SERIE

martedì 14 giugno 2022 20:27

def. di Serie

LEZIONE 25-30

Una serie e' una somma formale di elt. di uno sp. V e metrico

le quantita' $S_N = \sum_{n=n_0}^{N} x_n \in V$ si dicono somme parziali

Definizione

La serie converge a $x \in V \iff S_n \to x$ per $N \to +\infty$

Nel caso $\boxed{V = \mathbb{R}}$ Ho 3 comportamenti possibili:

1. serie convergente $\iff S_n \to x \in \mathbb{R}$ per $N \to +\infty$
2. serie divergente a $\pm\infty \iff S_n \to \pm\infty$ per $N \to +\infty$
3. serie non convergente

Se $\boxed{V = \mathbb{C}}$ $\sum x_n$ con $x_n = a_n + i b_n \in \mathbb{C}$

La serie converge in $\mathbb{C} \iff$ convergono $\sum a_n$, $\sum b_n$ in $\mathbb{R}$

e nel caso si ha $\sum x_n = \sum a_n + i \sum b_n$

Serie note

$\sum_{n \in \mathbb{N}}^{\infty} \frac{1}{n}$ = s. armonica

$\sum_{n \in \mathbb{N}}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ = s. armonica generalizzata con $\alpha > 0$

$\sum_{n \in \mathbb{N}} x^n$ $x \in \mathbb{R}$ fissato è s. geometrica

Criterio di Cauchy

$\sum x_n$ converge $\iff \{S_n\}$ la succ. delle somme parziali converge

$\iff \{S_n\}$ di Cauchy $\iff \forall \varepsilon \ \exists n_\varepsilon$ t.c. $\left|\sum_{n=N+1}^{M} x_n\right| = |S_M - S_N| < \varepsilon \quad \forall N, M \geq n_\varepsilon$

dim

Dato che $\mathbb{R}$ è completo $\Rightarrow$ Tutte le succ. di Cauchy convergono $\Rightarrow S_n$ convergono

La s. armonica non è convergente

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Fisso $K \in \mathbb{N}$ e considero $S_{2^K} - S_{2^{K-1}} =$

$$\sum_{2^{K-1}+1}^{2^K} \frac{1}{n} > \sum_{2^{K-1}+1}^{2^K} \frac{1}{2^K} = \frac{1}{2^K}\left(2^K - 2^{K-1}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow S_n \text{ non è di Cauchy}$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ non converge ma diverge a $+\infty$ perché S_n è crescente

Serie a termini positivi

Ho 2 sole possibilità:

1) diverge a $+\infty$ se $S_n \to +\infty$

2) converge al $\sup S_n$ se S_n è limitata

cond. necessaria

$\sum x_n = S \in \mathbb{R} \Leftrightarrow S_n \to S \Leftarrow x_n = S_n - S_{n-1} \to S - S = 0$

SERIE GEOMETRICA

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} x^n = \begin{cases} N+1 & \text{se } x = 1 \\ \dfrac{1-x^{N+1}}{1-x} & \text{se } x \neq 1 \end{cases}$$

So che
$$\begin{cases} x^N \to 0 & \text{se } |x| < 1 \\ x^N \to +\infty & \text{se } x > 1 \\ x^N \text{ non converge} & \text{se } x \leq 1 \\ x^N = 1 & \text{se } x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum x^n = \dfrac{1}{1-x} \text{ se } |x| < 1, \ \sum \text{ converge} \\ \sum x^n = +\infty \text{ se } x \geq 1 \ \ \sum \text{ diverge a } +\infty \\ \sum x^n = \text{non converge se } x \leq -1 \end{cases}$$

SERIE TELESCOPICA

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_{n+1} - a_n) = a - a_0$$

$$S_n = a_{N+1} - a_0 \xrightarrow[N \to +\infty]{} a - a_0$$

Serie di Mengoli

La **serie di Mengoli**, così chiamata in onore di Pietro Mengoli, è la serie definita come

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} \dots$$

Questa serie risulta convergente a 1. Infatti si ha che la serie:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Abbiamo pertanto che

$$\sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) =$$
$$= 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(-\frac{1}{k} + \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{k+1} =$$
$$= 1 - \frac{1}{k+1} \longrightarrow 1, \text{ per } k \to \infty.$$

Risulta però interessante notare come ogni elemento delle successioni parziali si elimini con il termine successivo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \left(\frac{1}{1} \cancel{-\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{+\frac{1}{2}} \cancel{-\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{+\frac{1}{3}} \cancel{-\frac{1}{4}}\right) + \dots + \left(\cancel{+\frac{1}{n-1}} \cancel{-\frac{1}{n}}\right) + \dots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

di cui il limite risulta essere:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

Inoltre non è possibile spezzare la sommatoria nella differenza di due serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

poiché queste sono serie armoniche, ciascuna divergente.

La serie di Mengoli costituisce un esempio classico di serie telescopica.

CRITERI DI CONVERGENZA

Serie a termini positivi

confronto

Siano $0 < x_n < y_n \quad \forall n \geq n_0$

1. se $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} y_n = +\infty$

2. se $\sum_{n=0}^{\infty} y_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n < +\infty$

dim

Sia $S_N = \sum_{n=0}^{N} x_n$ e $T_N = \sum_{n=0}^{N} y_n$

$\{S_N\}$ e $\{T_N\}$ sono succ. crescenti per $N > n_0 \Rightarrow$

o convergono o divergono a $+\infty$ e si ha

$S_N - S_{n_0} \leq T_N - T_{n_0} \Rightarrow$ Tesi.

Esempi

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} < 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n(n+1)}}_{\text{Mengoli } 1} = 2$ ricorda! $(n+1)^2 \geq n(n+1) \Rightarrow \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)}$

  converge a $S \in (1,2)$, $S = \frac{\pi^2}{6}$

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ con $\alpha > 0$

Se $\alpha = 1$ diverge già visto con $\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} = H_n \geq \log(n+1)$, $H_n = \log(n) + \gamma + o(1)$
con criterio di Cauchy

- se $\alpha = 2$ converge visto sopra con confronto
- se $\alpha > 2 \Rightarrow n^\alpha > n^2 \Rightarrow \sum \frac{1}{n^\alpha} < \sum \frac{1}{n^2}$ converge per confr.
- se $\alpha < 1 \Rightarrow n^\alpha < n \Rightarrow \sum \frac{1}{n^\alpha} > \sum \frac{1}{n} \Rightarrow \sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge per confr.
- se $\alpha \in (1,2) \Rightarrow$ uso criterio di condensazione

CRITERIO DI CONDENSAZIONE

Sia $x_n \geq 0$

$x_{n+1} \leq x_n$ decrescente

Allora $\sum x_n < +\infty \iff \sum_{k=k_0}^{\infty} 2^k x_{2^k} < +\infty$

con $2^{k_0} \geq n_0$

Mi restringo a una sotto succ. moltiplicando per un fattore. È importante che sia decrescente altrimenti non vale.

dim

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + \sum_{k=0}^{\infty} y_k \qquad y_k = \sum_{2^k+1}^{2^{k+1}} x_n$$

$x_{n+1} < x_n$ è decrescente $\Rightarrow$ N° add $= 2^{k+1} - (2^k + 1) + 1 = 2^{k+1} - 2^k = 2^k$

x_{2^k} termine + grande

$x_{2^{k+1}}$ termine + piccolo

$$2^k \cdot x_{2^{k+1}} \leq y_k \leq 2^k x_{2^k}$$

Per confronto $\sum y_k$ converge $\iff \sum 2^k x_{2^k}$ converge.

nota

$$\text{N° addendi} \cdot (\text{term. + piccolo}) \leq \sum_{n=n_0}^{N} a_n \leq \text{N° add} \cdot (\text{termine + grande})$$

N° add $= N - n_0 + 1$

termine + piccolo = 1° termine se a_n è crescente
ultimo termine se a_n è decrescente

termine + grande = ultimo termine se a_n è cresc.
1° termine se a_n è decresc.

Esempi

- $\sum_k \frac{1}{n^\alpha} < +\infty \iff \sum_k \frac{1}{(2^k)^\alpha} \cdot 2^k < +\infty$

$\iff \sum_k \frac{2^k}{2^{k\alpha}} = \sum_k \frac{1}{2^{k\alpha - k}} = \sum_k \frac{1}{2^{k(\alpha-1)}} = \sum_k \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^k < +\infty$ ↓geometrica

converge $\iff \left|\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right| < 1 \iff 2^{\alpha-1} > 1 \iff \alpha - 1 > 0 \iff \alpha > 1$

- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^\alpha(n)} \sim \sum_n^{\infty} \frac{1}{n}$ per $n \to +\infty$

↓converge $\iff \sum_k^{\infty} \frac{\cancel{2^k}}{\cancel{2^k} \log^\alpha(2^k)} = \sum_k \frac{1}{k^\alpha \log^\alpha(2)} = \frac{1}{\log^\alpha(2)} \sum_k \frac{1}{k^\alpha} < +\infty$

$\iff \alpha > 1$

CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

$a_n > 0$, $b_n > 0$ e $a_n \sim b_n$ per $n \to +\infty$ cioè $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$

Allora $\sum a_n < +\infty \iff \sum_n b_n < +\infty$

dim

Per $\varepsilon > 0$ $\exists\, n_\varepsilon$ t.c. $(1-\varepsilon) b_n \leq a_n \leq (1+\varepsilon) b_n \quad \forall n \geq n_\varepsilon$

Per confronto segue la tesi.

osservazione

E' sufficiente che $\exists\, c, C > 0$ t.c. $c \leq \frac{a_n}{b_n} \leq C \quad \forall n$ t.c.

$0 < \liminf \frac{a_n}{b_n} \leq \limsup \frac{a_n}{b_n} < +\infty$

esempi

- $\sum \sin^2\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \sim \sum \frac{1}{n^{2\alpha}}$ infatti $\lim_{n \to +\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)}{\frac{1}{n^{2\alpha}}} = \lim_{\substack{t \to 0 \\ "\frac{1}{n}"}} \frac{\sin^2(t^\alpha)}{t^{2\alpha}} = 1$

conv $\iff 2\alpha > 1 \Rightarrow \alpha > \frac{1}{2}$

↓

$\Rightarrow$ conv $\iff \alpha > \frac{1}{2}$

- $\sum_n \left[\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right] = \sum \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \frac{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \sum \frac{\cancel{n} + 1 - \cancel{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

ora $\sqrt{n+1} \sim \sqrt{n}$ per $n \to +\infty$

$\Rightarrow \sum \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \sim \sum \frac{1}{2\sqrt{n}} \sim \sum \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty$

- $\sum_{n=1}^{\infty} a^{\frac{1}{n}} - 1 \sim (\log a) \sum \frac{1}{n} = +\infty$ infatti $\frac{a^x - 1}{x} \to \log(a)$ per $x \to 0$

$\Rightarrow a^x - 1 \sim \log(a) \cdot x$

- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ con Stirling.

in particolare $\frac{x^n}{n!} < \frac{1}{2^n} \Rightarrow \frac{x^n}{n!}$ converge. $\forall x > 0$

criterio del rapporto

Sia $a_n > 0$ $\forall n$. Allora 1) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r < 1$ def in n $\Rightarrow \sum a_n < +\infty$

2) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ def. in n $\Rightarrow a_n \not\to 0 \Rightarrow \sum_n a_n = +\infty$

dim

1) Se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r < 1$ per $n \geq n_0$ $\Rightarrow a_{n_0+1} \leq r a_{n_0}$

$a_{n_0+2} < r \underbrace{a_{n_0+1}}_{< r a_{n_0}} < r r . a_{n_0} = r^2 a_{n_0}$

generalizzando $\Rightarrow a_{n_0+k} < r^k a_{n_0}$

sia $n = n_0 + k$ $\Rightarrow a_n < r^{n-n_0} a_{n_0} = \left(\frac{a_{n_0}}{r^{n_0}}\right) r^n$

$\Rightarrow \sum_n r^n < +\infty \Rightarrow \sum_n a_n < +\infty$ costante.

2) ovvio

c. della radice

Sia $a_n \geq 0$ $\forall n$

se $\sqrt[n]{a_n} \leq r < 1 \Rightarrow \sum a_n < +\infty$

se $\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \iff a_n \geq 1$ def in n $\Rightarrow \sum_n^{\infty} a_n = +\infty$

dim

$\sqrt[n]{a_n} \leq r$ $\forall n \geq n_0 \Rightarrow a_n \leq r^n$ $\forall n \geq n_0 \Rightarrow \sum r^n < +\infty$

$\Rightarrow \sum a_n < +\infty$

nota a $\frac{1}{n^\alpha}$ non si applica rapporto

Per le serie a termini positivi ho a disposizione

- confronto
- confronto asintotico
- condensazione
- rapporto - radice

Produttorie

Sia $a_n > 0$ $\quad \prod_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N \to +\infty} \left(\prod_{n=1}^{N} a_n \right)$ dove $\prod_i^N a_n = a_1 \dots a_n$

Possiamo chiederci se converge

Proposizione

$\prod_n (1+a_n)$ $\quad a_n \geq 0$ converge $\iff \sum a_n$ converge

dim

1° implicaz.

$$\prod_1^N (1+a_n) = (1+a_1) \dots (1+a_N) = \overbrace{1 + \sum_{n=1}^{N} a_n}^{} + \sum_{i<j}^{N} a_i a_j + \dots + \prod_1^N a_n$$

$$\Rightarrow \prod_1^N (1+a_n) \geq \overbrace{1 + \sum_{n=1}^{N} a_n}^{\text{solo 2 termini}} \Rightarrow$$

$$\prod_1^{\infty} (1+a_n) = \lim_{N \to +\infty} \left(\prod_1^N (1+a_n) \right) \geq 1 + \sum_1^{\infty} a_n$$

Quindi $\sum a_n = +\infty \overset{\text{CFR}}{\Rightarrow} \prod_1^{\infty} (a_n + 1) = +\infty$

altra implic.

$$\log \left(\prod_1^N (1+a_n) \right) \overset{\text{prop log.}}{=} \sum_1^N \log(1+a_n) \leq \sum_1^N a_n$$

$\log(1+a_n) \leq a_n$

$$\Rightarrow \prod_1^N (1+a_n) \leq e^{\sum_1^N a_n} \Rightarrow$$

$$\lim_{N \to +\infty} \prod_1^N (1+a_n) \leq e^{\sum_1^{\infty} a_n} \qquad e^{+\infty} = +\infty$$

$$\Rightarrow \sum a_n < +\infty \Rightarrow \prod_1^{\infty} (1+a_n) < +\infty$$

Esempi

$$\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n} \sim \sum_n (\sqrt[n]{n} - 1) \sim \sum \frac{\log n}{n} = +\infty$$

(a)

a) $\sqrt[n]{n} - 1 = e^{\log \sqrt[n]{n}} - 1 = e^{\frac{\log n}{n}} - 1 \sim \frac{\log n}{n} \geq \frac{1}{n}$

$e^x - 1 \sim x$

Primi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \prod_i \sum_{K=0}^{\infty} \frac{1}{p_i^K} \qquad p_i \text{ primi}$$

$$\prod_i \underbrace{\sum_{K=0}^{\infty} \frac{1}{p_i^K}}_{\text{geometrica}} = \prod_i \left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_i}}\right) = \prod_i \left(\frac{p_i}{p_i-1}\right) \sim \sum \frac{p_i}{p_i-1} - 1 = \sum \frac{1}{p_i-1}$$

Quindi $\sum \frac{1}{p_i} \sim \sum \frac{1}{p_i-1} \sim \sum \frac{1}{n} = +\infty$

$\sum \frac{1}{p_i^\alpha} \sim \sum \frac{1}{n^\alpha} < +\infty \iff \alpha > 1$

STIRLING con Log

$\log(n!) \sim n \log n \qquad 0 \le \frac{\log n}{n} \le c$

SERIE A TERMINI GENERALI

1 CRITERIO

Se $\sum a_n$ conv. assolutamente $\Rightarrow$ $\sum a_n$ conv. semplicemente

dim

Se S_n converge

1 Per il criterio di Cauchy $\sum a_n$ conv. semplicemente
$\iff \forall \varepsilon \ \exists N_\varepsilon$ t.c. $\left|\sum_{n=N}^{M} a_n\right| \le \varepsilon \quad \forall N, M \ge N_\varepsilon$

Se $\sum |a_n|$ conv.

2 Per il criterio di Cauchy $\sum a_n$ conv. assolutamente
$\iff \forall \varepsilon \ \exists N_{\varepsilon'}$ t.c. $\sum_{n=N}^{M} |a_n| \le \varepsilon \quad \forall N, M \ge N_{\varepsilon'}$

Quindi per la disuguaglianza triangolare
$\left|\sum_{n=N}^{M} a_n\right| \le \sum_{n=N}^{M} |a_n| \le \varepsilon \quad \forall N, M \ge N_{\varepsilon'} \Rightarrow \sum a_n$ conv. semplicemente

NOTA

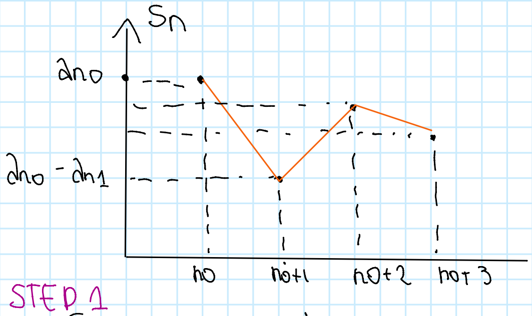
Non vale il viceversa

$\sum (-1)^n \frac{1}{n}$ conv semplic. per Leibniz. ma non ass. $\sum \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum \frac{1}{n} = +\infty$

CRITERIO DI LEIBNIZ

- Sia $a_n \ge 0$
- Sia $a_{n+1} \le a_n$ cioè decrescente
- Sia $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Allora $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge semplicemente dim



STEP 1

Supp. n_0 pari

Dato che a_n è decrescente:

- S_{n_0+2k} è una succ. decrescente in k.
- S_{n_0+2k+1} è una succ. crescente in k

STEP 2

Inoltre sono limitate

Infatti
- $S_{n_0+2k} \geq S_{n_0+1}$ quella decr. è limitata dal basso
- $S_{n_0+2k+1} \leq S_{n_0}$ quella crescente è limitata dall'alto

STEP 3

Essendo succ. monotone hanno lim

$S_{n_0+2k} \to \ell \qquad S_{n_0+2k+1} \to \ell'$ per $k \to +\infty$

STEP 4

Però si ha che $a_{n+2k+1} = |S_{n_0+2k+1} - S_{n_0+2k}| \to |\ell - \ell'|$

$\Rightarrow \ell = \ell'$ perchè per hp $\to 0$.

$\sum (-1)^n a_n$ converge a ℓ

SOMMAZIONE PER PARTI

a_i, b_i succ. in $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$

$$\sum_{i=N}^{M} a_i b_i = \sum_{i=N}^{M} (a_i - a_{i+1}) B_i - a_N B_{N-1} + a_{M+1} B_M$$

$$B_i = \sum_{k=n_0}^{i} b_k$$

dim $\overbrace{}^{\text{ultimo termini } b_i}$

$b_i = B_i - B_{i-1}$

Considero $\sum_{i=N}^{M} a_i b_i = \sum_{i=N}^{M} a_i B_i - \sum_{i=N}^{M} a_i B_{i-1} \overset{\text{cambio indici}}{=}$

$= \sum_{i=N}^{M} a_i B_i - \sum_{i=N-1}^{M-1} a_{i+1} B_i = \sum_{i=N}^{M} a_i B_i - \Big(\underbrace{\sum_{i=N-1}^{M} a_{i+1} B_i - a_{M+1} B_M}_{\text{aggiungere e togliere il termine M-esimo}}\Big) =$

$= \sum_{i=N}^{M} (a_i - a_{i+1}) B_i - \underbrace{a_N B_{N-1}}_{\text{tolgo il 1 termine per avere } \sum_{i=N} \text{ anziché } \sum_{i=N-1}} + a_{M+1} B_M$

CRITERIO DI DIRICHLET

Sia a_n, b_n in $\mathbb{R}$ o in $\mathbb{C}$

Se
1. $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$
2. a_n ha variazione limitata cioè $\sum_n |a_{n+1} - a_n| < +\infty$
3. $B_N = \sum_{n=n_0}^{N} b_n \Rightarrow |B_n| \leq C \quad \forall N$

$\Rightarrow \sum a_n b_n$ conv. (semplicemente)

dim

Per Cauchy devo verificare che $\forall \varepsilon \; \exists n_\varepsilon$ t.c. $\left|\sum_{n=N}^{M} a_n b_n\right| \leq \varepsilon \quad \forall N, M \geq N_\varepsilon$

Per la somma per parti ho che

$\left|\sum_{n=N}^{M} a_n b_n\right| = \left|\sum_{n=N}^{M} (a_n - a_{n+1}) B_n + a_{M+1} B_M - a_N B_{N-1}\right| \overset{\text{disug. triangolare}}{\leq} \sum_{N}^{M} |a_n - a_{n+1}| \, \underline{|B_n|} + |a_{M+1}| \, \underline{|B_M|} + |a_N| \, \underline{|B_{N-1}|} \leq$

$\underset{\text{hp.3}}{\leq} \underline{C} \Big(\underbrace{\sum_{n=N}^{M} |a_n - a_{n+1}|}_{\leq \varepsilon/C} + \underbrace{|a_{M+1}|}_{\leq \varepsilon/C} + \underbrace{|a_N|}_{\leq \varepsilon/C} \Big) \overset{\text{hp 2 e 1}}{\leq} C\left(3 \frac{\varepsilon}{C}\right) = 3\varepsilon$

per hp $|B_n| \leq C$ — conv. per N, M grandi per hp.

Se prendo $N, M \geq N_\varepsilon$ dove N_ε è t.c.

$\sum_{n=N}^{M} |a_n - a_{n+1}| \leq \frac{\varepsilon}{C}$ ok per hp 2 cioè $\sum |a_{n+1} - a_n| < +\infty$, e $|a_n| \leq \frac{\varepsilon}{C} \; \forall n \geq N_\varepsilon$ ok per hp 1 $a_n \to 0$

$\Rightarrow \sum a_n b_n$ converge.

Osservazioni

- Se $a_n \in \mathbb{R}$ allora e' hp 2 (var. limitata) la sostituisco con a_n monotona.
  Infatti se a_n è monotona e limitata si ha
  $$\sum_{n=n_0}^{N} |a_{n+1} - a_n| = \left| \sum_{n=n_0}^{N} (a_{n+1} - a_n) \right| = |a_{N+1} - a_{n_0}| \leq C \quad \forall n$$
  ↳ telescopica.
  e $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| = \left| \lim_n a_n - a_{n_0} \right| < +\infty$

- Prendendo $b_n = (-1)^n$ Dirichlet estende Leibniz

Criterio di Abel

a_n, b_n in $\mathbb{R}$ o in $\mathbb{C}$ t.c.

1. a_n ha var. limitata (a_n converge)
2. $\sum b_n$ converge, cioè B_n è convergente

$\Rightarrow \sum a_n b_n$ converge.

dim

Spiego 1. **osservazione ⓐ** $\forall \varepsilon \ \exists$ n grandi $|a_n - a_{n+1}| < \varepsilon$

a_n ha var limitata $\Rightarrow \sum |a_n - a_{n+1}| < +\infty \Rightarrow a_n$ è di Cauchy

$\Rightarrow a_n$ converge.

dim

Per Cauchy devo verificare che $\forall \varepsilon \ \exists n_\varepsilon$ tc $\left|\sum_{n=N}^{M} a_n b_n\right| \leq \varepsilon \ \forall N, M \geq N_\varepsilon$

Per la somma per parti ho che

$$\left|\sum_{n=N}^{M} a_n b_n\right| = \left| \sum_{n=N}^{M} (a_n - a_{n+1}) B_n + a_{M+1} B_M - a_N B_{N-1} \right| \leq$$

disug. triang.

hp 2 B_n converge

$$\leq \sum_{N}^{M} |a_n - a_{n+1}| \, |B_n| + |a_{M+1} B_M - a_N B_{N-1}| \leq$$

oss. ⓐ sopra

$$\leq \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right) \sum_{n=N}^{M} |a_n - a_{n+1}| + \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right) |a_{M+1} - a_N| \leq$$

$$\leq 2\left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right) \sum_{n=N}^{M} |a_n - a_{n+1}| \leq 2\left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right) \frac{\varepsilon}{4\ell} = (2\ell + \varepsilon) \frac{\varepsilon}{4\ell} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{4\ell} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

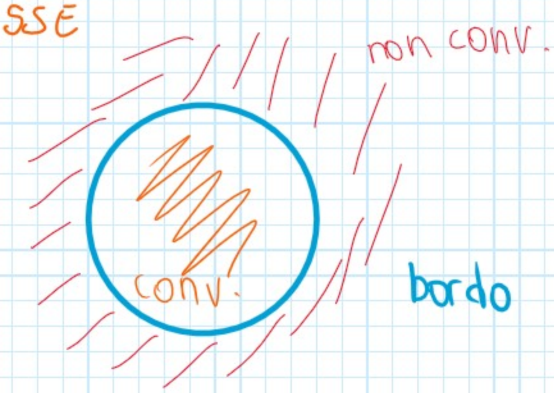
hp 1 var limitata

Se prendo $N, M \geq N_\varepsilon$ $\quad N_\varepsilon$ è tale che $|B_N| \leq \ell + \frac{\varepsilon}{2}$, $\sum_{n=N}^{M} |a_n - a_{n+1}| \leq \frac{\varepsilon}{4\ell}$

SERIE DI POTENZE COMPLESSE

$\sum a_n z^n \quad z \in \mathbb{C} \quad a_n \in \mathbb{C}$

Per quali z converge?



1) Assoluta convergenza

$\sum_m |a_n| \, |z|^m$

(a) Applico c. radice $\mapsto$ la $\sum$ converge se

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n| \, |z|^n} = |z| \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

Va bene se $|z| < R = \dfrac{1}{\limsup \sqrt[n]{a_n}}$ = raggio di convergenza

Osservo che se $a_n \to 0 \Rightarrow R \geq 1$

(b) Se $|z| \limsup \sqrt[n]{a_n} > 1 \Rightarrow \limsup |z^n a_n| > 1 \Rightarrow$

$z^n a_n \not\to 0 \Rightarrow \sum a_n z^n$ non converge.

c) Se $|z| = R$

Applico Dirichlet.

$$\sum_n a_n z^n = \sum_n (a_n R^n) \left(\frac{z}{R}\right)^n$$

se $|z| \leq R \quad z \neq R \quad \Rightarrow B_N = \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{z}{R}\right)^n = \dfrac{1 - \left(\frac{z}{R}\right)^{N+1}}{1 - \frac{z}{R}}$

$$\Rightarrow |B_N| \leq \frac{1}{\left|1 - \frac{z}{R}\right|} \Big(1 + \underbrace{\left|\frac{z}{R}\right|^{N+1}}_{|z|<R}\Big) \leq \frac{2}{\left|1 - \frac{z}{R}\right|} \quad \forall N$$

Quindi se $a_n R^n \to 0$ e ha var limitata

ho che $\sum a_n z^n$ converge $\forall z$ con $|z| = R$, $z \neq R$

d) $z = R$ va visto a parte

Esempio

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{z^n}{n} \qquad a_n = \frac{1}{n}$$

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{a_n}} = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \longrightarrow 1} = 1$$

caso 1 se $|z| < 1 \Rightarrow \sum \frac{z^n}{n}$ conv. ass.

caso 2 se $|z| > 1 \Rightarrow \frac{z^n}{n} \not\to 0 \Rightarrow \sum$ non converge

caso 3 se $|z| = 1$ e $z \neq 1$

$$|B_N| = \left|\sum_{n=n_0}^{N} z^n\right| = \left|\frac{1-z^{N+1}}{1-z} - \frac{1-z^{n_0}}{1-z}\right| = \left|\frac{z^{n_0} - z^{N+1}}{1-z}\right| \leq \frac{2}{|1-z|}$$

Inoltre $\frac{1}{n} \to 0$ ed è monotona $\Rightarrow$ ha var. limitata

$\Rightarrow \sum \frac{z^n}{n}$ converge per Dirichlet.

caso 4 se $|z|=1$ e $z=1$ $\sum \frac{z^n}{n} = \sum \frac{1}{n} = +\infty$

è s.armonica

SERIE DI POTENZA CON CENTRO $\neq 0$.

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad c_n \in \mathbb{C} \ \forall n \quad z_0 \in \mathbb{C} \quad z_0 =$ centro della serie

$\exists R \in [0, +\infty]$ raggio di convergenza.

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|c_n|}$$

1 La serie conv. assolutamente se $|z - z_0| < R$

2 La serie non converge se $|z - z_0| > R$

3 La conv. al bordo cioè per $|z - z_0| = R$ si studia con Dirichlet o con l'ass. convergenza

In ogni caso è definita $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$

$\forall z \in B_R(z_0) = \{z \text{ t.c. } |z - z_0| < R\}$

Proposizione

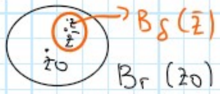
f è continua su $B_r(z_0)$

dim

Sia $\bar{z} \in B_R(z_0)$ voglio vedere che f è continua in $\bar{z}$

Sia δ t.c. $B_\delta(\bar{z}) \subseteq B_r(z_0)$, cioè $|z-z_0| \le |z-\bar{z}| + |\bar{z}-z_0| \underset{z \in B_\delta(\bar{z})}{\le} \delta + |\bar{z}-z_0|$

cioè $|\bar{z} - z_0| + \delta < R$



$\forall z \in B_\delta(\bar{z})$ $\quad \sum c_n (z-z_0)^n$ conv. ass. a $f(z)$

inoltre tale convergenza è uniforme in $z \in B_\delta(\bar{z})$

infatti $\left|f(z) - \sum_{n=0}^{N} c_n (z-z_0)^n\right| = \left|\sum_{N+1}^{\infty} c_n (z-z_0)^n\right| \underset{\text{disug. } \Delta}{\le} \sum_{N+1}^{\infty} |c_n| |z-z_0|^n \le$

$\le \sum_{N+1}^{\infty} |c_n| \big(\overbrace{|z_0 - \bar{z}| + \delta}^{R'}\big)^n \xrightarrow{N \to +\infty} 0$

nota bene

I Polinomi $S_N(z) = \sum_{n=0}^{N} c_n (z-z_0)^n$ converg. uniform a $f(z)$ in ogni cerchio $B_{R'}(z_0)$ con $R' < R$

Ora stimo $|f(z) - f(\bar{z})| = |S_N(z) - S_N(\bar{z}) + f(z) - S_N(z) + S_N(\bar{z}) - f(\bar{z})|$

$\le |S_N(z) - S_N(\bar{z})| + \underbrace{|f(z) - S_N(z)|}_{\downarrow 0} + \underbrace{|f(\bar{z}) - S_N(\bar{z})|}_{\downarrow 0}$

fisso $\varepsilon > 0$ e scelgo N_ε t.c. $|f(z') - S_N(z')| < \varepsilon \quad \forall N \ge N_\varepsilon \quad \forall z' \in B_\delta(\bar{z})$

(posso farlo per la conv. uniforme)

Fissato tale N $S_N(z)$ è continua (come funzione) $\Rightarrow \exists \delta_\varepsilon$ t.c.

$|S_N(z) - S_N(\bar{z})| \le \varepsilon$ se $z \in B_{\delta_\varepsilon}(\bar{z})$.

Per tale δ_ε ho quindi $|f(z) - f(\bar{z})| \le 3\varepsilon \quad \forall z \in B_{\delta_\varepsilon}(\bar{z})$

$\Rightarrow f$ è continua in $\bar{z}$

osservazione

con la stessa dim ho che f è unif. continua in $B_{R'}(z_0)$ $\forall R' < R$. Invece non è detto che lo sia in $B_R(z_0)$

Questo discende dal nota bene perchè ε e δ_ε valgono $\forall z \Rightarrow$ dunque uniforme continuità.

Riordinamenti

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ è un riordinamento di $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ se $\exists f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ big. t.c. $b_n = a_{f(n)}$.

Teorema

$\sum a_n$ conv ass. a $S \Rightarrow \sum b_n$ conv. ass. a S

dim

Sia $b_n = a_{f(n)}$ $\quad f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ big.

$\forall n \in \mathbb{N} \ \exists M \geq N$ t.c. $\{a_1, a_2, \dots, a_N\} \subseteq \{b_1, \dots, b_M\}$

Fisso $N' \geq M$ e guardo la differenza delle somme parziali $\left|\sum_{n=0}^{N'} (a_n - b_n)\right| \overset{*}{\leq} 2 \sum_{N+1}^{\infty} |a_n| \leq \varepsilon$

posso dividere la diff. perchè è somma finita

$$* \left|\sum_{n=0}^{N'} (a_n - b_n)\right| = \left| \cancel{\sum_{n=0}^{n} a_n} + \sum_{n=n+1}^{N'} a_n - \cancel{\sum b_n} - \sum^{N'} b_n \right|$$

per i primi fattori che sono uguali agli a_i $\quad f(a_n) \quad$ resto dei b_n

$$\leq \left|\sum_{n=n+1}^{N'} a_n\right| + \left|\sum_{n=n+1}^{N'} b_n\right| \leq \sum_{n+1}^{\infty} |a_n| + \sum_{n+1}^{\infty} |b_n| \leq 2 \sum_{N+1}^{\infty} |a_n| \leq \varepsilon$$

perchè a_n conv. ass.

In generale non è vero se $\sum a_n$ conv. semplic. ma non assolutamente

Sia $S^+ = \sum \max(a_n, 0) \in [0, +\infty]$ e $S^- = -\sum \min(a_n, 0)$ $\quad [0, +\infty)$

Osservo che $\sum a_n$ conv. ass. $\Leftrightarrow S^{\pm} < +\infty$ e $S = S^+ - S^-$

Proposizione

Se $\sum a_n$ conv. semplicemente non assolutamente
$\Rightarrow \forall S \in [-\infty, +\infty]$ $\exists$ un riordinamento $b_n = a_{f(n)}$
t.c. $\sum b_n = S$

Oss.

Se $S^+ = +\infty$ e $S^- < +\infty \Rightarrow S = +\infty$

Se $S^- = +\infty$ e $S^+ < +\infty \Rightarrow S = -\infty$

$S = S^+ - S^-$

Prodotto di Cauchy

Siano $\sum a_i = S_a$ e $\sum b_j = S_b$ due s. convergenti

$$\underbrace{\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i \sum_{j\in\mathbb{N}} b_j}_{= S_a \cdot S_b} = \sum_i \left(a_i \sum_j b_j\right) = \text{"}\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_i b_j\text{"}$$

La serie $\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{i+j=n} a_i b_j\right)$ = p. di Cauchy

Teorema

Se le serie convergono assolutamente $\Rightarrow \sum_n \sum_{i+j=n} a_i b_j$ converge assolutamente a $S_a \cdot S_b$

dim

So che $\sum_i^{+\infty} |a_i| = T_a < +\infty$ e $\sum_0^{\infty} |b_i| = T_b < +\infty$

In particolare $\sum_{n=0}^{N} \sum_{i+j=n} |a_i b_j| \leq \sum_{i=0}^{N} |a_i| \cdot \sum_{i=0}^{N} |b_i| \leq T_a T_b < +\infty$

quindi la serie prodotto conv. assolutamente $\Rightarrow$

$$\sum_n \sum_{i+j} a_i b_j = \sum_i \left(a_i \sum_j b_j\right) = S_a \cdot S_b$$

Osservazione

Non vale senza l'assoluta convergenza

Teorema di Mertens

Se $\sum a_n$ conv assolutamente e $\sum b_n$ conv. $\Rightarrow$ la serie prodotto converge ancora a $S_a \cdot S_b$.

Applicazione

$f(z) = \sum_n a_n z^n$ $\quad R_a > 0$ raggio di convergenza

$g(z) = \sum_n b_n z^n$ $\quad R_b > 0$ " "

$\Rightarrow$ la serie prodotto $\sum_n c_n z^n = f(z) g(z)$ con $c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j$ ha $R_c \geq \min(R_a, R_b)$.

SERIE DI FOURIER

$\sum a_n \sin(nx)$
$\sum a_n \cos(nx)$ con $x \in \mathbb{R}$ fissato.

Posso applicare Dirichlet con $b_n = \sin(nx)$ o $b_n = \cos(nx)$
se a_n è infinitesima e ha var limitata

$$\left|\sum_{n=0}^{N} \sin(nx)\right| \leq C \quad \forall N$$

osservo che $e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx)$

$\Rightarrow \sin(nx) = \operatorname{Im}(e^{inx})$ $\qquad \cos(nx) = \operatorname{Re}(e^{inx})$

Quindi

$$\sum_{n=0}^{N} \sin(nx) = \operatorname{Im} \sum_{n=0}^{N} (e^{ix})^n \underset{\text{se } |z|=1}{=} \begin{cases} \operatorname{Im}\left(\dfrac{1 - e^{i(N+1)x}}{1 - e^{ix}}\right) & \text{se } x \neq 2k\pi \\ 0 & \text{se } x = 2k\pi \end{cases}$$

$$\left|\sum_{n=0}^{N} \sin(nx)\right| \leq \frac{2}{|1-e^{ix}|} \qquad x \neq 2k\pi \qquad \forall N$$

$$\sum_{n=0}^{N} \sin(2k\pi n) = 0 \quad \forall N \Rightarrow \text{converge } \forall x.$$

Nel caso $\sum a_n \cos(nx)$ ho convergenza $\forall x \neq 2k\pi$

Somma dei termini di una progressione geometrica

Data una progressione geometrica di ragione $q \neq 1$ e avente come primo elemento a_1, la formula che permette di calcolare la somma S_n dei primi n termini termini della progressione geometrica è data da:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \text{con } q \neq 1$$

In matematica, una **progressione geometrica** o **successione geometrica** (detta talvolta, impropriamente, anche **serie geometrica**, vedi sotto) è una successione di numeri tali che il rapporto tra un elemento ed il suo precedente sia sempre costante. Tale costante è detta *ragione* della successione.

In generale sarà

$$a_2 = a_1 r; a_3 = a_2 r = a_1 r^2; \ldots; a_n = a_{n-1} r = a_1 r^{n-1}$$

dove $r \neq 0$ è la ragione e a_1 è il primo termine della successione.

Le progressioni geometriche hanno il vantaggio di fornire alcune semplici formule per il calcolo dei termini che le compongono.

Il termine *n*-esimo può essere infatti definito come

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

dove a_1 è il primo termine della successione.

La ragione è di conseguenza

$$r = \left(\frac{a_n}{a_1}\right)^{1/(n-1)} \quad \text{per } n > 1$$

e il primo termine della successione vale

$$a_1 = \frac{a_n}{r^{n-1}}.$$

Una successione di ragione 2 e fattore di scala 1 è

1, 2, 4, 8, 16, 32, ...

Una successione di ragione 2/3 e fattore di scala 729 è

729 (1, 2/3, 4/9, 8/27, 16/81, 32/243, 64/729, ...) = 729, 486, 324, 216, 144, 96, 64, ...

Una successione di ragione −1 e fattore di scala 3 è

3 (1, −1, 1, −1, 1, −1, 1, −1, 1, −1, ...) = 3, −3, 3, −3, 3, −3, 3, −3, 3, −3, ...

Una progressione geometrica non nulla mostra una crescita esponenziale o un decadimento esponenziale. In particolare se

- $r = 1$, il risultato è costante e vale *a*,
- $r = -1$, il risultato oscilla tra *a* e *-a*,
- $r > 1$, si ha una crescita esponenziale verso infinito (positivo),
- $r < -1$, si ha una crescita esponenziale verso infinito (con un'oscillazione tra valori positivi e negativi).
- $-1 < r < 1$, si ha un decadimento esponenziale verso zero.
- $r = 0$, il risultato è zero.

Si confrontino questi risultati con quelli di una progressione aritmetica, la quale mostra una crescita (o una diminuzione) lineare. Si noti che i due tipi di progressione sono strettamente connessi: applicando il logaritmo ai termini di una progressione geometrica si ottiene una progressione aritmetica.

Progressione aritmetica

In generale, detti:

$$a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n,\ \dots$$

i termini di una progressione aritmetica e detta d la sua ragione, ovvero:

$$a_n - a_{n-1} = d$$

esiste una **formula che ci permette di trovare l'ennesimo termine di progressione aritmetica conoscendone solo il primo termine** a_1 **e la ragione** d:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Insegnamenti tratti dagli esercizi

- Per vedere la decrescenza / crescenza si può fare la derivata prima
- $\frac{\log^\beta n}{n} \to 0$ per $n \to +\infty$ log(n) è più lento di $\forall$ cosa
- si possono usare le disuguaglianze note del log e di exp
- relazioni trigonometriche

  1 $\arcsin(1-h) = \frac{\pi}{2} - \arccos(1-h) \underset{h\to 0}{=} \frac{\pi}{2} - 2\sqrt{h} + o()$

  2 $\frac{\pi}{2} = \arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

- Per le produttorie:

  1) usare il buon senso (se i fattori $\in [0,1]$ è chiaro che la $\prod$ converge)

  2) Usare prop. novaga $\Leftrightarrow$ ho $\prod(1+a_n)$ con $a_n \geq 0$

  3) Se Novaga fallisce $\Rightarrow$ uso $e^{\text{CANE (produttoria)}}$

  4) A volte è utile sviluppare di più Taylor

es 1

$$\prod\left(\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1/2}\right) = \frac{1}{e}\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}_{\to e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/2} \to \frac{e}{e}\cdot 1 = 1$$

Definizione di funzione uniformemente continua

Cominciamo dalla **definizione di continuità uniforme**, che a una prima lettura probabilmente risulterà incomprensibile. ;)

Sia $D \subset \mathbb{R}$, un intervallo di numeri reali. Diremo che una funzione $f : D \to \mathbb{R}$ è **uniformemente continua** su D se, comunque fissiamo un numero reale positivo $\varepsilon > 0$, riusciamo a determinare un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che per ogni $x, y \in D$ che soddisfano la relazione

$$|x - y| < \delta$$

risulta che

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Utilizzando le opportune notazioni matematiche, possiamo riscrivere la definizione di continuità uniforme nel modo seguente:

$$f : D \to \mathbb{R} \text{ uniformemente continua su } D \text{ se } \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ tale che}$$

$$\forall x, y \in D \text{ per cui } |x - y| < \delta \text{ allora risulta che } |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Chi si approccia per la prima volta alla definizione di continuità uniforme potrebbe avere diverse difficoltà nell'interpretarla correttamente.

Intuitivamente stiamo dicendo che se i punti di D distano meno di δ $(|x - y| < \delta)$, allora le loro immagini disteranno meno di ε $(|f(x) - f(y)| < \varepsilon)$. Il valore di δ dipende esclusivamente dalla scelta fatta su ε e da nessun altro parametro.

In altri termini, stiamo dicendo che una funzione uniformemente continua non può impennarsi troppo o ancora che non può oscillare eccessivamente.

Differenza tra continuità uniforme e continuità semplice

I lettori più attenti avranno notato che vi è una certa somiglianza tra la definizione di funzione continua e quella di continuità uniforme, ed in effetti le definizioni sono molto simili, ma concettualmente molto diverse.

Per evidenziarne le differenze richiamiamo la definizione di funzione continua su un intervallo D: una funzione $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua su un intervallo D se $\forall x \in D$ vale la proprietà di continuità nel punto, ossia per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$, dipendente da x e da ε, tale che per ogni $y \in A$ se $|x - y| < \delta$ allora $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Riportiamo quindi la definizione di funzione continua su un intervallo e la definizione di funzione uniformemente continua su un intervallo in simboli:

$$f : D \to \mathbb{R} \text{ continua su } D \text{ se } \forall x \in D \text{ vale: } \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ tale che}$$

$$\forall y \in D \text{ per cui } |x - y| < \delta \text{ allora risulta che } |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

$$f : D \to \mathbb{R} \text{ uniformemente continua su } D \text{ se } \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ tale che}$$

$$\forall x, y \in D \text{ per cui } |x - y| < \delta \text{ allora risulta che } |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Nella definizione di continuità partiamo subito con il quantificatore universale $\forall x \in D$, mentre nella definizione di continuità uniforme lo stesso quantificatore si trova in una posizione differente, più precisamente dopo il quantificatore esistenziale $\exists \delta$. Ad un occhio inesperto questa può sembrare un'inezia, quando in realtà la **differenza tra continuità e continuità uniforme** riguarda proprio la posizione dei quantificatori universali.

Nella definizione di continuità il quantificatore $\forall x \in D$ compare prima del δ, pertanto δ dipenderà sia da ε sia da x, sottolineando come il concetto stesso di continuità sia puntuale. In parole povere prima si considera x e su tale punto si innesca la definizione di funzione continua in un punto; una funzione è continua su un intervallo se è continua in ogni punto dell'intervallo.

Nella definizione di continuità uniforme il quantificatore $\forall x \in D$ si posiziona subito dopo il δ e ciò assicura che tale valore non dipenda da x. In altri termini il delta è uniforme rispetto ad x, da cui il nome *continuità uniforme*. In parole povere l'uniforme continuità non è una proprietà puntuale e la corrispondenza $\varepsilon \implies \delta$ deve individuare un δ che soddisfi la definizione su tutto l'intervallo, non punto a punto.

Legame tra continuità uniforme e continuità

Finora abbiamo evidenziato le differenze che intercorrono tra i due concetti, è bene però sottolineare che esiste un legame tra continuità uniforme e continuità semplice derivante dal seguente teorema.

Teorema

Se una funzione $f(x)$ è uniformemente continua su un intervallo D allora è $f(x)$ è continua in D.

Traccia di dimostrazione: il δ della continuità uniforme e quello della continuità coincidono.

Il teorema stabilisce che la continuità uniforme è una condizione sufficiente per la continuità. Attenzione perché in generale non vale il viceversa: esistono funzioni continue che non sono uniformemente continue.

La questione è spesso argomento di esame orale, proprio per questo riteniamo opportuno fornire a parte un esempio di funzione continua ma non uniformemente continua su un intervallo.

altra dim del Lemma di Abel.

(2) $a_n \geq 0$, $\boxed{a_{n+1} \leq a_n}$, $\sum a_n < +\infty$ (LEMMA DI ABEL)

MOSTRARE CHE $\lim_{n\to\infty} n \cdot a_n = 0$.

PER CONDENSAZIONE, SAPPIAMO CHE $\sum 2^k a_{2^k} < +\infty$

$\Rightarrow \lim_k 2^k a_{2^k} = 0$.

SUPPONIAMO PER ASSURDO CHE $\exists\, \varepsilon > 0$ T.C.

$n_k a_{n_k} \geq \varepsilon$ PER UNA SUCCESSIONE $n_k \xrightarrow[k]{} +\infty$.

A MENO DI PASSARE A UNA SOTTOSUCC. POSSIAMO SUPPORRE

$n_{k+1} \geq 2 n_k \quad \forall k$.

$n_k \leq n_{k+1}/2$

OSSERVIAMO CHE

$$\sum_{n=n_k}^{n_{k+1}} a_n \geq \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}} a_{n_{k+1}} = (n_{k+1} - n_k)\, a_{n_{k+1}} \geq \frac{n_{k+1}}{2} a_{n_{k+1}}$$

a_n DECRESCENTE

$$\geq \varepsilon/2$$

QUESTO CONTRADDICE IL CRITERIO DI CAUCHY

$$\left[\forall \varepsilon \ \exists n_\varepsilon \text{ T.C. } \sum_{k=n}^{m} a_k \leq \varepsilon \quad \forall\, m \geq n \geq n_\varepsilon \right]$$

ASSURDO, QUINDI $n a_n \xrightarrow[n]{} 0$.

OSS: $n a_n \xrightarrow[n]{} 0$ e $a_{n+1} \leq a_n \not\Rightarrow \sum a_n < +\infty$, ES: $a_n = \frac{1}{n \log n}$