap (x_0, +\infty))$

se f è crescente $\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} f \Big|_{(x_0, +\infty)} = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf_{x \in E \cap (x_0, +\infty)} f(x)$

se f è decrescente $\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} f \Big|_{(x_0, +\infty)} = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \sup_{x \in E \cap (x_0, +\infty)} f(x)$

DISCONTINUITA' DI f

$f : E \to \mathbb{R}$

disc(f) $= \{ x \in E$ t.c. f non e' continua in $x \}$

Sia $x \in \mathrm{disc}(f)$. Allora:

1. f ha una **discontinuità eliminabile** se
   $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ $\quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$

2. f ha una **discontinuità a salto (I specie)** se
   $\exists \lim_{x \to x_0^\pm} f(x) = \ell^\pm$ ma $\ell^+ \neq \ell^-$ $\quad f(x) = \mathrm{sgn}(x)$

3. f ha una **discontinuità di II specie** se
   $\exists \lim_{x \to x_0^\pm} f = \ell^\pm \in \overline{\mathbb{R}}$, $\ell^+ \neq \ell^-$ e almeno uno dei due e' $\pm\infty$
   $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$ e $\lim_{x \to x_0^\pm} f(x) = \pm\infty$

4. f ha una **discontinuità di III specie** se
   $\nexists \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ o $\nexists \lim_{x \to x_0^-} f(x)$ $\quad f(x) = \chi_{\mathbb{Q}} = \begin{cases} 1 \text{ se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$
   $\downarrow$
   f. di Dirichlet

Nota:
Le f. monotone hanno solo disc. a salto.

Proposizione

f monotona $\Rightarrow \mathrm{disc}(f)$ e' numerabile

dim

Sia f crescente $f : E \to \mathbb{R}$ e siano $x_1 < x_2$ $x_1, x_2 \in E$

$\Rightarrow \sum [f(x^+) - f(x^-)] \leq f(x_2) - f(x_1) < +\infty$

$x \in \mathrm{disc}(f) \cap [x_1, x_2] \Rightarrow \mathrm{disc}(f) \cap [x_1, x_2]$ e' numerabile

Ho usato il fatto che $\sum_{i \in I} a_i < +\infty$

$a_i > 0 \quad \forall i \in I$

I e' finito o numerabile $\quad I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$

$I_n = \{ i \text{ t.c. } a_i \geq \frac{1}{n} \}$ e $I_n \subseteq I_{n+1}$

$\frac{1}{n} |I_n| \leq \sum_{i \in I_n} a_i \leq \sum_{i \in I} a_i < +\infty \Rightarrow |I_n| < +\infty \quad \forall n$

$\Rightarrow I$ e' numerabile.

Limsup e Liminf

$f: E \to \mathbb{R}$, x_0 p.to di accum. di E.

f ha limite superiore in x_0 cioè $\limsup_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$

se:
- $\ell = -\infty \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$
- $\ell = +\infty \Rightarrow \exists\, x_n \to x_0$ t.c. $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = +\infty$
- $\ell \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists\, x_n \to x_0$ t.c. $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell$

$\forall \varepsilon\ \exists\ U$ int di x_0 t.c. $f(x) < \ell + \varepsilon\ \ \forall x \in U$

$\liminf_{x \to x_0} f(x) = \ell$

se:
- $\ell = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$
- $\ell = -\infty \Rightarrow \exists\, x_n \to x_0$ t.c. $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = -\infty$
- $\ell \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists\, x_n \to x_0$ t.c. $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell$

$\forall \varepsilon\ \exists\ U$ int di x_0 t.c. $f(x) > \ell - \varepsilon\ \ \forall x \in U$

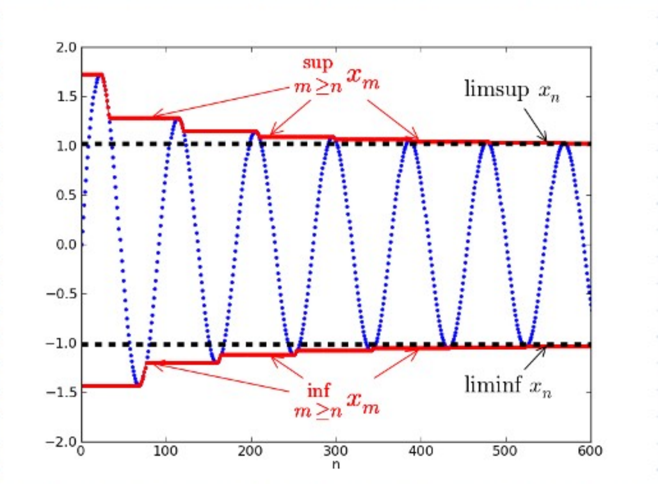
Relazioni

- Liminf e Lim sup $\exists$ sempre.

- $\limsup_{x \to x_0}(f) = \inf_{U \text{ int di } x_0} \left(\sup_{x \in U \setminus \{x_0\}} (f) \right) \geq \sup_{U \text{ int di } x_0} \left(\inf_{x \in U \setminus \{x_0\}} (f) \right) = \liminf_{x \to x_0}$

- f ha limite in $x_0 \Leftrightarrow \liminf(f) = \limsup(f)$

- $\limsup(f+g) \leq \limsup(f) + \limsup(g)$
- $\liminf(f+g) \geq \liminf(f) + \liminf(g)$
- $\limsup(-f) = -\liminf(f)$



$a_n = (-1)^n \qquad b_n = (-1)^{n+1}$

$\limsup(a_n) = \limsup(b_n) = 1$

$\liminf(a_n) = \liminf(b_n) = -1$

$\limsup > \liminf$

$a_n + b_n = 0 \Rightarrow 0 = \limsup(a_n + b_n) < \limsup a_n + \limsup b_n = 2$

Oscillazione di f

$f: E \to \mathbb{R} \quad x_0 \in E$

$$\text{osc}(f)(x_0) = \begin{cases} 0 & \text{se } x_0 \text{ è p.to isolato} \\ \limsup_{x \to x_0}(f) - \liminf_{x \to x_0}(f) \geq 0 & \text{se } x_0 \text{ è p.to di accumul.} \end{cases}$$

Oss.

$\text{osc}(f)(x_0) > 0 \Leftrightarrow x_0 \in \text{disc}(f)$

$\text{disc}(f) = \bigcup_n E_n$ dove $\underset{\substack{\downarrow \\ \text{chiuso}}}{E_n} = \{x \in \text{disc}(f) \text{ t.c. } \text{osc}(f)(x) \geq \frac{1}{n}\}$

Proposizione

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \Rightarrow \limsup(f+g) = \ell + \limsup g(x)$

dim

Se $\limsup_{x \to x_0}(g(x)) = m \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists\ x_n \to x_0$ t.c. $g(x_n) \to m$ e $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ U$ int di x_0 t.c. $g(x) < m + \frac{\varepsilon}{2}\ \forall x \in U$

Per hp $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} (f(x_n) + g(x_n)) = \ell + m$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ V$ int di x_0 t.c. $|f(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall x \in V \Rightarrow f(x) < \ell + \frac{\varepsilon}{2}$

Se $x \in U \cap V \Rightarrow f(x) + g(x) < \ell + \frac{\varepsilon}{2} + m + \frac{\varepsilon}{2} = \ell + m + \varepsilon \Rightarrow \limsup(f+g) = \ell + m$.

Proposizione

Se $\limsup_{x \to x_0} (f(x)) = \ell \in \mathbb{R}$ e $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é cont. in ℓ e strett. cresc.

Allora $\limsup_{x \to x_0} [\varphi \circ f(x)] = \varphi(\ell)$

dim.

Dato $\limsup_{x \to x_0} f(x) = \ell \overset{\text{def limsup}}{\Rightarrow} \exists x_n \to x_0$ t.c. $f(x_n) \to \ell \overset{\varphi \text{ continua.}}{\Rightarrow} \varphi(f(x_n)) \to \varphi(\ell)$

Verifico che $\forall \varepsilon > 0 \; \exists U$ int di x_0 t.c. $\overset{\text{def limsup}}{\varphi(f(x)) < \varphi(\ell) + \varepsilon} \; \forall x \in U \setminus \{x_0\}$

fisso $\varepsilon > 0$ per cui $\exists \delta > 0$ t.c. $|y - \ell| < \delta \Rightarrow |\varphi(y) - \varphi(\ell)| < \varepsilon \Rightarrow \varphi(y) < \varphi(\ell) + \varepsilon$
$\forall y \in B_\delta(\ell)$ $\quad$ continua + monotona

Dato $\delta > 0 \; \exists U$ int di x_0 t.c. $\overset{\limsup f(x) = \ell}{f(x) < \ell + \delta/2} \; \forall x \in U \setminus \{x_0\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{\varphi(f(x)) < \varphi(\ell + \delta/2)}_{\text{monotonia di } \varphi} \underbrace{<}_{\ell + \delta/2 \in B_\delta(\ell)} \varphi(\ell) + \varepsilon$

Esempi

$f(x) = \sin(x) \cdot \arctan(x)$ per $x \to +\infty$

$\nexists \lim \sin x$ ma $\lim_{x \to +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$

$\limsup_{x \to +\infty} (\sin(x)) = 1 \qquad \liminf_{x \to +\infty} (\sin(x)) = -1$

$\Rightarrow \liminf f(x) = (-1)\frac{\pi}{2} = -\pi/2$

$\limsup f(x) = 1 \cdot \pi/2 = \pi/2$

$\mapsto$

$f(x) = \cos x \cdot \sin^2(\frac{1}{x}) \quad x \to 0^+$

$\liminf_{x \to 0^+} (f(x)) = 0$ perché $\cos x \xrightarrow[x \to 0^+]{} 1$ $\quad \liminf \sin^2(\frac{1}{x}) = 0$
non -1 perché è $\sin^2$

$\limsup_{x \to 0^+} (f(x)) = 1$ " " $\limsup \sin^2(x) = 1$

$\mapsto$

$f(x) = \sin x \cos^2(\frac{1}{x})$ per $x \to 0^+$

$\liminf f(x) = 0 \qquad \limsup(f(x)) = 0 \Rightarrow \exists$ il limite $f(x)$?

si perché $\lim_{x \to 0^+} |f(x)| \le \lim_{x \to 0^+} |\sin x|$

$\mapsto$

$f(x) = \sin x \cos^2(\frac{1}{x})$ per $x \to -\infty$

$\limsup f(x) = 1. \qquad \liminf f(x) = -1.$

altra disuguaglianza

$a_n > 0$ $\quad$ dim 1

$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n}$ 🟥 $\le \liminf \sqrt[n]{a_n}$ 🟦 $\le \limsup \sqrt[n]{a_n}$ 🟩 $\le \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$

🟦 gratis deriva dalle proprietà di liminf e lim sup cioè $\liminf a_n \le \limsup a_n$

caso 1 $\to \exists \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \Rightarrow \liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} = \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \underset{\text{criterio rapp. - radice}}{=} \liminf \sqrt[n]{a_n} = \limsup \sqrt[n]{a_n}$ (diventano uguaglianze)

caso 2 $\to \nexists \lim (\frac{a_{n+1}}{a_n})$

Chiamo $\alpha_n = \log(a_n) \Rightarrow \log\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \alpha_{n+1} - \alpha_n$ e $\log(\sqrt[n]{a_n}) = \frac{1}{n} \alpha_n$

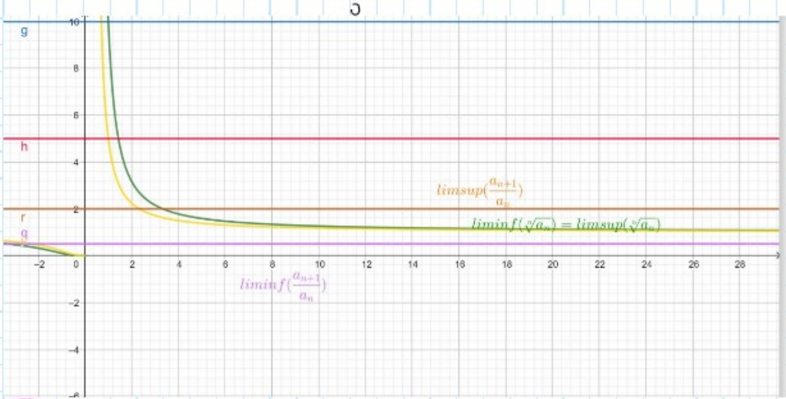
🟩 Ora $\frac{1}{n} \alpha_n = \frac{1}{n} \alpha_0 + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_{k+1} - \alpha_k)$

USO → $\limsup(f+g) \leq \limsup f + \limsup g$

$\Rightarrow \underset{\log \sqrt[n]{a_n}}{\overset{\shortparallel}{\limsup\left(\frac{1}{n}\alpha_n\right)}} \leq \limsup\left(\underset{\downarrow\,0}{\frac{\alpha_0}{n}}\right) + \underbrace{\limsup(\alpha_{n+1}-\alpha_n)}_{\text{somma Cesaro}} \overset{=\log\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)}{\shortparallel} \limsup \sum_{k=0}^{n-1}(\alpha_{k+1}-\alpha_k)$ vale per $\alpha_n \Rightarrow$ Tesi

🟥 Nelle stesse hp. uso ora $\liminf(f+g) \geq \liminf(f) + \liminf(g) \Rightarrow$

$\liminf\left(\frac{1}{n}\alpha_n\right) \geq \liminf\left(\underset{\downarrow\,0}{\frac{\alpha_0}{n}}\right) + \liminf(\alpha_{n+1}-\alpha_n)$



dim 2 con Cesaro - Stoltz

Se $\exists \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \Rightarrow \exists \lim \sqrt[n]{a_n} = \ell$ per rapp-radice

Se $\nexists \lim \Rightarrow \alpha_n = \log a_n \Rightarrow \begin{cases} \log \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{n}\alpha_n \\ \log \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha_{n+1} - \alpha_n \end{cases}$

Hp di Cesaro - Stoltz

Teorema di Stolz-Cesaro

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

In matematica, il **teorema di Stolz-Cesaro**, il cui nome è dovuto a Otto Stolz e Ernesto Cesaro, è un criterio per dimostrare la convergenza di una successione.

Siano $(a_n)_{n\geq1}$ e $(b_n)_{n\geq1}$ due successioni di numeri reali. Se b_n è una successione positiva, strettamente crescente, illimitata, ed esiste il seguente limite:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=l$$

allora esiste anche il limite:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=l$$

La forma generale del teorema è la seguente[1]. Se $(a_n)_{n\geq1}$ e $(b_n)_{n\geq1}$ sono due successioni tali che b_n è monotona e non limitata, allora:

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}\leq\liminf_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}\leq\limsup_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}\leq\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$$

Il teorema di Stolz–Cesaro può essere considerato come una generalizzazione della somma di Cesaro, ma anche come una sorta di regola di de l'Hôpital per successioni, vedendo le differenze come approssimazioni delle derivate al primo ordine.

Ponendo $a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ e $b_n=n$ si ottiene la somma di Cesaro

sia $\underset{b_{n+1}-b_n = \cancel{n}+1-\cancel{n} = 1}{\overset{\shortparallel}{b_n}} = n \Rightarrow \liminf(\alpha_{n+1}-\alpha_n) \leq \liminf\left(\frac{\alpha_n}{n}\right) \leq \limsup \frac{\alpha_n}{n} \leq \limsup(\alpha_{n+1}-\alpha_n)$

dim ③ Gobbino usando definizione

$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n}$ 🟥 $\leq \liminf \sqrt[n]{a_n}$ 🟦 $\leq \limsup \sqrt[n]{a_n}$ 🟩 $\leq \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$

Siando def

🟦

🟩 Pongo $L = \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$

Fisso $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq L+\varepsilon \ \forall n \geq n_0 \Rightarrow a_{n+1} \leq (L+\varepsilon)a_n$

$\overset{\downarrow \text{induzione}}{\Rightarrow} a_n \leq a_{n_0}(L+\varepsilon)^{n-n_0} \ \forall n \geq n_0$ cioè $a_n \leq (L+\varepsilon)^n \cdot \frac{a_{n_0}}{(L+\varepsilon)^{n_0}}$

faccio la radice $\Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \leq (L+\varepsilon)\underbrace{\sqrt[n]{\frac{a_{n_0}}{(L+\varepsilon)^{n_0}}}}_{\to 1}$ perché $\sqrt[n]{\text{costante}} \to 1$

$\Rightarrow$ faccio il limsup $\Rightarrow \limsup \sqrt[n]{a_n} \leq (L+\varepsilon)$, essendo vera per ogni $\varepsilon \Rightarrow \limsup \sqrt[n]{a_n} \leq L$

🟥 analoga.

altra disuguaglianza

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) + \liminf_{x\to x_0} g(x) \le \limsup_{x\to x_0} [f(x)+g(x)]$$

dim

hint → uso $f(x) = [f(x)+g(x)] + (-g(x))$

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) \le \limsup_{x\to x_0} [f(x)+g(x)] + \underset{-\liminf_{x\to x_0}(g(x))}{\underset{\|}{\limsup_{x\to x_0}(-g(x))}} \Rightarrow \limsup(f) + \liminf(g) \le \limsup(f+g)$$

LA successione delle somme parziali Hn della serie armonica diverge

Parto dalla disuguaglianza nota: $\frac{x}{1+x} \le \log(1+x) \le x \quad \forall x > -1$

Chiamo $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ $\quad$ $H_1 = 1$, $H_2 = 1+\frac{1}{2}$, $H_3 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ ..... $\quad$ $H_n \uparrow$ $\quad$ H_n è la succ. delle somme parziali $\overset{\text{serie}}{\overset{\|}{\sum^{\infty}}}$ armonica

sostituisco $x = \frac{1}{k}$ e la disuguaglianza del log diventa $\frac{\frac{1}{k}}{1+\frac{1}{k}} \le \log(1+\frac{1}{k}) \le \frac{1}{k} \Rightarrow \frac{1}{k+1} \le \log(1+\frac{1}{k}) \le \frac{1}{k}$

A $\log(1+\frac{1}{k}) = \log(\frac{k+1}{k}) = \log(k+1) - \log(k)$

T $\sum_{k=1}^{n} \log(1+\frac{1}{k}) = \sum_{k=1}^{n} (\log(k+1) - \log(k)) = \log(n+1) - \log(1)$

↳ somma telescopica

Proposizione somma telescopica

$\sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1$ (si dim per induzione)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \ge \sum_{k=1}^{n} \log(1+\frac{1}{k}) = \sum \log(k+1) - \log(k) = \log(k+1) - \log(1) = \log(k+1)$$

Dunque $\ast$ $H_n \ge \underset{+\infty}{\underset{\downarrow}{\log(n+1)}} \xrightarrow{n\to+\infty}$ $\Rightarrow H_n \to +\infty$ $\quad$ cioè $H_n \uparrow$ diverge

Proposizione → scrivere Hn in termini di log + γ

$\exists\ \gamma \in (0,1)$ t.c. $H_n = \log(n) + \gamma + o(1)$ per $n \to +\infty$

dim

Definisco $\gamma_n \doteq H_n - \log(n)$ $\quad$ $H_{n+1} - H_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{k+1}$

$\gamma_{n+1} < \gamma_n \iff \gamma_{n+1} - \gamma_n < 0 \iff \overbrace{H_{n+1} - \log(n+1)}^{\gamma_{n+1}} - (\overbrace{H_n - \log(n)}^{\gamma_n}) < 0 \Rightarrow \frac{1}{n+1} - \log(n+1) + \log n < 0 \iff \frac{1}{n+1} < \log(n+1) - \log n$

$\iff \frac{1}{n+1} \le \log(\frac{n+1}{n}) = \log(1+\frac{1}{n})$ $\quad$ vera per le disug. del log.

Quindi :
- γ_n è decrescente $\Rightarrow \gamma_n \le \gamma_1 = 1$
- γ_n è positiva $\Rightarrow \gamma_n = H_n - \log n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n \underset{\ast\ H_n \ge \log(n+1)}{\ge} \log(n+1) - \log n \overset{\text{log crescente}}{>} 0$

Verifichiamo ora che $\gamma = \inf_{n\in\mathbb{N}} \gamma_n > 0$

STEP 1 ↦ Pongo $\beta_n = H_n - \log(n+1)$

STEP 2 ↦ β_n è crescente

STEP 3 ↦ $\beta_n < \gamma_n \ \forall n$

STEP 4 ↦ $\lim_{n\to+\infty} \beta_n = \lim_{n\to+\infty} \gamma_n$

STEP 5 ↦ $\beta_1 = 1 - \log 2 > 0$

dim

STEP 1 ↦ $\beta_n \doteq H_n - \log(n+1)$

STEP 2 ↦ $\beta_{n+1} > \beta_n \Rightarrow H_{n+1} - \log(n+2) > H_n - \log(n+1) \Rightarrow \overbrace{H_{n+1} - H_n}^{\frac{1}{n+1}} > \log(n+2) - \log(n+1) \overset{\text{log crescente}}{>} 0 \Rightarrow \frac{1}{n+1} > \log(\frac{\overset{1+1}{\overset{\|}{n+2}}}{n+1}) = \log(1+\frac{1}{n+1})$

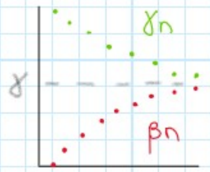
cioè $x > \log(1+x)$ vera per stime log

STEP 3 ↦ $\beta_n < \gamma_n \Rightarrow \cancel{H_n} - \log(n+1) < \cancel{H_n} - \log(n) \Rightarrow \log(n+1) - \log(n) \overset{\text{log crescente}}{>} 0$ vera

STEP 4 $\mapsto$ $\lim_{n\to+\infty} \beta_n = \lim_{n\to+\infty} \gamma_n$ → vero

$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \cancel{H_n} - \lim_{n\to+\infty} \underset{-\infty}{\underset{\downarrow}{\log(n+1)}} = \cancel{\lim_{n\to+\infty} H_n} - \lim_{n\to+\infty} \underset{-\infty}{\underset{\downarrow}{\log n}}$

STEP 5 $\mapsto$ $\beta_1 = H_1 - \log(1+1) = \frac{1}{1} - \log(2) = \underbrace{1-\log(2)}_{=\inf(\beta_n)} > 0$ perchè β_n è crescente step 2



Unendo 5+3 ho che $\inf(\beta_n) = \beta_1 > 0 \cup \beta_n < \gamma_n \Rightarrow \gamma = \inf \gamma_n > \beta_1 > 0$

$\gamma \equiv$ costante di Eulero-Mascheroni

La costante di Eulero-Mascheroni è una costante matematica, definita come limite della differenza tra la serie armonica troncata e il logaritmo naturale

APPLICAZIONI

$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = H_{2n} - H_n = \log(2n) + \gamma + o(1) - \log(n) \cancel{\gamma} - o(1) = \log\left(\frac{2n}{n}\right) + o(1) = \log 2 + o(1)$ per $n \to +\infty$

SOMME TELESCOPICHE

Sia $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ succ. $\sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1$ $\quad \cancel{a_2} - a_1 + \cancel{a_3} - \cancel{a_2} + \cancel{a_4} - \cancel{a_3} - \cancel{\ldots} - a_{n+1}$

dim

P.B $n=1$ $\mapsto$ $a_2 - a_1 = a_2 - a_1$ ok ☺

P.I $P(n-1) \Rightarrow P(n)$ $\mapsto$ $\sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)}_{\text{= hp. induttiva } a_n - a_1} + a_{n+1} - a_n \Rightarrow \cancel{a_n} - a_1 + a_{n+1} - \cancel{a_n} = a_{n+1} - a_1$

APPLICAZIONI

somma di mengoli $\mapsto$ $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \underset{k=h+1}{=} 1 + \sum_{h=1}^{n-1} \frac{1}{(h+1)^2} \le 1 + \sum_{h=1}^{n-1} \frac{1}{h(h+1)} \le 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \le 2$ e $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi^2}{6}$

PROPOSIZIONE

$\exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ t.c. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = 2\sqrt{n} + \alpha + o(1)$ per $n \to +\infty$

dim

$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$ $\quad a_1 = -1$ $\quad \sum \frac{1}{\sqrt{k}} - \sum \frac{1}{\sqrt{k+1}}$

a_n è decrescente $\Rightarrow a_n - a_{n+1} = -\frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ razionalizzo $\Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = -\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

vale ↷

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \le \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \le \frac{1}{\sqrt{n}}$$

aggiungo $-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ $= \underbrace{\boxed{\frac{1}{\sqrt{n+1}}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}}_{=0} \le \underbrace{\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}}_{\wedge} \le \boxed{\frac{1}{\sqrt{n}}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

$0 \le a_n - a_{n+1} \le \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \Rightarrow 0 \le a_n - a_{n+1} \Rightarrow a_{n+1} \le a_n \Rightarrow a_n$ decrescente

sost. k al posto di n e cambio verso dell'ultima diseq.

$-a_n + a_{n+1} \ge -\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \Rightarrow -a_k + a_{k+1} \ge -\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}$

a_n è inferiormente limitata $\to$ $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \ge a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k}} \ge \underset{-1}{\underset{\parallel}{a_1}} + \overbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} - 1}^{\text{somma telesc.}} \ge -2 + \frac{1}{\sqrt{n}} \ge -2$

Quindi $a_n \downarrow \alpha \ge -2$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = 2\sqrt{n} + \alpha + o(1)$ per $n \to +\infty$

SOMMA Telescopica complessa

- Sia $z \in \mathbb{C}$ $\quad \underbrace{(z-1)\sum_{k=1}^{n} z^k}_{\text{e' somma telescopica}} = z^{n+1} - 1$

dim

$$(z-1)\sum_{k=1}^{n} z^k = \sum_{k=1}^{n}\left(z^{k+1} - z^k\right) = z^{n+1} - z^0 = z^{n+1} - 1$$

- $A^{n+1} - B^{n+1} = (A-B)\sum_{k=0}^{n} A^k B^{n-k}$

$A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$
$A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2)$

Proposizione Cesaro

Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è succ. a valori in $\mathbb{C}$ e $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

dim

Sia $\alpha_n \doteq a_n - \ell$

STEP 1 $\mapsto a_n \to \ell \longleftrightarrow \alpha_n \to 0$

STEP 2 $\mapsto \alpha_n \to 0 \Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \to 0$

STEP 3 $\mapsto \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \to 0 \Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \to 0$

Step 1 $\mapsto a_n \to \ell \Leftrightarrow \alpha_n = a_n - \ell \to 0$

Step 2 $\mapsto$ Se $\alpha_n \to 0$ Fisso $\varepsilon > 0$, $\exists \bar{n}$ t.c. $\forall k \geq \bar{n}$ $|\alpha_k| < \varepsilon$

Sia $n > \bar{n} \Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = \frac{1}{n}\underbrace{\boxed{\sum_{k=1}^{\bar{n}} \alpha_k}}_{= M} + \frac{1}{n}\sum_{k=\bar{n}+1}^{n} \alpha_k$

se $n > \frac{M}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{M}{n} < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\right| \leq \frac{M}{n} + \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=\bar{n}+1}^{n} \alpha_k}_{\text{Somma di } n-\bar{n} \text{ addendi } < \varepsilon} \leq \frac{|M|}{n} + \overset{<\varepsilon}{\varepsilon} < 2\varepsilon$

$\Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \to 0$

step 3 Se $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \to 0 \Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k - \ell) = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right) - \ell \Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \to \ell$

Criterio rapporto - radice

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\quad a_n > 0.$

Se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$

$\not\Leftarrow$ $\hookrightarrow$ Contro esempio, può $\exists \lim \sqrt[n]{a_n}$ ma non $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ $\quad a_n = \begin{cases} 2^n & \text{se } n \text{ pari} \\ n2^n & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$

$\sqrt[n]{a_n} \to 2$ ma $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} 2(n+1) & \text{se } n \text{ pari} \\ \frac{2}{n} & \text{se } n \text{ disp} \end{cases}$

dim

chiamo $\alpha_n = \log a_n$

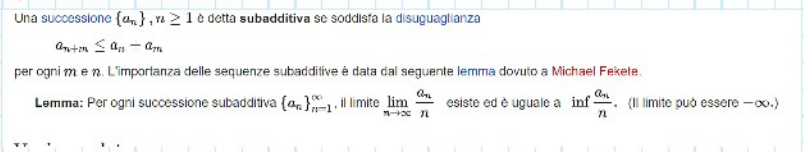
$\log \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{n}\log(a_n) = \frac{1}{n}\alpha_n$ $\qquad \log\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \log(a_{n+1}) - \log(a_n) = \alpha_{n+1} - \alpha_n$

$\alpha_n = \alpha_0 + \sum_{k=0}^{n-1}(\alpha_{k+1} - \alpha_k)$ $\qquad$ divido per $n \Rightarrow \frac{1}{n}\alpha_n = \frac{1}{n}\alpha_0 + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(\alpha_{k+1} - \alpha_k) \xrightarrow[\text{cesaro}]{n\to+\infty} 0 + \log \ell$

$\alpha_{k+1} - \alpha_k = \log\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}\right) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \log \ell$

cioè $\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{1}{n}\log a_n}_{\log\sqrt[n]{a_n}} = \log \ell \Rightarrow \lim \sqrt[n]{a_n} \to \ell$

Fekete lemma

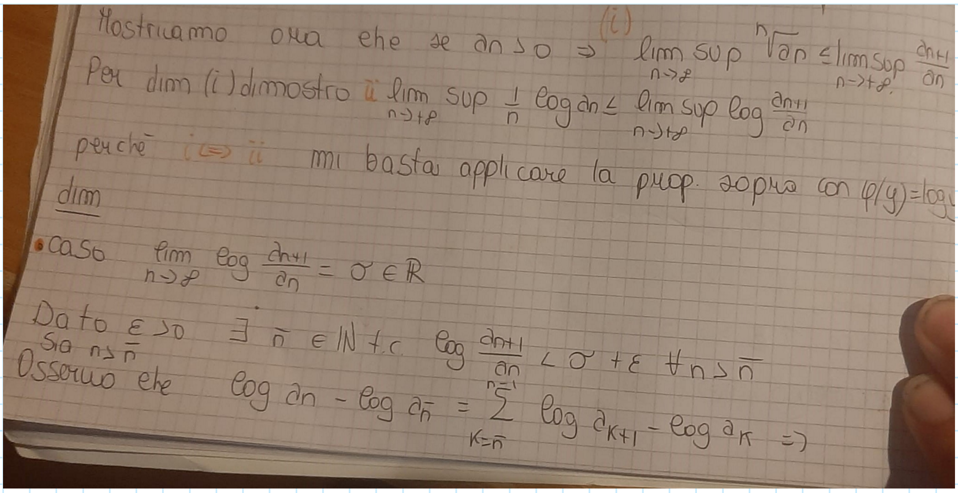


Una successione $\{a_n\}, n \geq 1$ è detta **subadditiva** se soddisfa la disuguaglianza

$$a_{n+m} \leq a_n - a_m$$

per ogni m e n. L'importanza delle sequenze subadditive è data dal seguente lemma dovuto a Michael Fekete.

Lemma: Per ogni successione subadditiva $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, il limite $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$ esiste ed è uguale a $\inf \frac{a_n}{n}$. (Il limite può essere $-\infty$.)



Mostriamo ora che se $a_n > 0 \Rightarrow$ (i) $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le \limsup_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

Per dim (i) dimostro ii $\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log a_n \le \limsup_{n\to+\infty} \log \frac{a_{n+1}}{a_n}$

perché i $\Leftrightarrow$ ii mi basta applicare la prop. sopra con $\varphi(y)=\log$

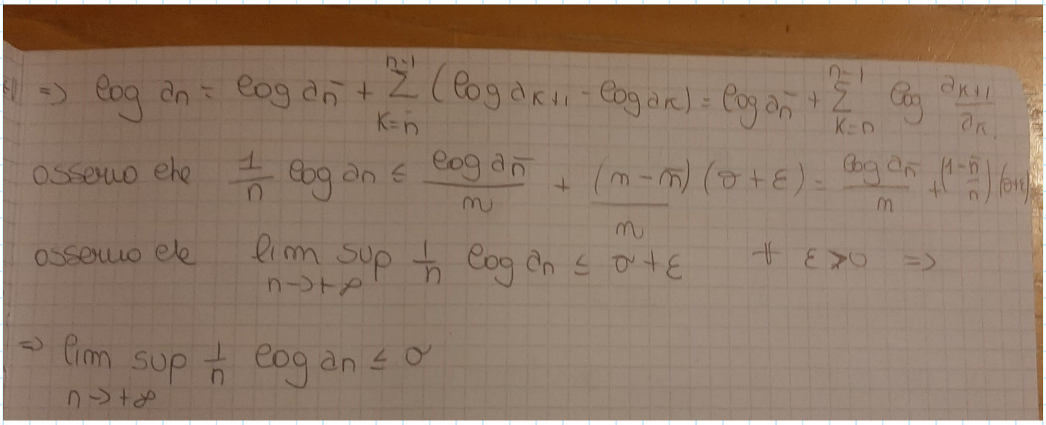
dim

- caso $\lim_{n\to\infty} \log \frac{a_{n+1}}{a_n} = \sigma \in \mathbb{R}$

Dato $\varepsilon > 0$ $\exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ t.c. $\log \frac{a_{n+1}}{a_n} < \sigma + \varepsilon \quad \forall n > \bar{n}$

Sia $n > \bar{n}$

Osservo che $\log a_n - \log a_{\bar{n}} = \sum_{k=\bar{n}}^{n-1} \log a_{k+1} - \log a_k \Rightarrow$

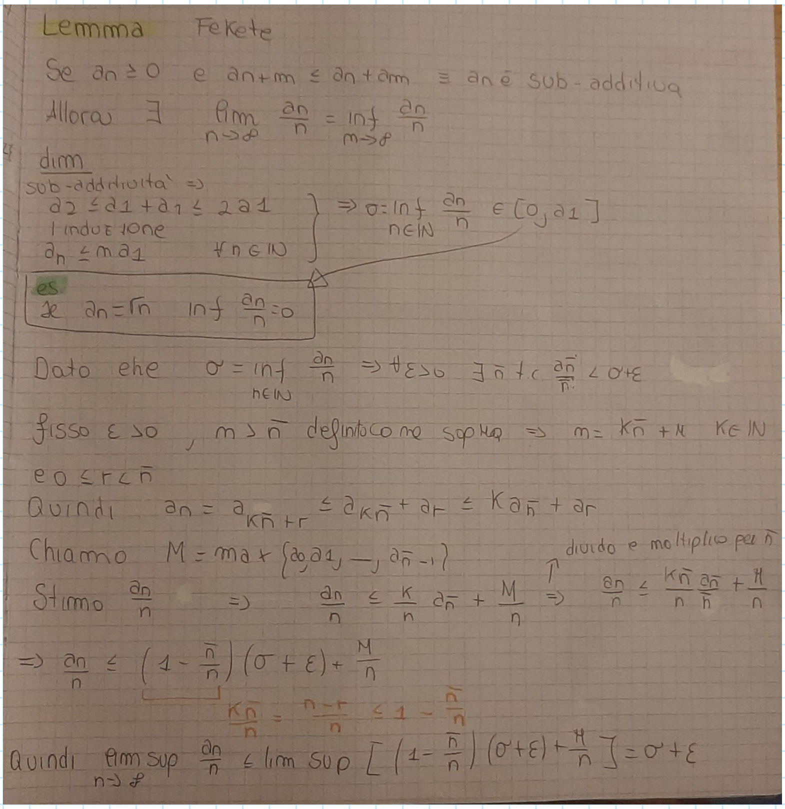


$$\Rightarrow \log a_n = \log a_{\bar{n}} + \sum_{k=\bar{n}}^{n-1} (\log a_{k+1} - \log a_k) = \log a_{\bar{n}} + \sum_{k=n}^{n-1} \log \frac{a_{k+1}}{a_k}$$

osservo che $\frac{1}{n} \log a_n \le \frac{\log a_{\bar{n}}}{m} + \frac{(m-\bar{m})}{m} (\sigma + \varepsilon) = \frac{\log a_{\bar{n}}}{m} + \left(1-\frac{\bar{n}}{n}\right)(\sigma+\varepsilon)$

osservo che $\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log a_n \le \sigma + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log a_n \le \sigma$



Lemma Fekete

Se $a_n \ge 0$ e $a_{n+m} \le a_n + a_m$ $\equiv$ a_n è sub-additiva

Allora $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{m\to\infty} \frac{a_n}{n}$

dim

sub-additività $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} a_2 \le a_1 + a_1 \le 2a_1 \\ \text{induzione} \\ a_n \le m a_1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow \sigma = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n} \in [0, a_1]$$

es.

se $a_n = \sqrt{n}$ $\inf \frac{a_n}{n} = 0$

Dato che $\sigma = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n}$ t.c. $\frac{a_{\bar{n}}}{\bar{n}} < \sigma + \varepsilon$

fisso $\varepsilon > 0$, $m > \bar{n}$ definito come sopra $\Rightarrow m = k\bar{n} + N \quad k \in \mathbb{N}$

e $0 \le r < \bar{n}$

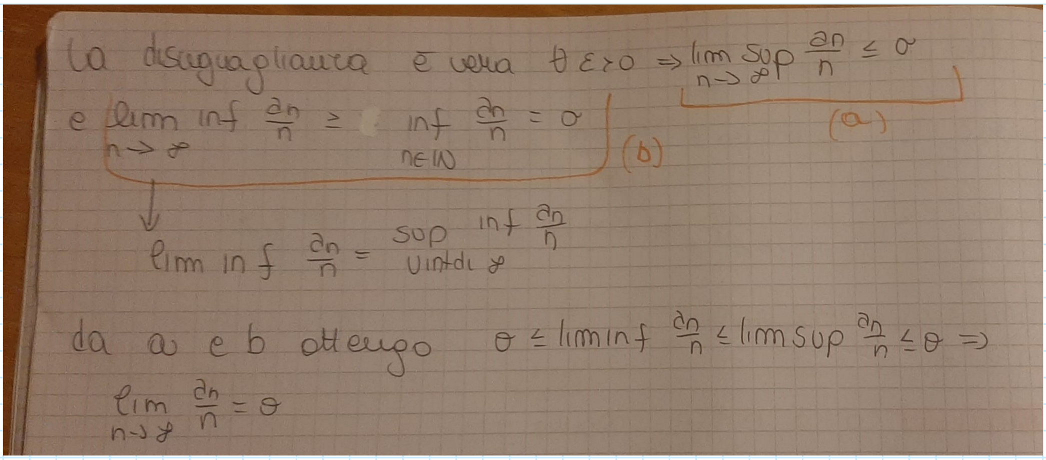
Quindi $a_n = a_{k\bar{n}+r} \le a_{k\bar{n}} + a_r \le k a_{\bar{n}} + a_r$

Chiamo $M = \max\{a_0, a_1, \dots, a_{\bar{n}-1}\}$

Stimo $\frac{a_n}{n} \Rightarrow \frac{a_n}{n} \le \frac{k}{n} a_{\bar{n}} + \frac{M}{n} \overset{\text{divido e moltiplico per } \bar{n}}{\Rightarrow} \frac{a_n}{n} \le \frac{k\bar{n}}{n} \frac{a_{\bar{n}}}{\bar{n}} + \frac{M}{n}$

$$\Rightarrow \frac{a_n}{n} \le \underbrace{\left(1 - \frac{\bar{n}}{n}\right)}_{\frac{k\bar{n}}{n} = \frac{n-r}{n} \le 1 - \frac{\bar{n}}{n}} (\sigma + \varepsilon) + \frac{M}{n}$$

Quindi $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \le \limsup \left[\left(1-\frac{\bar{n}}{n}\right)(\sigma+\varepsilon) + \frac{M}{n}\right] = \sigma + \varepsilon$



la disuguaglianza è vera $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \underbrace{\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \le 0}_{(a)}$

e $\underbrace{\liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \ge \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n} = 0}_{(b)}$

$\downarrow$

$\liminf \frac{a_n}{n} = \sup_{\text{vint di } \infty} \inf \frac{a_n}{n}$

da a e b ottengo $0 \le \liminf \frac{a_n}{n} \le \limsup \frac{a_n}{n} \le 0 \Rightarrow$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 0$

Lemma

$$\left(1+\frac{a}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^a$$

dim

$$\left(1+\frac{a}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \overset{\text{e CANE}}{=} e^{n\log\left(1+\frac{a}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \overset{\text{Taylor log}}{=} e^{n\cdot\frac{a}{n}} = e^a$$

$$n\log\left(1+\underbrace{\frac{1}{n}(a+o(1))}_{x}\right) = n\left(\frac{1}{n}(a+o(1))\right)(1+o(1)) = a+o(1)+a\cdot o(1)+[o(1)]^2 = a+o(1) \quad \text{per } n\to+\infty$$

Proposizione 1 Carminati

Se a_n e b_m sono suc. a termini positivi t.c. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge \frac{b_{m+1}}{b_m}$ $\forall m \ge m_0 \Rightarrow a_n \ge c\,b_m$ e $c = \frac{a_{n_0}}{b_{m_0}}$

dim

$\forall m \ge m_0$ $a_{m+1}\cdot b_m \ge b_{m+1}\cdot a_n \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \ge \frac{a_n}{b_m}$

sia $r_m = \frac{a_n}{b_m}$ $\Rightarrow r_{m+1} \ge r_n$ $\forall n \ge n_0 \Rightarrow r_m \ge r_{m_0}$ $\Rightarrow \underset{r_m}{\frac{a_n}{b_m}} \ge \underset{r_{m_0}}{\frac{a_{n_0}}{b_{m_0}}} \Rightarrow a_n \ge \underbrace{\frac{a_{n_0}}{b_{m_0}}}_{c} \cdot b_m \Rightarrow a_n \ge c\,b_m$

Proposizione 2 Carminati

Se a_n e b_m sono suc. a termini positivi t.c. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{m+1}}{b_m}$ $\forall m \ge m_0 \Rightarrow a_n \le c\,b_m$

dim

$\forall m \ge m_0$ $a_{m+1}\cdot b_m \le b_{m+1}\cdot a_n \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \le \frac{a_n}{b_m}$

sia $r_m = \frac{a_n}{b_m}$ $\Rightarrow r_n \ge r_{n+1}$ $\forall n \ge n_0 \Rightarrow r_{m_0} \ge r_m$ $\Rightarrow \underset{r_m}{\frac{a_n}{b_m}} \le \underset{r_{n_0}}{\frac{a_{n_0}}{b_{m_0}}} \Rightarrow a_n \le \underbrace{\frac{a_{n_0}}{b_{m_0}}}_{c} \cdot b_m \Rightarrow a_n \le c\,b_m$

Corollario 2 Carminati

Se $a_n > 0$

1 Se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le b$ $\forall n \ge n_0$ $\exists c$ t.c. $a_n \le c b^n$ $\forall n \ge n_0$

2 $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \Rightarrow \forall b > \ell$ $\exists n_0, \exists c$ t.c. $a_n \le c b^n$ $\forall n \ge n_0$

OSS: se $\ell < 1$ posso scegliere $b \in (\ell, 1)$ ottenendo che $a_n \to 0$ con velocità esponenziale

dim

1 deriva da prop 2 con $b_n = b^n$

2 se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell < b \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \in (-\infty, b)$ def. $\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < b$ def e si conclude con 1 (si prende $b = \frac{\ell+1}{2}$)

Corollario 1 Carminati

Se $a_n > 0$

1 Se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq b$ $\forall n \geq n_0$ $\exists$ $c > 0$ t.c. $a_n \geq c b^n$ $\forall n \geq n_0$

2 $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \Rightarrow \forall b < \ell$ $\exists n_0$, $\exists c$ t.c. $a_n \geq c b^n$ $\forall n \geq n_0$

OSS: se $\ell > 1$ posso scegliere $b \in (1, \ell)$ ottenendo che $a_n \to +\infty$ con velocità esponenziale

dim

1 deriva da prop 1 con $b_n = b^n$

2 se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell > b \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \in (b, +\infty)$ def. $\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} > b$ def e si conclude con 1

Proposizione $\mapsto$ $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \longrightarrow e^{\alpha} (\cos\beta + i \sin\beta) = e^{\alpha} e^{i\beta}$ con $z \in \mathbb{C}$

$z = \alpha + i\beta$ $z \in \mathbb{C}$ $\mathrm{Re}\left(1 + \frac{z}{n}\right) = 1 + \frac{\alpha}{n}$ $\mathrm{Im}\left(1 + \frac{z}{n}\right) = \frac{\beta}{n}$ $W_n = 1 + \frac{z}{n} = \rho_n e^{i\theta_n}$

$\rho_n = \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{n}\right)^2 + \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\left(\frac{\beta}{n}\right)^2}}} = \sqrt{1 + \frac{2\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}$

$\overset{n>>1}{\theta_n \overset{\Downarrow}{=}} \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\left(1+\frac{z}{n}\right)}{\mathrm{Re}\left(1+\frac{z}{n}\right)}\right) = \arctan\left(\frac{\beta/n}{1 + \underbrace{2\alpha/n}}\right) = \arctan\left(\beta/n\,(1 + o(1))\right)$

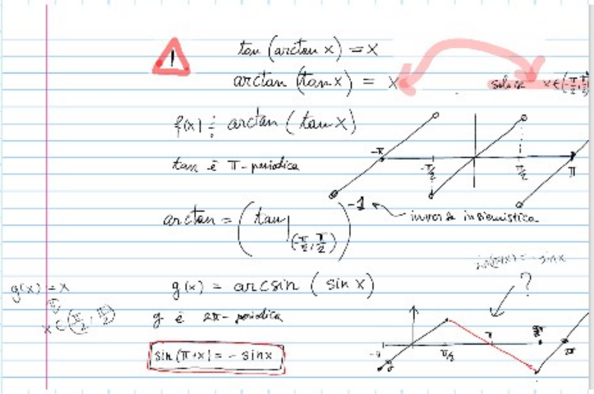
$\hookrightarrow$ se $\mathrm{Re}\left(1+\frac{z}{n}\right) > 0$ $\qquad n>>1 = o\left(\frac{1}{n}\right)$

$W_n^n = \rho_n^n e^{in\theta_n} \Rightarrow \rho_n^n = \sqrt{\left(1 + \frac{2\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{\alpha}$

$n\theta_n = n\arctan\left(\beta/n\,(1 + o(1))\right) \underset{\text{Taylor}}{=} \cancel{n} \cdot \beta/\cancel{n} + o(1) \to \beta$

Per il criterio visto

$W_n^n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \to e^{\alpha} e^{i\beta}$



$\tan(\arctan x) = x$

$\arctan(\tan x) = x$ solo se $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$f(x) \doteq \arctan(\tan x)$

tan è π-periodica

$\arctan = \left(\tan|_{\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}\right)^{-1}$ $\leftarrow$ inversa insiemistica

$g(x) = x$ $\Leftrightarrow$ $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$g(x) = \arcsin(\sin x)$

g è 2π-periodica

$\boxed{\sin(\pi + x) = -\sin x}$