DS-EQUIVALENZA

Titolo nota 05/09/2021

DS - equivalenza

V, W $\mathbb{K}$-sp. v. $\dim V = n$ $\dim W = m$

$g, f \in Hom(V, W)$

$g \sim_{DS} f$ se $\exists\, (h, k) \in GL(V) \times GL(W)$ t.c. $g = k \circ f \circ h$

è una relazione di equivalenza

dim

1) $f = id_W \circ f \circ id_V$

2) $g = k \circ f \circ h$ $\quad f = k^{-1} \circ g \circ h^{-1}$

3) $g = k \circ f \circ h$ $\quad c = k' \circ g \circ h' \Rightarrow c = (k' \circ k) \circ f \circ (h \circ h')$

Versione matriciale

$A, B \in M(m, n, \mathbb{K})$ $\quad B \sim_{DS} A$ se $\exists\, P \in GL(n, \mathbb{K})$ e $Q \in GL(m, \mathbb{K})$ t.c. $B = QAP$

I seguenti fatti sono equivalenti

1) $g \sim_{DS} f$

2) $\forall\, B, D$ basi di V e W risp. t.c. $M_D^B(g) \sim_{DS} M_D^B(f)$

3) $\exists\, B, D$ basi di V e W risp. t.c. $M_D^B(g) \sim_{DS} M_D^B(f)$

4) $\exists\, B, B'$ basi di V e D, D' basi di W t.c. $M_D^B(g) = M_{D'}^{B'}(f)$

<u>dim</u>

1 ⇒ 2 Se $g \sim_{DS} f \Rightarrow \exists (h, K) \in GL(V) \times GL(W)$ t.c.

$g = K \circ f \circ h$ Considero il diagramma

$$\begin{tikzcd}
V_B \arrow[r, "h"] \arrow[d] \arrow[rrr, bend left, "g"] & V_B \arrow[r, "f"] \arrow[d] & W_D \arrow[r, "K"] \arrow[d] & W_D \arrow[d] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "P", "M^B_B(h)"'] \arrow[rrr, bend right, "C = M^B_D(g)"'] & \mathbb{K}^n \arrow[r, "A", "M^B_D(f)"'] & \mathbb{K}^m \arrow[r, "Q", "M^D_D(K)"'] & \mathbb{K}^m
\end{tikzcd}$$

$$M^B_D(g) = M^D_D(K)\, M^B_D(f)\, M^B_B(h)$$

Dato che $(K, h) \in GL(V) \times GL(W)$

$\Rightarrow M^D_D(K) \in GL(m, \mathbb{K})$ e

$M^B_B(h) \in GL(n, \mathbb{K})$

Quindi $M^B_D(g) \sim_{DS} M^B_D(f)$

$2 \Rightarrow 3$ ovvio

$3 \Rightarrow 1$ Per hp $M^{B}_{D}(g) \sim_{DS} M^{B}_{D}(f)$ e cioè $\exists\,(P, Q) \in GL(n, \mathbb{K}) \times GL(m, \mathbb{K})$ t.c. $M^{B}_{D}(g) = Q\, M^{B}_{D}(f)\, P$

Allora $\exists!\, K \in GL(W)$ t.c. $M^{D}_{D}(K) = Q$

$\exists!\, h \in GL(V)$ t.c. $M^{B}_{B}(h) = P$

$\Rightarrow g = K \circ f \circ h \Rightarrow g \sim_{DS} f$

In arancione nel diagramma di sopra

3 ⇒ 4   Io so che $M^B_D(g) \sim_{DS} M^B_D(f)$ e cioè

$$\underbrace{M^B_D(g)}_{=C} = \underbrace{M^D_D(k)}_{=Q}\ \underbrace{M^B_D(f)}_{=A}\ \underbrace{M^B_B(h)}_{=P}$$ con Q e P invertibili

Uso la relatività e cioè ogni matrice invertibile la posso interpretare come matrice cambiamento di base.

$\exists\, B, B'$ basi di U t.c. $P = M^B_B(h) = M^{B'}_B(id_U)$

$\exists\, D, D'$ basi di W t.c. $Q = M^D_D(k) = M^D_{D'}(id_W)$

Ho questo diagramma

$$\begin{tikzcd}
V_{B'} \arrow[r, "id_V"] \arrow[d] \arrow[rrr, bend left, "f"] & V_B \arrow[r, "f"] \arrow[d] & W_D \arrow[r, "id_W"] \arrow[d] & W_{D'} \arrow[d] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "M^{B'}_{B}(id_V)"'] \arrow[rrr, bend right] & \mathbb{K}^n \arrow[r, "M^{B}_{D}(f)"'] & \mathbb{K}^m \arrow[r, "M^{D}_{D'}(id_W)"'] & \mathbb{K}^m
\end{tikzcd}$$

$$M^{B'}_{D'}(f) = \underbrace{M^{D}_{D'}(id_W)}_{= Q} \cdot M^{B}_{D}(f) \cdot \underbrace{M^{B'}_{B}(id_V)}_{= P}$$

$$Q \quad M^{B}_{D}(f) \quad P = M^{B}_{D}(g)$$

da cui $M^{B'}_{D'}(f) = M^{B}_{D}(g)$

4 ⇒ 3 Io so che $M^B_D(g) = M^{B'}_{D'}(f)$

$$M^{B'}_{D'}(f) = \underbrace{M^D_{D'}(id_W)}_{=Q} \underbrace{M^B_D(f)}_{=A} \underbrace{M^{B'}_B(id_V)}_{=P}$$

chiamo

$\Rightarrow M^B_D(g) = Q\, M^B_D(f)\, P$ ma Q e P sono mat. camb. di base $\Rightarrow$ sono invertibili $\Rightarrow M^{B'}_{D'}(f) \sim_{DS} M^B_D(f)$

ma per hp $M^{B'}_{D'}(f) = M^B_D(g) \Rightarrow M^B_D(g) \sim_{DS} M^B_D(f)$

La dim. dell'immagine e quindi il rango è invariante completo per la DS-equivalenza

Se $g \sim_{DS} f \Rightarrow \dim(\mathrm{Im}(g)) = \dim(\mathrm{Im}(f))$

$$\mathrm{rnk}(g) = \mathrm{rnk}(f)$$

dim

$\Rightarrow \quad g \sim_{DS} f \Rightarrow g = k \circ f \circ h \quad$ con $k \in GL(W)$ e $h \in GL(V)$

$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}(f \circ h)$ e h è isomorfismo preserva le dim.

$\dim(\mathrm{Im}\, f) = \dim(\mathrm{Im}(f \circ h)) = \dim(k.\mathrm{Im}(f \circ h)) = \dim(k.\mathrm{Im}\, f)$

$\mathrm{Im}\, g = \mathrm{Im}(k.\mathrm{Im}\, f) \Rightarrow \dim \mathrm{Im}\, g = \dim(k.(\mathrm{Im}\, f))$

$\Rightarrow$ $\dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Im} g$.

$\Leftarrow$ Sia $\dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Im} g = r \leq m$ $\quad f, g \in \operatorname{Hom}(V, W)$

$\dim V = n \qquad \dim W = m$

Sia $Z = \{z_1, \dots, z_k\}$ base di $\operatorname{Ker} f$

Estendo Z a base B di V $\quad B = \{z_1, \dots, z_k, v_1, \dots v_r\}$ con $k + r = n$.

So che $\{f(v_1), \dots, f(v_r)\} = T$ è una base di $\operatorname{Im} f$.

Estendo T a base D di W $\quad D = \{f(v_1), \dots, f(v_r), w_1, \dots w_j\}$

Considero $M_D^B(f) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ con $r + j = m$

è una matrice $m \times n$ la cui forma dipende solo da $\dim(\operatorname{Im} f) = r$

Rifaccio la costruzione per g e ottengo che.

$$M^{B'}_{D'}(g) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow M^{B}_{D}(f) = M^{B'}_{D'}(g) \Rightarrow g \sim_{DS} f$$

Versione matriciale

Se $\operatorname{rnk} A = r \Rightarrow \exists (P, Q) \in GL(n, \mathbb{K}) \times GL(m, \mathbb{K})$ t.c.

$$QAP = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

rank A = rnk A^T

I dimostrazione

premesse

1) $\text{rnk } A = \dim(\text{Spam}(A^1, \dots, A^n))$

2) $A^T = B \qquad (B^1, \dots, B^n) = (\overbrace{A_1, \dots, A_n}^{\text{righe}})$

3) $\text{rnk } A^T = \dim(\text{Span}(B^1, \dots, B^n)) = \dim(\text{Span}(A_1, \dots, A_n))$

I dim

Se $\text{rnk } A = r \Rightarrow A \sim_{DS} \left(\begin{array}{c|c} J_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \exists\ M, N$ invertibili t.c.

$A = M J_r N$

$A^T = (M J_r N)^T = N^T J_r^T M^T \Rightarrow N^T J_r^T M^T$

$\text{rnk } J_r^T = r = \text{rnk } J_r$

N^T, M^T sono invertibili

$\Rightarrow A^T \sim_{DS} J_r^T$ $\Rightarrow \operatorname{rnk}(A)^T = \operatorname{rnk} J_r^T = r = \operatorname{rnk}(A)$

dim che M^T e N^T sono invertibili

Sia $M \in GL(n, \mathbb{K}) \Rightarrow \exists M^{-1} \in GL(n, \mathbb{K})$ t.c. $MM^{-1} = I$

$$\begin{array}{ccc} (MM^{-1})^T & = & I^T \\ \parallel & & \parallel \\ (M^{-1})^T M^T & = & I \end{array}$$

ma anche $M \cdot M^{-1} = I$

Per unicita' dell'inversa $(M^T)^{-1} = (M^{-1})^T \Rightarrow M^T \in GL(n, \mathbb{K})$