Titolo nota 08/09/2021

Teorema finale

Lo spettro insieme alla stringa di dimensioni $D(*)$ formano un invariante completo per gli endomorfismi triangolabili con un solo autovalore a meno di coniugazione

Faremo vedere che $\forall g: W \to W$ g triangolabile con un solo autovalore $\exists B$ base di W t.c. $M^B_B(g)$ è in una forma speciale che dipende solo dall'autovalore λ e dalla stringa $D(g)$

Riduzione al caso nilpotente

Un endomorfismo $g: W \to W$ triangolabile con un solo autovalore si dice nilpotente se l'unico autovalore è $\lambda = 0$ cioè $\operatorname{spec}(h) = 0$.

Sia $g: W \to W$ $\quad p_g(t) = t^m \quad m = \dim W$

$q_g(t) = t^r$ con $1 \le r \le m$ $\quad \operatorname{spec}(g) = \{\lambda\}$

$g = \lambda \, id_W + h \quad h = g - \lambda \, id_V \quad h = h(g) =$ parte nilpotente di g

mostriamo che h è nilpotente

Passo alle matrici e considero B base che triangola h

$$M_B^B(h) = \begin{pmatrix} \lambda & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

$M_B^B(h)$ è triang. superiore lungo Δ ha solo $0 \Rightarrow h$ è nilpot.

$g, g' \in \mathrm{End}(W) \quad g' \sim g \iff h' \sim h$ cioè se lo sono le parti nilpotenti.

$h = g - \lambda \mathrm{Id} \qquad h' = g' - \lambda \mathrm{Id}.$

$g = \lambda \mathrm{Id} + h \qquad g' = \lambda \mathrm{Id} + h'$

$\Rightarrow$ $g' \sim g \Rightarrow \exists K \in GL(V)$ t.c. $g' = KgK^{-1}$

$h' = g' - \lambda \mathrm{Id} = KgK^{-1} - K\lambda \mathrm{Id} K^{-1} = K(\underbrace{g - \lambda \mathrm{Id}}_{h})K^{-1} =$

$= KhK^{-1} \Rightarrow h' \sim h$

$\Leftarrow$ Se $h' \sim h \Rightarrow \exists K \in GL(V)$ t.c.

$\underbrace{h' = KhK^{-1} \quad \text{ma} \quad h'}= g' - \lambda \mathrm{Id}$

$$\underbrace{K h K^{-1} - (g' - \lambda\, id)}\; = K h K^{-1} + \lambda\, id = g'$$

$$= K(\underbrace{h + \lambda\, id}_{g})K^{-1} = g'$$

$$K g K^{-1} = g' \Rightarrow g' \sim g.$$

casi estremi

$r = 1$ $\quad g \in End(W) \qquad q_g(t) = t \qquad D(g) = (d_1 = n)$

$\Rightarrow Ker\, g = W \Rightarrow \dim Ker\, g = \dim W = n \Rightarrow g \equiv 0$

$J(g, 1) = (0)$

l'esponente $= 1$ annulla tutto siamo nel caso diagonalizzabile

$r = m$.

$g \in End(W) \qquad q_g(t) = p_g(t)$

essendo il pol. minimo di grado $m \Rightarrow t^{m-1} \notin I(g)$

$D(g) = \{1 < 2 < \dots < m\} \Rightarrow \exists\, v \neq 0 \in V$ t.c. $g^{m-1}(v) \neq 0$

Considero i seguenti vettori

$B = \{v, g(v), \dots, g^{m-1}(v)\} \qquad |B| = m \qquad B$ è una base di W

generano perché sono m e tutti $\neq 0$

Mostriamo la lineare indipendenza.

$$\alpha_0 v + \alpha_1 g(v) + \dots + \alpha_{m-1} g^{m-1}(v) = 0$$

$\downarrow$ applico g.

$$\alpha_0 g(v) + \alpha_1 g^2(v) + \dots + \alpha_{m-2} g^{m-1}(v) + \underbrace{\alpha_{m-1} g^{m}(v)}_{=0}$$

$\downarrow$ itero applicando g

$\Rightarrow \alpha_0 g^{m-1}(v) = 0$ ma $g^{m-1}(v) \neq 0$ per hp $\Rightarrow \alpha_0 = 0$

Risalendo si ha che $\alpha_i = 0 \quad \forall i = 0 \dots m-1$

$\bar{B} = \{ g^{m-1}(v), \dots, v \}$ è detta base ciclica dell'end. nilpotente g rispetto a v.

$$M^{\bar{B}}_{\bar{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} = J(0, m)$$

ha tutti 0 anche sulla Δ eccetto che sulla sovradiagonale che ha tutti 1.

$\downarrow$

BLOCCO DI JORDAN DI autovalore 0 e taglia m.

Nel caso $r = n$ $f, g \in End(W)$ nilpotenti.

$f \sim g \iff \exists\, B, D$ basi di W t.c. $M_B(f) = M_D(g) = J(0, n)$

Se gli end. non sono nilpotenti, e cioè $p_f(t) = p_g(t) = (t - \lambda)^n$

$\Rightarrow$ la forma matriciale normale è $J(\lambda, n)$
sulla diagonale ci sarà λ anziché 0.

Riepilogo

$r = 1$ ottengo una mat. diagonale con m blocchi $J(0,1)$ lungo la Δ

$r = m$ Ho un unico blocco $J(0,m)$

Definizione di base di Jordan.

Dato un $g \in \mathrm{End}(W)$ g nilpotente

Una base di Jordan per g è tale che la matrice associata è diagonale a blocchi con blocchi di Jordan lungo la diagonale di autovalore 0 e taglia decrescente

Si dice che una tale matrice è in forma di Jordan.

$$D(J(0,t_1), \dots, J(0,t_s)) \text{ con } t_j \geq t_{j+1}.$$

Non riesco ancora a studiare il caso generale $1 < r < m$

Abbiamo già dim il lemma sui nuclei successivi

cioè se $\operatorname{Ker} g^i = \operatorname{Ker} g^{i+1} \Rightarrow \operatorname{Ker} g^{i+1} = \operatorname{Ker} g^{i+2}$.

dim. che $D(g) = \{d_1 < \ldots < d_r = m\}$ è un invariante

$d_j = \dim \operatorname{Ker}(g^j)$

Se $g' \sim g \Rightarrow D(g) = D(g')$

Se $g' \sim g \Rightarrow \exists K \in Gl(V)$ t.c. $g' = K g K^{-1}$

$\forall v \in \operatorname{Ker} g \Rightarrow g'(K(v)) = (K g K^{-1})(K(v)) =$

$= (K g K^{-1} K)(v) = K(\underbrace{g(v)}_{=0 \; v \in \operatorname{Ker}(g)}) \Rightarrow K(0) = 0$

$\Rightarrow K(\operatorname{Ker} g) \subseteq \operatorname{Ker} g'$ $\Big\}$ essendo i due nuclei isomorfi hanno la stessa dim.

$\supseteq$ vale anche