TAYLOR E FUNZIONI ANALITICHE

domenica 21 agosto 2022 10:28

Problema

Data $f(x)$ regolare con $x_0 \in dom(f)$, $m \in \mathbb{N}$, Trovare il polinomio $P_n(x)$ di grado m che approssima meglio f vicino a x_0

Cioè cerco $P_n(x)$ t.c. $f(x) = P_n(x) + o(|x-x_0|^n)$

Osservazione

Non è detto che $\exists$

Se $\exists \Rightarrow \exists!$, infatti siano P, Q di grado $m \Rightarrow P - Q = o(|x-x_0|^n) \Rightarrow P = Q$

Esempi

$m=0 \quad P_0(x) = f(x_0)$

$n=1 \quad P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

Definizione

Data $f: I \to \mathbb{R}$, I aperto, differenziabile m-volte in $x_0 \in I$

$$T_n(f, x_0)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

$\|$

polinomio di Taylor di grado n di f in x_0

Osservazione importante

$T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \quad \forall k \leq n$

esempio

$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}$

Supponiamo di volere $\cos^{(IV)}(0)$

Claim $\to$ $\cos^{IV}(0) = \frac{1}{4!} \cdot 4! = 1$

Derivo 4 volte $P_4(\cos(x), 0) \Rightarrow P_4' = -x + \frac{4x^3}{4!}$, $P_4'' = -1 + \frac{12x^2}{4!}$, $P_4''' = \frac{24}{4!}x$, $P_4^{IV} = \frac{24}{4!} = 1$

Infatti $\cos'(0) = -\sin(0) \Rightarrow \cos''(0) = -\cos(0) \Rightarrow \cos'''(0) = \sin(0) \Rightarrow \cos^{IV}(0) = \cos(0) = 1$

esempio

Teorema Peano

f differenziabile m volte in x_0, $m \in \mathbb{N}$, $f(x) = T_n(f, x_0)(x) + \underbrace{o(|x-x_0|^n)}_{\text{resto di Peano}}$

dim

Applico Hopital $(m-1)$ volte a $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - T_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} = \ldots\ldots = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - T_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)} = \frac{1}{n!} \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n)}(x_0)(x-x_0) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} =$

$\frac{1}{n!} \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n)}(x_0)(x-x_0) - f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{n!} \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} - f^{(n)}(x_0) \right]$

Corollario (max/min)

f derivabile m-volte in x_0, $n>1$, $f^{(k)}(x_0) = 0 \quad \forall 1 \leq k < n$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0 \Rightarrow$

1 m dispari, f è loc. strett. monotona

2 m pari, $f^{(n)}(x_0) > 0$, x_0 min loc. stretto

3 n pari, $f^{(n)}(x_0) < 0$, x_0 max loc stretto

dim

$$f(x) = T_n(x) + o((x-x_0)^n) = f(x_0) + \underbrace{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}}_{f^{(k)}(x_0)=0 \ \forall 1\leq k<n \text{ per hp}} (x-x_0)^n + o(x-x_0)^n$$

dim 2

Sia n pari e $f^{(n)}(x_0) > 0$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o(x-x_0)^n$$

$\exists \varepsilon > 0$ t.c. $|o(x-x_0)^n| \leq \frac{f^{(n)}(x_0)}{2n!}(x-x_0)^n \ \forall x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$

Quindi per la permanenza del segno $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o(x-x_0)^n$ ha lo stesso segno di $f^{(n)}(x_0)$ in un int. di x_0

In particolare $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o(x-x_0)^n > 0 \Rightarrow$ anche $f(x) - f(x_0) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$ in un int di $x_0 \Rightarrow$ x_0 p.to di min relativo.

Analogamente se $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ è p.to di max locale

Calcolo di $T_n(f, x_0)$

$T_n(af + bg, x_0) = a T_n(f, x_0) + b T_n(g, x_0) \quad a, b \in \mathbb{R}$

$T_{n-1}(f', x_0) = T_n(f, x_0)'$

Polinomi di f. elementari

- $f(x) = e^x \quad x_0 = 0 \quad f^{(k)}(x) = e^x \ \forall k \quad f^{(k)}(0) = 1 \ \forall k \Rightarrow$

  $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \rightsquigarrow e^x$

- $f(x) = \frac{1}{1-x} \quad f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$ e $f^{(k)}(0) = k!$

  $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k \rightsquigarrow \frac{1}{1-x}$

- $f(x) = \frac{1}{1+x} \rightsquigarrow T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k$

- $f(x) = \log(1+x) \quad f'(x) = \frac{1}{1+x} \quad T_{n+1}(f)' = T_n(f') = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k \Rightarrow T_{n+1}(f) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + \overset{\log(1)}{\cancel{f(0)}}$

  $T_{n+1}(f) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$

- $f(x) = \sin x \quad T_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

- $f(x) = \cos x \quad T_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$

- $f(x) = \frac{1}{1+x^2} \rightsquigarrow T_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k}$

- $f(x) = \arctan x \quad T_{2n+1}(x)' = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} \Rightarrow$

  $\arctan x \rightsquigarrow T_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$

- $(1+x)^\alpha \rightsquigarrow T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k \quad \alpha \neq 0$

Osservazione importante

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ pari e } x_0 = 0 \Rightarrow T_n(x) \text{ ha solo monomi con esponente pari} \\ f \text{ dispari e } x_0 = 0 \Rightarrow T_n(x) \text{ ha solo monomi con esponente dispari} \end{array}\right\} \text{vedi } \sin x \text{ e } \cos x$$

Osservazione

Anche se f è derivabile ∞ volte in x_0 non è detto che $\lim_{n \to +\infty} T_n(x) = f(x) \quad x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$

Controesempio

Funzione con infinite derivate che non ammette serie di Taylor

Pubblicato il 3 Settembre 2018 da CARAM-L

Una funzione particolarmente utile per costruire controesempi in analisi reale è la seguente:

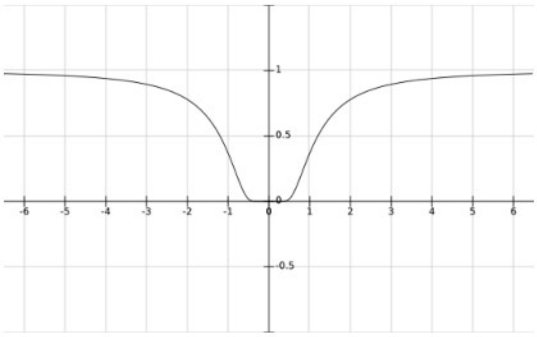
$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n} = 0 \quad \forall n$$

$$\Rightarrow T_n(x) = 0 \quad \forall n$$

La sua proprietà particolare è di essere infinitamente derivabile dappertutto, ma tutte le sue derivate in 0 valgono 0. Quindi la serie di Taylor centrata all'origine vale esattamente 0 per ogni x, e quindi abbiamo un esempio di *una funzione infinitamente derivabile dappertutto che non ammette serie di Taylor.*

Il grafico della funzione è circa il seguente:



Come vedete la funzione è estremamente piatta attorno ad $x = 0$, e ciò proprio perché tutte le sue derivate sono nulle all'origine. Ciò non vuol dire che $f(x)$ sia costante vicino a 0, come è chiaro dalla sua definizione.

Teorema La Grange

f derivabile $(n+1)$-volte in $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$

$$f(x) = T_n(f, x_0)(x) + \underbrace{f^{(n+1)}(t)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}}_{\text{resto Lagrange}} \quad \text{con } t \in (x_0, x) \text{ oppure } t \in (x, x_0)$$

dim

Fisso $x > x_0$ e applico il lemma sotto in (x_0, x) con $g(t) = f(t) - T_n(t) - \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}(t - x_0)^{n+1}$

$g^{(k)}(x_0) = 0 \quad \forall k \le n, \quad g(x) = 0$

$\Rightarrow \exists\, t \in (x_0, x)$ t.c. $g^{(n+1)}(t) = 0$

$\Rightarrow 0 = f^{(n+1)}(t) - (n+1)!\frac{f(x) - T_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} \Rightarrow f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(t)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$

Osservazione

Per $n = 0$ è il Teo di La Grange.

Lemma

g derivabile $(n+1)$-volte in (a, b)

$g^{(k)}(a) = g(b) = 0 \qquad 0 \le k \le n$

$\Rightarrow \exists\, t \in (a, b)$ t.c. $g^{(n+1)}(t) = 0$

dim

Applico Rolle a $g \Rightarrow \exists\, t_1$ t.c. $g'(t_1) = 0$

Applico Rolle a g' in $[a, t_1] \Rightarrow \exists\, t_2$ t.c. $g''(t_2) = 0$

⋮

Applico Rolle a $g^{(n)}$ in $[a, t_n] \Rightarrow \exists\, t = t_{n+1}$ t.c. $g^{(n+1)}(t) = 0$

Definizione

f è derivabile ∞ in x_0, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ si dice serie di Taylor di f in x_0

Serie di Taylor delle funzioni elementari

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

dim

$$e^x - T_n(x) = e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \underset{\text{La Grange}}{=} e^t \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{con } |t| < |x| \Rightarrow |e^x - T_n(x)| \le \frac{e^{|x|}|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$

$|\log(1+x) - T_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{?} 0$

$\log(1+x) - T_n \underset{\text{La Grange}}{=} \log(1+t)^{(n+1)} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \quad |t| < |x|$

Passo ai moduli $\Rightarrow |\log(1+x) - T_n| \le \frac{1}{n+1}\left|\frac{x}{1+t}\right|^{n+1}$

$\log(1+t)^{n+1} = (-1)^{n+1} \frac{n!}{(1+t)^{n+1}}$ $\qquad \Leftrightarrow \qquad$ $\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ $t \in$ int o per arb. di t

$|1+t| > |x| \Rightarrow 1 + |t| > |x| \Rightarrow 1 > |x| - |t| > 0 \Leftrightarrow |x| < 1$

Alter. si tratta come Σ potente.

$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

Definizione

$f: A \to \mathbb{R}$ $A \subset \mathbb{R}$ aperto $f \in C^\infty(A)$ è analitica in A se $\forall x_0 \in A$ f coincide con la sua serie di Taylor in x_0

in simboli: $\exists r$ t.c. $f(x) = \sum \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \ \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)$

cioè localmente coincide con la sua Σ di Taylor in quel punto per ogni punto

esempi

e^x, $\arctan x$ sono analitiche su $\mathbb{R}$, $\frac{1}{1+x}$ è analitica su $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \ne 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ è analitica in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Serie di Taylor e Serie di potenza

A) Proposizione Derivata della Somma Σpotenze = Somma delle derivate ΣTaylor

$f(x) = \sum_n a_n (x-x_0)^n \quad x \in I = (x_0 - R, x_0 + R)$ $R > 0$ raggio di convergenza $\Rightarrow f \in C^\infty(I)$ e $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

dim

Abbiamo visto che $f \in C^\infty$ e $f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{d^{(k)}}{dx^{(k)}}(x-x_0)^n = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{a_n\, n!}{(n-k)!}(x-x_0)^{n-k} = f^{(k)}(x_0) = a_k k!$

derivo k-volte; si cancellano tutti i termini fino a K

Osservazioni

la funzione definita come somma di una Σ potenze è continua

è anche derivabile con derivata = somma termine a termine dei monomi delle derivate

La derivata come serie ha lo stesso R.

B) Lemma serve per prop sotto e per prop A.

$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} \underbrace{x^{n-k}}_{\text{Somma } \Sigma \text{ geometrica}} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad |x|<1$

uscivano fuori derivando k-volte Σ potenze

dim

Se $k=0$ $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, derivo k-volte, $\sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$

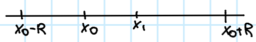
derivo k volte

Proposizione $\sum$ potenze è analitica

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ $\quad x\in I=(x_0-R,x_0+R)$ R raggio di conv. $\Rightarrow$ f è analitica in I cioè $\forall x_1\in I\ \exists r=r(x_1)$ t.c. $f(x)=\sum_n \frac{f^{(n)}(x_1)(x-x_1)^n}{n!}$ con $x\in(x_1-r,x_1+r)$

dim

Fisso $x_1 \in I$



Obiettivo $\to$ dim che $f(x)=\sum$potenze è analitica

$\hookrightarrow$ cioè preso un p.to x_1 e vicino ea f. coincide con la sua $\sum$ Taylor. (lo faccio localmente) p.to per p.to

Step 1 $\mapsto$ dimostro che $f(x)-\sum_n f^{(n)}(x_1)\frac{(x-x_1)^n}{n!}$ converge per x vicino a x_1

1a) Stimo la derivata K-esima in x_1

1b) Mi accorgo che le der K-esime hanno crescita limitata

1c) $f=\sum$ converge e in particolare converge nell'intervallo massimale

Step 2 $\mapsto$ Mostrare che la "cosa" a cui converge è la mia f. analitica.
"funzione"

Perchè mi serve x_1? cioè dimostrare l'analiticità localmente?

Perchè dalla def. so che f è analitica se si può scrivere come la sua $\sum$ Taylor in OGNI punto cioè in tutto il Dom.

Con i polinomi non ho problemi perchè sono definiti in ogni p.to del dominio mentre $\sum$ potenza possono avere R finito

e non coincidere globalmente con $\sum$ Taylor.

STEP 1

a) Calcolo $f^{(K)}(x_1)=\sum_{n=K}^{\infty} a_n \frac{n!}{(n-K)!}(x_1-x_0)^{n-K}$

$r<R \Rightarrow \frac{1}{r}>\frac{1}{R}$

b) Ora $\forall r<R$ $\quad |a_n|\le\frac{c}{r^n}$ $\quad$ perchè $\frac{1}{R}=\limsup\sqrt[n]{|a_n|} \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|}<\frac{1}{r} \Rightarrow |a_n|\le\frac{c}{r^n}$

Quindi $|f^{(K)}(x_1)|\le\sum_{n=K}^{\infty}\frac{n!}{(n-K)!}\frac{c}{r^n}(x_1-x_0)^{n-K}=\frac{c}{r^K}\sum_{n=K}^{\infty}\frac{n!}{(n-K)!}\left(\frac{|x_1-x_0|}{r}\right)^{n-K}$ $\quad r\in(|x_1-x_0|,R)$

voglio sia <1 per applicare lemma

Applico lemma B

manip. algebriche

$|f^{(K)}(x_1)|\le\frac{c\cdot r}{r^{K+1}}\frac{K!}{\left(1-\frac{|x_1-x_0|}{r}\right)^{K+1}}=\underbrace{\frac{cr}{(r-|x_1-x_0|)}}_{c'}\frac{K!}{(r-|x_1-x_0|)^K} \Rightarrow \frac{f^{(K)}(x_1)}{K!}\overset{*}{\le}\frac{c'}{(r-|x_1-x_0|)^K} \Rightarrow \sum\frac{f^{(K)}(x_1)}{K!}(x-x_1)^K$ converge

c) se $|x-x_1|<r-|x_1-x_0|$ in part. converge in $(x_1-(R-|x_1-x_0|),\ x_1+(R-|x_1-x_0|))$ max Interv. prima di uscire dal bordo
spingo fino a R per arbitrar. di r.

STEP 2

Sia $g(x)$ la sua somma (cioè quello a cui converge). Dim che $g=f$.

Siano S_n le somme parziali della $\sum^{\infty} \Rightarrow S_n\to g(x)$

Stimo $(f-S_n)$ con La Grange $\quad |f(x)-S_n(x)|\le\left|\frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!}\right||x-x_1|^{n+1}$ con $y\in(x,x_1)$

$\xrightarrow{\text{sono}}$ pol. di Taylor

$|f(x)-S_n(x)|\overset{*}{\le}\frac{c'|x-x_1|^{n+1}}{r-|y-x_0|^{n+1}}\xrightarrow[n]{}0$ perchè $|x-x_1|<r-|y-x_0|$

$x\in(x_1-r_1,x_1+r_1)$ è vero se $r_1<R-|x_0-x_1|-r_1$

Quindi $S_n\to g$ $\quad f(x)-S_n(x)\to0 \Rightarrow g=f \Rightarrow f$ è analitica.

Corollario

f,g analitiche su I int. aperto se $\forall K$ $f^{(K)}(x_0)=g^{(K)}(x_0) \Rightarrow f=g$ su I

dim

Sia $A=\{x\in I \text{ t.c. } f^{(K)}(x)=g^{(K)}(x)\ \forall K\}$

$x\in A \Rightarrow \exists r$ t.c. $(x-r,x+r)\subseteq A$ e $g=f$ in $(x-r,x+r) \Rightarrow A$ è aperto in I

Viceversa $x_n\in A \Rightarrow x_n\to x\in I \overset{\text{continuità}}{\Rightarrow} x\in A \Rightarrow A$ è chiuso in I

A aperto e chiuso in $I \Rightarrow A=I$
è vero $\Leftrightarrow I$ intervallo cioè I connesso

Osservazione

f, g analitiche $\Rightarrow (af + bg)$ è anal. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ cioè le f analitiche sono uno sp. v.

Corollario

$f, g: I \to \mathbb{R}$ analitiche, I int aperto, $x_n \in I$ succ. convergente in I cioè $x_n \to x_0 \in I$ e $f(x_n) = g(x_n)\ \forall n \Rightarrow f = g$ in I

dim

È la stessa cosa delle $f^{(k)} = g^{(k)}$

Considero $h(x) =: f(x) - g(x)$ analitiche con $h(x_n) = 0\ \forall n$.

Voglio mostrare che $h \equiv 0$

Passo al limite $\Rightarrow h(x_0) = 0$

Per Rolle $\forall x_n\ \exists x_n^{(1)} \in (x_0, x_n) \vee (x_n, x_0)$ t.c. $h'(x_n^{(1)}) = 0\ \forall n$

Passo al limite $h'(x_0) = 0$

Itero $\Rightarrow h^{(k)}(x_0) = 0\ \forall k \overset{\text{corollario precedente}}{\Rightarrow} h \equiv 0 \Rightarrow f = g$ in I

Esempi di funz. analitiche

e^x, $\sin x$, $\cos x$, $p(x)$ su $\mathbb{R}$

$\frac{1}{1 \pm x}$ su $(-1, 1)$

Teorema

f, g analitiche $\Rightarrow f \cdot g$, $\underset{}{\overset{\text{segno}}{f \circ g}}$, $\overset{\text{se } f' \neq 0}{f^{-1}}$ analitiche

Proposizione

$f: I \to \mathbb{R}$ analitica $\Leftrightarrow f \in C^\infty(I)$ e $\forall x_0 \in I\ \exists r > 0$ e $\exists C, R > 0$ t.c. $\frac{|f^{(k)}(x)|}{k!} \le CR^k\ \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)$

Serve un controllo sulle derivate k-esime per garantire l'analiticità delle funzioni

Definizione

$f: I \to \mathbb{R}$ analitica, I intervallo

$g = \cup \{ h : h : J \to \mathbb{R}$ analitica $J \subseteq I$ intervallo$\}$

$h|_I = f$

$h_1 : J_1 \to \mathbb{R}$

$h_2 : J_2 \to \mathbb{R}$

$$h_1 \cup h_2 (x) = \begin{cases} h_1(x) & \text{se } x \in J_1 \\ h_2(x) & \text{se } x \in J_2 \end{cases}$$

è ben def perché $h_1 = h_2$ su $J_1 \cap J_2$

Sia $g: J_{max} \to \mathbb{R}$

prolungamento analitico di f ed è univoc. determinato da f.

Taylor con resto integrale

Proposizione

Se f è derivabile n-volte e $f^{(n)}$ è integrabile allora

$$f(x) = \overbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \underbrace{\boxed{\int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt}}_{R_n}}^{T_n}$$

dim

Per induzione

PB: n=1 $f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt$ vera per TFCI

OSS: $\frac{d}{dt}\left[-\frac{(x-t)^n}{n!}\right] = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$

P.I Suppongo T_n vera e scrivo $R_n = \int_{x_0}^{x} \underbrace{\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}}_{\text{integro}} \underbrace{f^{(n)}(t)}_{\text{derivo}}\,dt = \left[-\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t)\right]_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt =$

$= \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + R_{n+1}$

T_n vera $\Rightarrow T_{n+1}$ vera

Confronto tra R_n e Lagrange

$\xi \in [x_0, x]$ $\quad f^{(n)}(\xi)\frac{(x-x_0)^n}{n!} = R_n = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt$

$$f^{(n)}(\xi) = \int_{x_0}^{x} f^{(n)}(t) \underbrace{\left[\frac{(x-x_0)^n}{n!}\right]^{-1} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}}_{P_n(t) \geq 0} dt$$

$$f^{(n)}(\xi) = \int_{x_0}^{x} f^{(n)}(t) \cdot P_n(t)\,dt \quad \text{con} \quad \int_{x_0}^{x} P_n(t)\,dt = 1$$

Osservazione:

Se $f^{(n)}$ è continua posso dim. la formula di Taylor con resto di Lagrange a partire da quella con resto integrale

Infatti osservo che $\underset{\substack{\min f^{(n)} \\ [x_0,x]}}{m_n} \int_{x_0}^{x} P_n(t)\,dt \leq \int_{x_0}^{x} f^{(n)}(t)\,dt\ P_n(t)\,dt \leq \underset{\substack{\max f^{(n)} \\ [x_0,x]}}{M_n} \underbrace{\int_{x_0}^{x} P_n(t)\,dt}_{=1}$

Se $f^{(n)}$ è continua $\Rightarrow \exists\, \xi \in [x_0, x]$ t.c. $f^{(n)}(\xi) = \int_{x_0}^{x} f^{(n)}(t) P_n(t)\,dt$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}}{k!}(x-x_0)^k + \frac{(x-x_0)^n}{n!} \underbrace{\int_{x_0}^{x} f^{(n)}(t) P_n(t)\,dt}_{= f^{(n)}(\xi)}$$

La formula col resto integrale produce stime più precise di quelle che si ottengono col resto di Lagrange

Resto di Peano: è un resto di tipo qualitativo perché non ci dice esattamente quant'è la differenza tra la funzione e il polinomio, sappiamo solo che tale resto tende a zero quando x tende al centro dello sviluppo, x_0. Il resto alla Peano ti dice sostanzialmente che la differenza tra la funzione e il suo polinomio di Taylor tende a zero, e ti dice anche a che velocità tende a zero, ma non va oltre questo.

Resto di Lagrange: il resto alla Lagrange è di tipo quantitativo e ci dice che:

- il resto è infinitesimo per x che tende al centro dello sviluppo e a che velocità tende a zero.

- è possibile trovare una **stima** di tipo numerico del resto; Attenzione una stima e non il valore esatto del resto. Se conoscessimo il valore esatto del resto allora saremmo a cavallo 😁.

Più precisamente sappiamo che il resto alla Lagrange si presenta nella forma:

$R_{n,x_0} = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n$ (ho riportato quello che c'è nella lezione che ti ho linkato)

dove $c \in (a, b)$.

Conosciamo l'espressione di $f^{(n)}(x)$ (la calcoliamo!) ma non conosciamo esplicitamente c, sappiamo al più l'intervallo in cui si trova.

Queste informazioni non sono da sottovalutare perché ci permette di *tenere sotto controllo l' errore* che commettiamo ogniqualvolta sostituiamo lo sviluppo di Taylor alla funzione.