# ORALI G1

| 14/06/21 | ARGOMENTI |
|---|---|
| **ORALE 1** | **1)** Presa A una matrice quadrata in R, diagonalizzabile in C, cosa possiamo dire sulla forma di Jordan Reale?<br>• Caratterizzare la forma di Jordan reale (quella coi complessi espressi in blocchi di taglia 2x2)<br><br>**2)** Com'è fatto il polinomio minimo di A? Dimostrare che una matrice/endomorfismo è diagonalizzabile se il polinomio minimo è della forma appena detta<br>• Dimostrazione del criterio di diagonalizzazione tramite il polinomio minimo. (dimostrazione) Manfredini<br><br>**3)** Considerato il teorema spettrale, ci chiediamo si può fare con le matrice triangolari reali?<br><br>**4)** Una matrice triangolabile si può triangolare con una matrice ∈O(n)? (Manfredini) |
| **ORALE 2** | **1)** Cos'è uno spazio euclideo?<br><br>**2)** Come si può caratterizzare uno spazio euclideo con le matrici?<br>• (Descriverlo mediante le matrici; un endomorfismo come vedo se è autoaggiunto lavorando in coordinate)<br><br>**3)** Una matrice simmetrica ha almeno un autovalore reale / ha polinomio caratteristico completamente fattorizzabile in R (dimostrazione)<br><br>**4)** Relazione fra TSR (2o enunciato astratto) e dimostrazione con la sfera di quello sopra<br><br>**5)** Determinante formula con le permutazioni |
| **ORALE 3** | **1)** Cosa vuol dire che un endomorfismo è triangolabile?<br><br>**2)** Dimostrare che f è triangolabile se il polinomio caratteristico è completamente fattorizzabile<br><br>**3)** Se un campo è algebricamente chiuso, allora ogni endomorfismo è triangolabile. Vale viceversa? (si)<br><br>**4)** Piano iperbolico<br><br>**5)** Cos'è l' indice di Witt? |
| **ORALE 4** | **1)** Preso uno spazio vettoriale V su K con phi prodotto scalare, cosa vuol dire prendere base ortogonale?<br><br>**2)** Esistono sempre basi ortogonali (per char != 2)?<br><br>**3)** Cos'è una base di uno spazio vettoriale?<br><br>**4)** Date 2 basi di un medesimo spazio vettoriale allora hanno stessa cardinalità |
| **ORALE 5** | **1)** Parliamo di diagonalizzabilità di un endomorfismo, in particolare puoi mostrare che se esiste una base di autovettori allora V= $V_{\lambda i}$ +..... + $V_{\lambda n}$?<br>• Diagonalizzabilità (equivalenza 3 enunciati)<br><br>**2)** W contenuto in V con dim(V)=dim(W) allora W=V cioè due sottospazi della stessa dimensione sono uguali |

| | |
|---|---|
| | **3)** Preso uno spazio vettoriale con prodotto scalare, cosa vuol dire prendere base ortogonale? Esistono sempre (per char != 2)? Dimostralo.<br><br>**4)** Presa base ortogonale come verifico che é non degenere?<br><br>**5)** Nel caso di coefficienti nulli, il numero di essi cosa mi determina?? (Radicale) dimostriamolo. Cioè come vedo da una base ortonormale che il numero di zeri sulla diagonale è la dimensione del radicale?<br><br>**6)** La forma di Jordan come funzione è continua? |
| **ORALE 6** | **1)** Cosa vuol dire che un prodotto scalare è anisotropo?<br><br>**2)** Su R chi sono gli anisotropi? E su C?<br><br>**3)** Considero i razionali, la nozione di definito resta sensata, resta vero che gli anisotropi sono quelli definiti?<br><br>**4)** Prendiamo spazio vettoriale e due endomorfismi, cosa vuol dire che sono coniugati?<br><br>**5)** Presi due endomorfismi coniugati f e g, W sottospazio di V f-invariante, trovare un sottospazio Z g-invariante della stessa dimensione di W (Manfredini) |
| **ORALE 7** | **1)** Dimostra che i vettori di due autospazi sono ortogonali tra di loro<br><br>**2)** Equivalenza tra enunciati astratti TSR<br><br>**3)** Teoremi di rappresentazione |
| **ORALE 8** | **1)** f∈ $End(V)$, $\forall\, v \neq 0$,v è autovettore per f.<br>Cosa posso dire su f ? (é un multiplo dell'identità) Manfredini<br><br>**2)** Centro matrici quadrate Manfredini<br><br>**3)** Matrici di rango dato (fissato) sono un sottospazio? (NO)<br><br>**4)** Dimensione dello spazio generato dalle matrici di rango R<br><br>**5)** E' vero che ogni matrice di rango 1 è somma di due matrici di rango 2?<br><br>**6)** Definizione di matrice normale<br>perchè sono importanti? → teorema spettrale normale |
| **ORALE 9** | **1)** Algoritmo di Gauss<br><br>**2)** In uno spazio euclideo con f* = f, prodotto scalare def positivo , $\lambda_1, \lambda_2$ *autovalori distinti* $V_{\lambda 1} \oplus^{\perp} V_{\lambda 2}$(dimostrare che è $\oplus^{\perp}$, cioè somma diretta ortogonale ) |
| **ORALE 10** | **1)** Cosa è l' annullatore di un sottospazio?<br>• E' sottospazio del duale anche l'annullatore di un insieme X? Sì e dimostra la formula per la dimensione di Ann X)<br><br>**2)** Rapporto tra Span(S) e Ann(S)<br><br>**3)** U(n) |

| | |
|---|---|
| **ORALE 11** | **1)** Isomorfismo tra spazio, duale e poi da duale a biduale<br>**2)** Matrice simmetrica R ,esiste sempre una radice quadrata(visto ad esercitazione) far vedere l'unicità e come si fa a costruirla. |
| **ORALE 12** | **1)** f$\in$ $End(V)$diagonale. W$\subset$ $V$ f-invariante cosa posso dire su $ff_{\|W}$? E' diagonalizzabile anche lui?<br>**2)** Definizione di polinomio minimo e polinomio minimo restrizione<br>**3)** $\mu(f) = \Pi(t - \lambda_i) \Leftrightarrow f$ è $diagonale$ Manfredini |
| **ORALE 13** | **1)** Teoria complementi non degeneri<br>**2)** Polinomio caratteristico e molteplicità |
| **ORALE 14** | **1)** Il polinomio minimo divide il polinomio caratteristico<br>**2)** Decomposizione di witt del prodotto scalare |
| **ORALE 15** | **1)** Segnatura prodotto scalare reale. Come si calcolano effettivamente questi indici?<br>**2)** Legami tra blocchi di Jordan e polinomio minimo(strina di dimensioni) |
| **ORALE 16** | **1)** $f \in End(V)$ , $p_1, p_2 \in K[t]$ t.c $(p_1, p_2)$ =1 , q =$p_1p_2$<br>I(f) $\rightarrow$ V=Ker$p_1$(f)$\oplus$Ker$p_2(f)$<br>**2)** V R-spazio vettoriale , f diagonale $\exists\ \varphi > 0$ t.c f = f* ? |

| 17/06/21 | ARGOMENTI | |
|---|---|---|
| **ORALE 17** | **1)** Teorema di Sylvester→ la segnatura è invariante completo<br><br>**2)** Esistenza di basi ortogonali normalizzate<br><br>**3)** Normalizzazione di basi ortogonali<br><br>**4)** Dove usiamo nel teorema di sylvester il fatto che le basi si possono normalizzare?<br>● Serve che la base sia normalizzata per Sylvester? (NO)<br>● A cosa serve quindi normalizzare?(Per la forma normale altrimenti la segnatura non sarebbe un invariante completo)<br><br>**5)** Se invece di lavorare su R avessimo lavorato su Q, cosa si salva?<br><br>**6)** Se ho uno spazio vettoriale V e due endomorfismi f e g, e sappiamo che sono entrambi diagonalizzabili, c'è un criterio che dice quando sono simultaneamente diagonalizzabili, enuncia e dimostra il criterio.(Manfredini)<br>● Cosa vuol dire che$V_{\lambda i}$ è diagonalizzabile?<br>● Sapendo che ogni autospazio di f è invariante per g e la restrizione da g a $V_{\lambda i}$ è diagonalizzabile costruisci una base di vettori comuni a entrambi.<br>● Cosa vuol dire che un endomorfismo è diagonalizzabile? Usa questo per completare la dimostrazione precedente(Manfredini) | |
| **ORALE 18** | **1)** Una matrice A è invertibile se e solo se il determinante di A è diverso da 0. Dimostralo<br><br>**2)** Teorema spettrale reale cosa dice? (Manfredini)<br>● Dimostra che lo spettro di un autoaggiunto è reale. Come si fa?<br>● Dimostra che lo spettro di una matrice simmetrica è reale<br>● Dimostra che il polinomio caratteristico di A è completamente fattorizzabile su R<br><br>**3)** A simmetrica è definita positiva se e sole se tutti gli autovalori di A sono positivi<br><br>**4)** Versione matriciale del teorema spettrale<br><br>**5)** Matrici ortogonali e cambiamenti di base tra matrici ortonormali(Manfredini) | |
| **ORALE 19** | **1)** Se prendo una matrice reale (n x n) e so che come matrice complessa è diagonalizzabile cosa posso dire della sua forma di Jordan reale?<br>● Supponi che sia diagonalizzabile sui complessi e ha tutti gli autovalori reali, come è la forma di Jordan di questa matrice?<br><br>**2)** Fammi degli esempi di matrici reali diagonalizzabili su C ma non su R<br><br>**3)** Se prendo una matrice ortogonale normale P, che proprietà ha ($P^{-1} = P^T$)? E' diagonalizzabile su C(SI)? E su R?<br><br>**4)** Matrici ortogonali sono diagonalizzabili su C?<br><br>**5)** Ho uno spazio vettoriale e un endomorfismo, quale è la condizione affinchè l'endomorfismo sia triangolabile ? | |
| **ORALE 20** | **1)** Data una matrice reale e simmetrica A la posso considerare come endomorfismo | |

| | | |
|---|---|---|
| | su $R^n$ oppure la posso considerare come prodotto scalare. A come prodotto scalare è definita positiva se e solo se tutti gli autovalori di A sono positivi.Dimostralo<br>• Chi è il prodotto scalare associato ad A su $R^n$?<br>• Come sono fatti i prodotti scalari su$R^n$?<br>• Come agisce il gruppo lineare sugli endomorfismi?<br>• Come agisce il gruppo lineare in termini di prodotto scalare?<br><br>**2)** Teorema spettrale reale | |
| **ORALE 21** | **1)** Data una matrice reale e simmetrica A la posso considerare come endomorfismo su $R^n$ oppure la posso considerare come prodotto scalare. A come prodotto scalare è definita positiva se e solo se tutti gli autovalori di A sono positivi.Dimostralo<br>• Matrici ortogonali, versione matriciale del teorema spettrale<br>• Cosa vuol dire che A è definita positiva?<br><br>**2)** Supponi di avere uno spazio vettoriale V e un endomorfismo triangolabile di questo spazio vettoriale, e poi ha W un sottospazio di V f-invariante. Considera la restrizione di $f_{\|W}$, rimane triangolabile? (Si) Dimostralo. | |
| **ORALE 22** | **1)** Dato uno spazio vettoriale V, cosa è il gruppo delle trasformazioni affini di V?<br><br>**2)** Teorema di decomposizione primaria | |
| **ORALE 23** | **1)** Teorema spettrale reale<br><br>**2)** Se uno spazio qualsiasi ha una base numerabile allora tutte le basi sono numerabili<br>• spazio dei polinomi | |
| **ORALE 24** | **1)** ESERCIZIO.<br>Prendi $R^3$con $\Phi_A$ e A ha tutti 0 eccetto che nella diagonale che ha 1,1,-1 , la segnatura=(2,1,0).<br>Sia W ssp di $R^3$ con dim W=2 . Al variare di W quali sono le possibili segnature di $\Phi_{\|W}$ ? → decomposizione di Witt<br>• Cos'è un piano iperbolico?<br>• Sui reali un piano iperbolico che segnature ha?(1,-1) Perché?<br>• In dimensione 2, non degenere, reale, quali sono le segnature possibili?(1,1,0), (1,-1,0)<br>(l'ultima è sempre 0 perchè è non degenere)<br>( alla fine l'indice di Witt è 1)<br><br>**2)** Prendiamo un endomorfismo f di uno spazio vettoriale. Come sono fatti i ker($f^k$)? E le immagini? (Manfredini) | |
| **ORALE 25** | **1)** Se io prendo una matrice simmetrica reale definita positiva è vero che ammette una radice quadrata positiva ? Ce ne sono altre ?<br>• Caso particolare matrice simmetrica che al quadrato fa l'identità, (rispetto alla domanda precedente)<br>• Caso particolare se la matrice è multiplo dell'identità<br><br>**2)** Se ho 3 sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale, cosa vuol dire che sono in somma diretta? Quanto varrebbe la dimensione? | |

| ORALE 26 | 1) una matrice è invertibile se e solo se il determinante è diverso da 0<br><br>2) Come si dimostra che det(A)= det($A^t$)?<br><br>3) Come si calcola il determinante di A usando l'algoritmo di Gauss?<br><br>4) Cosa è una matrice complessa normale?<br><br>5) Teorema spettrale hermitiano<br>• Cosa è una matrice unitaria?<br>• B ∈ $M(n, R)$ $\exists\ k\ tc\ B^k = B^t$ cosa possiamo dire? Se la penso come matrice complessa è normale? | |
|---|---|---|

| 21/06/21 | ARGOMENTI | |
|---|---|---|
| ORALE 27 | 1) Spazio vettoriale $R^3$ e W⊆ $R^3$ sottospazio con dimW=2 $B_W = \{w_1, w_2\}$ *base di* $W$,<br>$M_B(\Phi) =$ [tutti 1].<br>• Quale segnatura può realizzare?<br>• Segnatura di $\Phi_{\vert W}$?<br><br>2) Endomorfismo diagonalizzabile(definizione)<br>• Criterio di diagonalizzabilità | |
| ORALE 28 | 1) Presa una matrice reale antisimmetrica → è diagonalizzabile?<br><br>2) Cosa è una matrice normale?<br><br>3) A meno di trasformazione affine, quali sono le coniche senza centro? | |
| ORALE 29 | 1) A matrice simmetrica reale, sappiamo che il polinomio caratteristico è completamente fattorizzabile. A è definita positiva se e solo se tutti gli autovalori sono definiti positivi | |
| ORALE 30 | 1) Matrice ortogonale reale tale che $P^{-1} = P^t$<br><br>2) Matrice 2 x 2 che presenta prodotto scalare standard?<br><br>3) Una rotazione del piano è diagonalizzabile?<br><br>4) Teorema di Sylvester reale | |
| ORALE 31 | 1) V spazio vettoriale su R, f endomorfismo diagonalizzabile, Esiste prodotto scalare | |

| | | |
|---|---|---|
| | definito positivo tale che f è autoaggiunto per quel prodotto? | |
| **ORALE 32** | **1)** Matrice quadrata reale triangolabile → lo è in modo ortogonale?<br>**2)** Bandiera di sottospazi portata da una base | |

| **22/06/21** | **ARGOMENTI** | |
|---|---|---|
| **ORALE 33** | **1)** Che cos'è una matrice ortogonale reale?<br>**2)** Com'è la forma di Jordan-reale di una matrice ortogonale?<br>**3)** Dettagli della forma di Jordan-complessa<br>**4)** Una matrice ortogonale reale è diagonalizzabile su i complessi?<br>• dimostrare che gli autovalori hanno modulo 1<br>**5)** Definire Φil prodotto Hermitiano<br>**6)** Prendi uno sp.vett (V, $\phi$) $\phi \in$ ps(V) e prendi W ssp. di V :<br>• cos'è lo spazio ortogonale a W?<br>• qual'è la dimensione ortogonale?<br>• def $\phi$ non deg.<br>• dimostrare :<br>se $\phi$ non deg allora dim $W^{\perp}$= dim V- dim W | |
| **ORALE 34** | **1)** Prendiamo una matrice reale triangolabile,essa sarà ortogonale triangolabile?<br>**2)** Relazione di coniugazione in termini di matrici<br>**3)** Cosa vuol dire matrice ortogonale triangolabile?<br>**4)** Cosa vuol dire essere ortogonalmente simili?<br>**5)** Quando una base triangola un endomorfismo?<br>**6)** Cosa vuol dire f invariante?<br>**7)** Quanti procedimenti conosciamo per far diventare una base, una base ortogonale | |

| | | |
|---|---|---|
| | o ortonormale rispetto al p.s. standard?<br><br>**8)** Descrizione Algoritmo di ortogonalizzazione di una base<br><br>**9)** Dato un End(V), V sp.vett, qual'è l'ideale di f∈ End(V)?<br><br>**10)** Cosa significa valutare un polinomio su di un endomorfismo ?<br><br>**11)** Prendi due ssp. U,W f-invarianti , con U ⊕ W = V con$\mu_{\|U},\mu_{\|W}$ . Com'è collegato il polinomio minimo globale con i polinomi minimi delle due restrizioni? Manfredini | |
| **ORALE 35** | **1)** Dimostrare che una matrice A appartenente allo sp.vett su K delle Matrice quadrate nxn, avrà detA ≠ 0 ⇔ A è invertibile<br><br>**2)** Cosa vuol dire che le colonne di una matrice sono linearmente indipendenti.<br><br>**3)** Dimostrare la formula di Binet:<br>det(BA) = detB.detA<br><br>**4)** Prendo una matrice reale nxn, suppongo che sia diagonalizzabile.<br>Questa matrice è allora ortogonalmente diagonalizzabile?<br><br>**5)** Esempi di una matrice 2x2 diagonalizzabile non simmetrica Manfredini | |
| **ORALE 36** | **1)** Prendiamo un prodotto scalare reale su di uno sp.vett su R, quando si dice prodotto scalare definito e semidefinito?<br><br>**2)** Dimostrare :<br>• φ è definito ⇔ Rad ϕ =CI( ϕ )={0}<br>• φ è semidefinito ⇔ Rad ϕ =CI( ϕ )<br><br>**3)** Prendo gli End(V) diagonalizzabili in V, questi formano uno sp. vett di tutti gli Endomorfismi?<br>(Falso, fare un controesempio) | |
| **ORALE 37** | **1)** Una matrice ortogonale è sempre diagonalizzabile?<br><br>**2)** Cosa sono le matrici normali?<br><br>**3)** Com'è la forma di Jordan reale di una matrice?<br><br>**4)** Composizione di fitting di un endomorfismo<br><br>**5)** A ∈ M(n,Z) invertibile su R. Quando $A^{-1}$è intera?<br><br>**6)** Prendiamo V sp.vett su R e un prodotto scalare semidefinito φ≥0, prendiamo W ssp e $W^{\perp}$<br>⇒ W + $W^{\perp}$= V.<br>Dimostriamolo. | |
| **ORALE 38** | **1)** Prendiamo una matrice reale quadrata nxn, supponiamo sia triangolabile, essa è ortogonalmente triangolabile?<br><br>**2)** Una matrice e la sua trasposta sono simili? Manfredini<br><br>**3)** Che cos'è linearmente completo? | |

| | | |
|---|---|---|
| **ORALE 39** | **1)** Se io ho sp.vett munito di un prodotto scalare e ho un ssp W. Dimostriamo che V = W $\oplus W^{\perp} \Leftrightarrow$ W $\cap W^{\perp}$={0}.<br><br>**2)** Definizione radicale di un prodotto scalare | |

| **22/07/21** | **ARGOMENTI** | |
|---|---|---|
| **ORALE 40** | **1)** Sia $f \in End(V)$ sotto quali condizioni necessarie e sufficienti la forma di Jordan consiste di un solo blocco?<br>($\Leftrightarrow p_f(t) = q_f(t) = (\lambda - t)^m$ dove $m = dim(V)$) dim. caso nilpotente<br>1.1 Perché esiste $v \in V\ tc\ f^{m-1}(v) \neq 0$?<br><br>**2)** Se $\lambda \neq 0$, come faccio a ricondurmi al caso nilpotente?<br><br>**3)** Quando esiste base ciclica per un endomorfismo?<br><br>**4)** Cosa è una matrice complessa normale?<br><br>**5)** Cosa è l'aggiunta di una matrice complessa?<br><br>**6)** Teorema spettrale Hermitiano in termini matriciali<br><br>**7)** È vero che tutte le matrici normali hanno autovalori reali?<br><br>**8)** Esempio di una matrice che commuta con la propria aggiunta, sui reali una matrice ortogonale è normale?<br><br>**9)** Cosa sono le isometrie lineari, con un esempio ( matrice di una rotazione $2\ x\ 2$) | |
| **ORALE 41** | **1)** Prendo una matrice $A$ complessa con una certa forma di Jordan, come è la forma di Jordan di $A^2$?<br>1.1 Supponiamo che $A$ sia nilpotente<br>1.2 Supponiamo $A$ con un solo blocco nilpotente<br>1.3 $A$ con un solo blocco ma non nilpotente<br><br>**2)** Teorema spettrale reale, formulazione che parla di due prodotti scalari, enunciarlo.<br>2.1 equivalenza dei due enunciati versione astratta con dimostrazione | |
| **ORALE 42** | **1)** Sia una $A$ matrice reale simmetrica. Questa si può pensare sia come matrice di un endomorfismo sia come matrice di un prodotto scalare. Dimostrare che il p.s. è definito positivo $\Leftrightarrow$ gli autovalori di $A$ sono positivi<br>1.1 Se A è definita positiva $\Rightarrow P^tAP = D$ è definito positivo, dove $P \in O(n, R)$<br><br>**2)** Formula di Binet, con dimostrazione<br>2.1 E' possibile dare una dimostrazione unica senza distinguere il caso in cui almeno una delle due matrici non sia invertibile? Generalizzare il ragionamento ottenendo una dimostrazione unica che valga per ogni matrice | |
| **ORALE 43** | **1)** Sia $A$ matrice quadrata triangolabile con forma di Jordan $J\ (A)$, cosa posso dire della forma di Jordan di $A^t$?<br>1.1 $J(A^t)$ è simile a $J(A)$? (è più che simile, è proprio uguale)<br>1.2 Prendiamo un blocco singolo di $J(A)^t$ come è la forma di Jordan di questo | |

| | | |
|---|---|---|
| | blocco?<br><br>**2)** Dimostrare che $(S^{-1})^t = (S^t)^{-1}$<br><br>**3)** Teorema di Sylvester Reale | |
| **ORALE 44** | **1)** Prendiamo $V$ K-spazio vettoriale e $W$ ssp, cosa è lo spazio quoziente?<br>1.1 Mostrare che $Ker(\pi_W) = W$<br>1.1 Dimensione del quoziente $V/W$<br><br>**2)** Cosa è uno spazio complementare di $W$<br>2.1 Ne esiste uno solo di spazio complementare?<br>2.1 Siano $U$ e $U'$ due spazi complementare, esibire un isomorfismo canonico tra di loro<br><br>**3)** Prendiamo prodotto scalare su $V$, cosa è il radicale?<br>3.1 Se si prendono due supplementari del radicale, mostrare che sono isometrici<br>3.2 Dato $V = U \oplus Rad(\Phi) \Rightarrow U$ è non degenere | |
| **ORALE 45** | **1)** Sia $V$ sp vet. e $v_1,..., v_k$ l.i. e consideriamo $Span(v_1,..., v_k)$ora prendo $w \in V$come varia la dimensione di $Span(v_1 + w,\ v_2 + w,..., v_k + w)$ in funzione di $w$?<br><br>**2)** (TSR) $A$ simmetrica reale, vista come applicazione $R^n \to R^n$. Dimostrare che dati $\lambda_1$, $\lambda_2$ autovalori distinti di $A$ i relativi autospazi sono in somma diretta ortogonale<br><br>**3)** Sia $\Phi$ prodotto scalare non degenere su $V$spazio qualsiasi, e prendo $v_1,..., v_k$ non nulli e a due a due ortogonali. E' vero che sono linearmente indipendenti? | |
| **ORALE 46** | **1)** Sia $V$ spazio vettoriale su R, $\Phi$ p.s non degenere, dire cos'è l'indice di positività e negatività.<br>1.1 Supponiamo di avere $W$ ssp che realizza $i_+$, e $Z$ ssp che realizza $i_-$, due tali oggetti sono in somma diretta?<br><br>**2)** Siano $A$ e $B$ matrici complesse che commutano con autovalori che hanno parte reale positiva. $A + B$ è invertibile? | |
| **ORALE 47** | **1)** sia $f: V \to V$ diagonalizzabile , $W$ ssp di $V$ $f$ $-$invariante$\Rightarrow f\|_W: W \to W$ è diagonalizzabile?<br>1.1 polinomio caratteristico di un endomorfismo<br><br>**2)** $v \in R^n$ e facciamo $v \cdot v^t$:<br>dimostrare che $M = v \cdot v^t$ è simmetrica;<br>Consideriamo $\Phi_M$ prodotto scalare definito, studiarne la segnatura; | |
| **ORALE 48** | **1)** $V$ spv, $W_1$, $W_2$, $W_3$ 3 ssp, cosa vuol dire che sono in somma diretta (caratterizzazioni equivalenti con dimostrazione)<br><br>**2)** Supponiamo di avere $f \in End(V)$ non identicamente nullo, tc $f^2 = 0$. Stimare il rango di $f$ | |
| **ORALE 49** | **1)** indice di Witt di un prodotto scalare non degenere<br>1.1 mostrare che $w(\Phi) \leq \frac{n}{2}$ | |

| | | |
|---|---|---|
| | **2)** Esistenza di basi ortogonali, sotto quali ipotesi esistono e come si dimostra l'esistenza | |
| **ORALE 50** | **1)** $A$ matrice è invertibile $\Leftrightarrow$ $Det(A) \neq 0$<br>**2)** Cosa succede al determinante se scambio due colonne<br>**3)** Teorema dei completamenti non degeneri | |
| **ORALE 51** | **1)** Enunciati astratti del TSR<br>**2)** Sia $A \in M(n, R)$ pensata come matrice complessa, supponiamo $A^3$ simmetrica, possiamo dedurre che $A$ è diagonalizzabile? | |
| **ORALE 52** | **1)** Sia $A$ simmetrica reale, si può vedere sia come end sia come matrice di prodotto scalare. $\Phi_A$ è definita positiva come prodotto scalare $\Leftrightarrow$ $Sp(A) > 0$<br>1.1 in generale la segnatura come si può esprimere<br>**2)** V spazio reale e f diagonale, allora esiste un prodotto scalare definito positivo tale che f è autoaggiunto per quel prodotto?<br>**3)** Manfre Sia V spv e $f \in End(V)$ e $W$ ssp di $V$ tc $im(f) \subset W \Rightarrow$ $W$ è $f$ $-$invariante . $f$ è triangolabile $\Leftrightarrow$ $f\|_W$ è triangolabile | |
| **ORALE 53** | **1)** Decomposizione di Witt, esistenza e unicità<br>**2)** Supponiamo di avere $A, B$ quadrate diagonalizzabili, caratterizzazione di quanto commutano (simultanea diagonalizzabilità) dimostrazione<br>**3)** f diagonalizzabile e W f-invariante $\Rightarrow$ $f\|_W$ diagonalizzabile | |
| **ORALE 54** | **1)** Condizioni necessarie e sufficienti affinchè la forma di Jordan sia fatta di un unico blocco<br>**2)** Se ho un endomorfismo invertibile, che relazione c'è tra la forma di jordan di lui e della inversa<br>**3)** Supponi di avere V spv su R di dimensione pari $(2k)$e $\Phi$ prodotto scalare non degenere il cui indice di Witt è k, ricavare la segnatura del prodotto scalare | |
| **ORALE 55** | **1)** Sia $A$ matrice reale ortogonale, descrivere la forma di Jordan reale/ complessa<br>**2)** prodotto Hermitiano standard formula<br>**3)** definizione di riflessione ortogonale | |
| **ORALE 56** | **1)** definizione di f diagonalizzabile<br>**2)** criterio di diagonalizzabilità<br>**3)** def di molteplicità algebrica e geometrica<br>**4)** disuguaglianza tra molt algebrica e geometrica | |

| | | |
|---|---|---|
| | **5)** Come si dimostra esistenza di basi ortogonali nell'ipotesi che la caratteristica del campo sia diversa da 2 | |
| **ORALE 57** | **1)** Siano $A,\ B$ matrici reali. Dimostrare che sono simili come matrici reali ⇔ lo sono come matrici complesse<br><br>**2)** Se ho $A$ matrice reale che come matrice complessa è diagonalizzabile, come è fatta la forma di jordan della matrice<br><br>**3)** sia V sp reale e consideriamo Φ prodotto scalare. Φ è definito ⇔Φè anisotropo ovvero il cono isotropo è solo zero. Mentre ϕ è semidefinito sse...<br>Sia quindi $\Phi\ \geq\ 0$ e sia $W$ ssp di $V$ mostrare che $V\ =\ W\ +\ W^{\perp}$ | |
| **ORALE 58** | **1)** teorema di Sylvester<br><br>**2)** decomposizione di Fitting di un endomorfismo | |
| **ORALE 59** | **1)** chi sono gli spazi vettoriali reali muniti di p.s. anisotropo<br><br>**2)** Supponiamo di avere due end f e g di V spazio vettoriale e facciamo $f\ \circ\ g$ e $g\ \circ\ f$ compariamo gli autovettori di $f\ \circ\ g$ e $g\ \circ\ f$ Manfre | |

| **23/07/21** | **ARGOMENTO** | **V** |
|---|---|---|
| **ORALE 60** | 1) Segnatura piano iperbolico reale, qual'è?<br>2) Manfre Prendiamo un sp.vett e un endomorfismo f ∈ End(V) e una catena dei ssp Ker f ⊆ Ker $f^2$⊆ Ker $f^3$⊆....<br>● che proprietà hanno? potrebbero crescere sempre? | |

| | | |
|---|---|---|
| | • cosa succede per le immagini? | |
| **ORALE 61** | 1) Se io prendo due matrici reali quadrate e suppongo che le forme di Jordan complesse sono uguali, posso concludere che sono simili ?<br>2) Come si passa dalla forma di Jordan complessa alla forma di Jordan reale?<br>3) Qual'è il polinomio caratteristico di una matrice quadrata complessa e quello di una matrice quadrata reale?<br>4) Come si costruisce la forma di jordan complessa?<br>5) Sia V sp.vett e $\phi$ p.s non degenere, chi sarà F$\phi$ e quand'è che un funzionale sarà rappresentabile? | |
| **ORALE 62** | 1) Prendiamo una matrice quadrata antisimmetrica reali, si può dire qualcosa sullo spettro complesso?<br>2) Forma di jordan reale di una matrice antisimmetrica<br>3) Forma di Jordan complessa di una matrice antisimmetrica<br>4) Qual è la base duale di un duale di V?<br>5) Prendiamo un sp.vett V e $\phi$ p.s non degenere e h vettori non nulli. Supponiamo che i vettori sono a due a due ortogonali.<br>L'ortogonalità implica che questi vettori sono indipendenti? | |
| **ORALE 63** | 1) Teorema di decomposizione primaria :<br>enunciato e dimostrazione<br>2) Prendi due Endomorfismi coniugati, sappiamo che hanno gli stessi autovalori, chi è un invariante?<br>Dimostriamo il seguente fatto:<br>sia f ~ g, f,g $\in$ End(V), $\lambda \in$ sp(f)= sp(g) e $V_\lambda$ (f)<br>allora dim $V_\lambda$ (f)=dim $V_\lambda$ (g)<br>3) Supponiamo di avere sp. vett reale e di avere $\phi$ ps di V, $\phi$ è semidefinito, dunque $\phi$>0.<br>Poi prendiamo W$\subset$ V ssp e $W^\perp$( W è ortogonale),chi è W + $W^\perp$? | |
| **ORALE 64** | 1) Teorema spettrale reale:<br>enunciato e dimostrazione.<br>2) Sia f $\in$ End(V) triangolabile e $\lambda$ autovalore di f.come si fattorizza il polinomio caratteristico? | |
| **ORALE 65** | 1) Cosa vuol dire che un endomorfismo è triangolabile?<br>2) Esiste una base che triangola due endomorfismi? Manf Come deve essere?<br>3) Se un automorfismo è triangolabile, ammette autovettori?<br>4) Se uno ha una matrice simmetrica reale definita positiva<br>allora $\exists$! S$\in$ S(n,R) definita positiva tale che A=$S^2$<br>Dimostriamo il seguente fatto.<br>5) Com'è fatto un Endomorfismo con un polinomio caratteristico di grado 2? | |
| **ORALE 66** | 1) Prendiamo una matrice A$\in$ M(n,R) triangolabile:<br>- é ortogonalmente triangolabile?<br>- $\exists$ B ortonormale che la triangola?<br>2) Dimostrare il seguente fatto:<br>Se A=$A^T\in$ S(n,R)<br>triangolabile allora orto-diagonalizzabile.<br>3) Supponiamo di avere A$\in$M(n,R), $A^4$ è diagonalizzabile. Cosa si può dire sulla diagonalizzabilità su C di essa?<br>4) Chi è l'autospazio che ha autovalore zero? | |
| **ORALE 67** | 1) Chi sono i prodotti scalari anisotropi, come sono fatti?<br>Come sono definiti?<br><br>2) Dimostrare : | |

| | | |
|---|---|---|
| | $\phi \in ps(V)$ è anisotropo se e solo se è definito.<br><br>3) Prendi un End(V) con V sp.vett e con queste proprietà :<br>• V = Ker f ⊕ Im f<br>• è triangolabile, non invertibile.<br>Com'è fatta la sua forma di Jordan reale? | |
| **ORALE 68** | **1)** Prendiamo una matrice A∈ M(n,K) e M∈ M(2n,K)<br>M = (A\|A)<br>(0\|A)<br>M diagonalizzabile<br>allora A è diagonalizzabile? verificarlo<br>Qual'è l'ideale di M e di A?<br>Come sono fatte le potenze di M?<br><br>**2)** Se prendo una matrice simmetrica reale questa mi definisce un endomorfismo di $R^n$ e mi definisce $f_a$ che manda x in A.X e mi definisci anche un prodotto scalare. In quanto prodotto scalare ha senso chiedere chi è la segnatura e in quanto endomorfismo ha senso considerare lo spettro.<br>• C'è una relazione tra la segnatura e lo spettro?<br>• Riesci a caratterizzare quando il prodotto scalare è definito positivo per mezzo dello spettro?<br>• Abbiamo dimostrato che nel caso diagonale il prodotto scalare è definito positivo se e sole se tutti gli autovalori sono positivi. Puoi ora dimostrarlo in generale per una matrice simmetrica qualsiasi?<br>• Come determino il +, il - e la dimensione del radicale? | |
| **ORALE 69** | **1)** Prendi una Matrice triangolare superiore con 4 blocchi e uno zero in basso a sx,M= (A\|B)<br>(0\|C)<br>vorrei stimare il rango di M in termini di rango di A e di C<br><br>**2)** Se io ho uno spazio reale con un prodotto scalare non degenere abbiamo definito 2 insiemi di invarianti completi per lo studio di questi spazi vettoriali a meno di isometrie. Chi sono questi invarianti?<br>• Quando è che due prodotti scalari non degeneri sono isometrici?<br>• classificazione dei prodotti scalari reali<br>• c'è un altro invariante→decomposizione di Witt→ indice di Witt.<br>• Cosa vuol dire anisotropo nel caso dei prodotti scalari reali?( un prodotto scalare è anisotropo se e sole se è definito)<br>• Riesci a trovare un altro invariante? (indice di Witt + segno) | |
| **ORALE 70** | **1)** cosa è la dimensione di uno spazio vettoriale?<br><br>**2)** definizione di base<br><br>**3)** perchè le basi esistono? → algoritmo di estrazione di una base<br><br>**4)** perchè le basi di uno spazio vettoriale hanno la stessa #? (2 proposizioni)<br><br>**5)** cosa è una matrice complessa normale?<br><br>**6)** teorema spettrale hermitiano<br><br>**7)** mi fai un esempio di un normale che non si autoaggiunto?<br><br>**8)** che cosa è una matrice unitaria?<br><br>**9)** una matrice ortogonale reale che proprietà ha? | |

| | | |
|---|---|---|
| **ORALE 71** | **1)** Prendi una matrice M di taglia  m x n, in un campo K qualsiasi.<br>● Cos'è il rango di M?<br>● rank M = dim(Im f) con f : $K^n$ —> $K^m$che manda X in MX<br>● definisci meglio MX(prodotto riga per colonna)<br>● esprimi MX in termini di colonne<br>● fai vedere che l'Im f = Span(colonne)<br><br>**2)** rank M = rank $M^T$<br>● perchè il numero di pivot è lo stesso?<br>● l'algoritmo di Gauss sulle righe dove lo abbiamo usato? (per risolvere i sistemi lineari omogenei)<br>● calcolare la dimensione del nucleo usando l'algoritmo di gauss<br><br>**3)** Prendi uno spazio vettoriale che ha un prodotto scalare non degenere, prendi un endomorfismo di V, come si definisce l'aggiunto di f relativo al prodotto scalare ?<br><br>**4)** Se ho un ssp f-invariante puoi trovare un ssp f*-invariante? | |
| **ORALE 72** | **1)** C'è un modo di calcolare il determinante di una matrice quadrata usando l'algoritmo di Gauss?<br><br>**2)** Se ho uno spazio vettoriale V di dimensione n e ho un sottospazio  W di V di dimensione m com m<=n. Se io prendo una base di W è possibile estenderla  a una base di tutto V. Come si dimostra?<br><br>**3)** formula delle dimensioni di nucleo e immagine, Enunciala e dimostrala | |
| **ORALE 73** | **1)** Prendi un applicazione lineare da V a W  e dei vettori v1,..., vk ∈ $V$,  facciamo le immagini f(v1),...,f(vk) ∈ $W$Supponiamo che le immagini f(v1),...,f(vk) siano linearmente indipendenti,   sarà vero che anche i vettori di partenza v1,..., vk sono linearmente indipendenti?<br><br>**2)** Data una matrice reale ortogonale come è fatta la sua forma di jordan reale?<br>● Cosa sono le matrici ortogonali?<br>● Come è fatta la forma di Jordan complessa?<br>● una matrice reale ortogonale è diagonalizzabile su C . Perché?<br>● teorema spettrale hermitiano<br>● chi è il prodotto hermitiano definito standard su $C^n$<br>● Cosa vuol dire che una matrice è normale?<br>● mi dimostri che una matrice reale orto | |

| | | |
|---|---|---|
| **26/07/21** | **ARGOMENTO** | |

| | | |
|---|---|---|
| **ORALE 74** | 1) Prendiamo una matrice reale antisimmetrica, consideriamo il suo spettro complesso. Si può dire qualcosa su questo?<br>2) Chi è l'immaginario puro che è anche un reale? (lo zero)<br>3) C'è un automorfismo di V che si può esprimere con la diagonalizzabilità<br>4) Prendi una matrice M nxn a coeff in K con rank(M)+rank(M-I)=n. Cosa possiamo dire sulla diagonalizzabilità?<br>5) Quando un V_lambda è contenuto nell'immagine di M | |
| **ORALE 75** | 1) Algoritmo di completamento di base<br>2) V si può scrivere come somma diretta di W + U. Sapresti scrivere un isomorfismo esplicito tra questi due ?<br>3) Cosa significa definire un funzionale tramite prodotto scalare?<br>4) La dimensione di W ortogonale quando non è degenere<br>5) Usando questa formula si può capire chi è il doppio ortogonale? | |
| **ORALE 76** | 1) Cos'è l'indice di Witt<br>2) Cos'è un piano iperbolico<br>3) Dati due piani iperbolici sai dimostrare che sono isometrici?<br>4) Qual è la segnatura di un piano iperbolico?<br>5) Preso un endomorfismo di uno sp vettoriale, qual è il polinomio minimo di questo endomorfismo?<br>6) Ssp f-invariante, si può capire chi è l'ideale della restrizione di f a W? | |
| **ORALE 77** | 1) Preso un endomorfismo tc ogni v≠0 è un autovettore. Cosa si può dire di questo endomorfismo? Manfredini<br>2) Esempio di teorema in cui l'ipotesi Char K≠2 è necessaria mentre un altro in cui è ininfluente (e dimostrazioni dei teoremi) | |
| **ORALE 78** | 1) Cos'è la segnatura?<br>2) Come si calcolano questi indici?<br>3) Se conosco la segnatura conosco anche l'indice di Witt?<br>.<br>4) Come si decompone lo spazio V partendo dalla base ortonormale<br>5) Cosa vuol dire che è anisotropo<br>6) Riduzione al caso nilpotente in un endomorfismo triangolabile | |
| **ORALE 79** | **1)** Dimensione di uno spazio vettoriale<br>**2)** Le basi hanno stessa cardinalità<br>**3)** Dimostrare che qualsiasi altra base è numerabile data una base numerabile | |

| | | |
|---|---|---|
| | 4) Sylvester | |
| **ORALE 80** | **1)** Esercizio: prese due matrici mxn A e B con rank B=1. Come può variare il rango di A+B considerando A e considerando B. MANFRE<br>**2)** Cosa vuol dire che uno spazio è anisotropo<br>**3)** Anisotropo se e solo se definito | |
| **ORALE 81** | **1)** Formula per la dimensione dell'immagine e del nucleo (dimV=dim Im f+dim Ker f)<br>**2)** Formula di Grassmann<br>**3)** Dimostrare che sono equivalenti<br>**4)** Prodotti scalari: dato uno sp vettoriale reale con un prodotto scalare non degenere di cui conosciamo la segnatura. Dato un iperpiano W e consideriamo la restrizione di phi. Quali segnature si realizzano in questo modo?<br>**5)** Caso particolare in cui la segnatura di phi a W è degenere | |