SPAZI VETTORIALI, BASI E DIMENSIONI PARTE 1

Titolo nota 05/09/2021

$Hom(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) = M(m, n, \mathbb{K})$

da funzione a matrice

Sia $C = \{E^1, \dots, E^n\}$ la base canonica di $\mathbb{K}^n$

$\forall X \in \mathbb{K}^n$ lo scrivo come comb. lineare di elementi di C

$X = x_1 E^1 + \dots + x_n E^n$

Sia $f: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ l'unica applicazione lineare t.c. $f(E^j) = A^j$

Applico f a X $\quad f(X) = f(x_1 E^1 + \dots + x_n E^n) = x_1 f(E^1) + \dots + x_n \underbrace{f(E^n)}_{\in \mathbb{K}^m} =$

$= x_1 A^1 + \dots + x_n A^n$

Organizzo gli A^j nella matrice $A = A_j = (A^1, \dots, A^n)$

$f(X) = AX = x_1 A^1 + \dots + x_n A^n$ = prodotto della matrice A per il vettore colonna X = comb. lineare delle colonne di A con i coeff. dati dai coeff. di X

Viceversa da matrice a funzione

Sia $A \in M(m, n, \mathbb{K})$ $A = (A^1, \dots, A^n)$ l'applicazione lineare corrisp. che porta X in $AX \in \mathbb{K}^m$ è l'unica applicazione che porta un vettore della base canonica nella corrispondente colonna di A

Cioè è l'unica tale che $f(E^1) = A^1, \dots, f(E^n) = A^n$

Quindi vale che $g : M(m, n, \mathbb{K}) \xrightarrow{\simeq} Hom(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$

$A \longrightarrow f_A$

- g è lineare $\longrightarrow$ $\forall X \in \mathbb{K}^n$, $\forall A, B \in M(m, n, \mathbb{K})$ vale che
  - $f_{A+B} = (A+B)X = x_1 (A+B)^1 + \dots + x_n (A+B)^n =$

$= x_1 (A^1 + B^1) + \dots + x_n (A^n + B^n) = x_1 A^1 + \dots + x_n A^n + x_1 B^1 + \dots + x_n B^n =$

$= f_A(X) + f_B(X)$

- $f_{\lambda A} = (\lambda A) X = x_1 \lambda A^1 + \dots + x_n \lambda A^n = \lambda (x_1 A^1 + \dots + x_n A^n) = \lambda f_A$

- g è surgettiva perché $\forall f \in (\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ lineare $\exists !\ A \in M(m, n, \mathbb{K})$ t.c. $f(X) = AX$ $\forall X \in \mathbb{K}^n$

- g è iniettiva perché sia $A \in \mathrm{Ker}(g) \Rightarrow f_A(X) = 0$ $\forall X \in \mathbb{K}^n \Rightarrow$

$f_A(E^i) = A \cdot E^i = A^i = 0 \quad \forall i \Rightarrow A = 0 \Rightarrow \ker(g) = \{0\}$ $\blacksquare$

COMPOSIZIONE IN TERMINI MATRICIALI

$f = f_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m \qquad g = g_B : \mathbb{K}^m \longrightarrow \mathbb{K}^s$

$h : h_C = g_B \circ f_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^s$

$C \in M(s, n, \mathbb{K})$

$C^i = h(E^i) = g(f(E^i)) = g(A^i) = BA^i$

$C = BA = (BA^1, \dots, BA^n)$

Se $A = (a_{i,j})$ $\begin{matrix} i = 1 \dots m \\ j = 1 \dots n \end{matrix}$ $\qquad B = (b_{k,i})$ $\begin{matrix} k = 1 \dots s \\ i = 1 \dots m \end{matrix}$

Allora $c_{k,j} = \sum_i b_{k,i}\, a_{i,j}$ $\qquad C = B_k A^J$

ALGORITMO DI ESTRAZIONE DI UNA BASE

V $\mathbb{K}$ sp. V. $X \subset V$, $X = \{v_1, \dots, v_n\}$ = insieme ordinato di generatori

A partire da X è sempre possibile estrarre una base di V eliminando se necessario e in maniera costruttiva alcuni elementi di X.
L'algoritmo si compone di passi e ogni passo ha uno stato iniziale e uno stato finale associato. Quest'ultimo è anche lo stato iniziale del passo successivo

$P1 \quad \{T_1 | y_1\} = \{v_1 | v_2, \dots v_n\}$ dove $\{T_1, y_1\} = X$

Test 1: $v_2 \in \mathrm{Span}(v_1)$? cioè $v_2 = \lambda v_1 \quad \lambda \in \mathbb{K}$?

↳ SI $\longrightarrow$ $P_2 \; \{T_2 = T_1 | y_2\} = \{v_1 | v_3, \dots, v_n\}$ elimino v_2.

↳ NO $\longrightarrow$ $P_2 \; \{T_2 | y_2\} = \{v_1, v_2 | v_3, \dots, v_n\}$ sposto la barra a dx

Per induzione supponiamo di aver eseguito il passo $J-1$

$P_J \quad \{T_J | y_J\}$ sia $\bar{x}(J)$ il min elt. di y_J

Test$_J$ $\quad \bar{x}(J) \in \mathrm{Span}(T_J)$?

↳ SI $\longrightarrow$ $P_{J+1} \; \{T_{J+1} = T_J \,|\, y_J - \{\bar{x}(J)\} = y_{J+1}\}$

$\hookrightarrow$ NO $\longrightarrow$ P_{j+1} $\{T_{j+1} = T_j + \{\bar{x}(j)\} \mid y_j - \{\bar{x}(j)\} = y_{j+1}\}$.

L'algoritmo si arresta al passo k-esimo per cui

P_k $\{T_k \mid y_k\}$ e P_{k+1} $\{T_{k+1} \mid \emptyset\}$

- T_{k+1} è la base estratta.
- L'algoritmo funziona perché $y_1 > y_2 > \ldots > y_k > \emptyset$ quindi termina.

$T_1 \leq T_2 \leq \ldots \leq T_k \leq T_{k+1}$

T_{k+1} è formata da vettori lin. indip..

Se per assurdo T_{k+1} contenesse dei vett. lin. dip. allora per come

funziona l'algoritmo, questi sarebbero stati eliminati $\Rightarrow$
T_{k+1} è formata da vettori lin. indip.

T_{k+1} genera.

Se la risposta al Test j è NO allora

$$\{T_{j-1} \mid y_{j-1}\} = \{v_1, \dots, v_{j-1} \mid v_j, v_{j+1}, \dots v_n\} = \{v_1, \dots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \dots v_n\} =$$
$$= \{T_j \mid y_j\} = \{v_1, \dots, v_{j-1}, v_j \mid v_{j+1}, \dots v_n\} = \{v_1, \dots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \dots v_n\}$$

cambia la posizione della barra ma non l'insieme.

Se la risposta al Test j-esimo è SI allora v_j lo elimino ma in realtà lo riottengo come comb lineare degli altri

Quindi $X = \{v_1, \dots, v_n\}$ era un insieme di generatori

$T_{r+1} \subseteq X$ continua a generare perché o è proprio uguale a X nel caso in cui tutti i v_i fossero lin. indip. oppure gli elt. che tolgo sono esprimibili come comb. lineare dei rimanenti.

ALGORITMO DI COMPLETAMENTO A UNA BASE

V $\mathbb{K}$ sp. v. $\quad Z = \{z_1, \dots, z_k\}$ $\quad X = \{v_1, \dots, v_n\}$ generatori di V.

z_i lin. indip.

E' possibile estendere Z a una base di V aggiungendo se necessario e in maniera costruttiva qualche elt. di X.

Considero $\{z_1, X\} = X'$ $\quad X'$ genera perchè contiene X che per hp genera ma i vettori di X' non sono lin. indip. Applico alg. di estrazione di una base e ottengo $\{z_1, z_2, x_2\} = X''$

Itero il procedimento e alla fine inserisco tutti gli z_j e qualche $v_i \in X$ $\{z_1, \dots, z_k, X_t\} = \{z_j, X_t\} = \bar{X}$

$\bar{X} \subset X'' \subset X' \subset X$ e $\bar{X}$ è la base estratta.

Proposizioni sulla cardinalità delle basi

Proposizione 1.

Sia V un $\mathbb{K}$-sp. vettoriale

Sia $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ un insieme di generatori di V.

Sia $Z = \{z_1, \dots, z_k\}$ un insieme di vettori lin. indipendenti.

Allora $|Z| \leq |X|$ cioè $k \leq n$.

<u>dim</u>

Considero $\{Z, X\} = \overline{X}$ $\quad X'$ genera perché contiene X che per hp generava ma i vettori non sono lin. indipendenti per cui applico l'algoritmo di estrazione di una base $\{Z_1, X_1\} = X'$

A priori ho due possibilità $\{z_1, z_2, x_2\} = X''$ ecc...

1) Inserisco tutti gli z_i e qualche x_j $\Rightarrow \{z_1, \dots, z_k, x_n\}$

$\Rightarrow k \leq n \Rightarrow |Z| \leq |X|$

2) Inserisco tutti gli x_j ma non tutti gli z_i $\Rightarrow \{z_1, \dots, z_h, X\}$ $h < k$

$\Rightarrow |X| \leq |Z|$ cioè $n \leq k$

Ma considero $z_{h+1} = a_1 z_1 + \dots + a_h z_h$ con $h+1 \leq k$

$\Rightarrow$ gli z_j non sono lin. indip $\lightning$ perché per hp $Z = \{z_1, \dots, z_k\}$ erano lin. indip.

Quindi $K \le n$ $\qquad |Z| \le |X|$

Proposizione 2.

$\forall\ B, B'$ basi di V $\mathbb{K}$-sp. v. $\qquad |B| = |B'|$

$\underbrace{B = \{v_1, \dots, v_n\}}_{\text{generatori}}$ $\qquad \underbrace{B' = \{z_1, \dots, z_K\}}_{\text{lin. indip}}$ $\xRightarrow{\text{Prop 1.}}$ $n \ge K$.

$\underbrace{B' = \{z_1, \dots, z_K\}}_{\text{generatori}}$ $\qquad \underbrace{B = \{v_1, \dots, v_n\}}_{\text{lin. indip.}}$ $\xRightarrow{\text{Prop. 1}}$ $K \ge n$

$\Rightarrow n = K$.

Proprietà della dimensione.

1) Se V - $\mathbb{K}$ sp. v. $\dim V = n$ $\Rightarrow$ $\forall W$ ssp di V $\dim W \leq \dim V = n$

<u>dim</u>

Se $W = \{0\}$ ok

Se $W \neq \{0\}$ supp. $\exists\, w_1 \in W$ t.c. w_1 non genera W allora $\exists\, w_2 \in W$ t.c. (w_1, w_2) sono lin. indip. ma non generano W e così via itero il procedimento al più $\dim V$ - volte.

$\Rightarrow \dim W \leq \dim V$.

2) $\dim(W) = \dim(V) \iff W = V$

dim

$\Leftarrow$ ovvia

$\Rightarrow$ Sia $B = \{w_1, \dots, w_n\}$ base di W e $\dim W = \dim V = n$

se per assurdo B non è una base di $V \Rightarrow \exists\, v \in V$ t.c.

$B' = \{w_1, \dots, w_n, v\}$ è base di $V \Rightarrow \dim V = n+1$ ↯

3) $V \simeq W \iff \dim V = \dim W$ (la dimensione è invariante completo per isomorfismo)

dim

$\Rightarrow$ Se $f: V \xrightarrow{\sim} W \Rightarrow$ f è iniettiva $\longrightarrow$ f è lineare e iniettiva $\Rightarrow \ker f = \{0\}$

f è surgettiva $\longrightarrow$ $\mathrm{Im}(f) = W \Rightarrow \dim(\mathrm{Im} f) = \dim(W)$

$$\Rightarrow \dim V = \underbrace{\dim \ker(f)}_{=0} + \underbrace{\dim(\mathrm{Im} f)}_{=\dim W} \Rightarrow \dim V = \dim W$$

$\Leftarrow$ Se $\dim V = \dim W = n$. $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V $\quad D = \{w_1, \dots, w_n\}$ base di W

Costruisco una $f: V \longrightarrow W$ t.c. $\forall v_i \in V$ $f(v_i) = w_i$

$v_i \longrightarrow w_i \qquad v = \sum_i a_i v_i \longrightarrow w_i = f(\sum a_i v_i) = \sum_i a_i f(v_i)$

f è lineare $\quad \forall v, v' \in V$ $\quad \exists\, w, w' \in W$ t.c. $f(v) = w$ e $f(v') = w'$

$v = \sum a_i v_i \qquad v' = \sum a'_i v_i$

$f(\lambda v + \mu v') = f\left(\left(\sum \lambda a_i v_i\right) + \left(\sum \mu a_i' v_i\right)\right) = \left(\sum \lambda a_i + \mu a_i'\right) f(v_i) =$

$= (\lambda + \mu) \sum (a_i + a_i') f(v_i) = (\lambda + \mu) \sum (a_i + a_i') w_i = \lambda f(v) + \mu f(v')$

f è iniettiva $\quad 0 = f(v) = \sum_j a_j w_j \Rightarrow$ tutti gli a_j sono nulli perché w_j sono elt di D base di W

f è surgettiva $\quad \forall v \in V \ \exists\, w \in W$ t.c. $f(v) = w$.

$w = \sum a_j w_j \Rightarrow w = f\left(\sum_j a_j v_j\right) \in \mathrm{Im}(f)$

$\Rightarrow V \simeq W$

Se $\dim V = n \quad V \simeq \mathbb{K}^n \quad \dim \mathbb{K}^n = n$ perché $C = \{E^1, \ldots, E^n\}$ è una base

Formule sulle dimensioni

1) $\dim V = \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f$ $\qquad f: V \longrightarrow W$ lineare

Sia $Z = \{z_1, \dots, z_k\}$ base di $\operatorname{Ker} f$

Estendo Z a base B di V $\qquad B = \{z_1, \dots, z_k, v_1, \dots, v_s\}$

Affermo che $D = \{f(v_1), \dots, f(v_s)\}$ è base di $\operatorname{Im} f$

$\forall v \in V \qquad v = \sum_i a_i z_i + \sum_j b_j v_j$

$$\operatorname{Im} f \ni f(v) = f\left(\sum_i a_i z_i + \sum_j b_j v_j\right) = \underbrace{f\left(\sum_i a_i z_i\right)}_{=0 \ \in \operatorname{Ker}(f)} + f\left(\sum_j b_j v_j\right) =$$

$= f(v) = f\left(\sum b_j v_j\right) \Rightarrow$ generano.

lin. indip.

$w_i \in Im(f)$ $\quad w_i = \sum_i a_i f(v_i) = 0 \iff a_i = 0$ lo dimostro

$w_i = \sum_i a_i f(v_i) = f\left(\sum_i a_i v_i\right) = 0 \Rightarrow \sum_i a_i v_i \in Ker(f)$

lo scrivo come comb. lineare di elt di Ker f

$\sum a_i v_i = \sum_j b_j z_j \Rightarrow \sum_i a_i v_i - \sum_j b_j z_j = 0$ ma questa è una comb. lineare di elt di B base di V. che per hp sono lin. indip $\Rightarrow a_i = b_j = 0 \ \forall i, j$.

Formula di Grassmann.

V $\mathbb{K}$-sp. v. W, Z ssp di U

$$\dim(W+Z) = \dim(W) + \dim(Z) - \dim(W \cap Z)$$

$B_1 = \{t_1, \dots, t_k\}$ base di $W \cap U$

Estendo B_1 a base di W $B_2 = \{t_1, \dots, t_k, w_1, \dots w_r\}$

Estendo B_1 a base di Z $B_3 = \{t_1, \dots, t_k, z_1, \dots z_s\}$

Affermo che $B = \{t_1, \dots, t_k, w_1, \dots w_r, z_1, \dots z_s\}$ è base di $W+Z$

$\forall\, v \in W + Z \qquad v = w + z \quad w \in W \;\; e \;\; z \in Z.$

$$v = w + z = \left(\sum_j a_j t_j + \sum_i b_i w_i\right) + \left(\sum_j a_j' t_j + \sum_k c_k z_k\right) =$$

$$= \sum_j (a_j + a_j') t_j + \sum_i b_i w_i + \sum_k c_k z_k \implies \text{generano } W+U.$$

$$0 = v = w + u = \underbrace{\sum_j a_j t_j + \sum_i b_i w_i + \sum_k c_k z_k}_{\in W\cap Z} = \underset{\cap\, W\cap Z}{0} \iff a_j = b_i = c_k = 0 \quad \forall\, i, j, k.$$

$$\underbrace{\sum a_j t_j + \sum_i b_i w_i}_{\in W} = \sum_k (-c_k) z_k. \in Z \qquad \in W \cap Z$$

$$\Rightarrow \sum (-c_k) z_k = \sum_s d_s t_s \Rightarrow \underbrace{\sum_s d_s t_s + \sum_k c_k z_k}_{\in Z} = 0$$

e dè comb lineare di B_3

$$\Rightarrow d_s = c_k = 0 \quad \forall s, k.$$

Allo stesso modo $0 = v = w + z = \overbrace{\sum a_j t_j + \sum b_i w_i + \sum c_k z_k}^{\in W \cap Z} = 0$ $\in W \cap Z$

$$\underbrace{\sum a_j t_j + \sum c_k z_k}_{\in Z} = \underbrace{\sum (-b_i) w_i}_{\in W}$$

$$\sum_i (-b_i) w_i = \sum_s d_s t_s \Rightarrow \sum_s \underbrace{d_s t_s + \sum b_i w_i}_{\in W \text{ comb lin. di } B_2.} = 0$$

$$\Leftrightarrow d_s = b_i = 0 \quad \forall s, i.$$

Per cui ho dim. l'indip. lineare

$$\sum_j a_j t_j + \sum_i b_i w_i + \sum_k c_k z_k = 0 \Leftrightarrow a_j = b_i = c_k = 0 \quad \forall i, j, k.$$

La formula di Grassmann è una conseguenza della form. di nucleo e immagine.

V, W $\mathbb{K}$ sp. v.

Considero
$$f : V \times W \longrightarrow V + W \qquad f \text{ lineare e surgettiva}$$
$$(v, w) \longrightarrow v + w$$

f surgettiva $\Rightarrow \operatorname{Im} f = V + W \Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = \dim (V + W)$

$\operatorname{Ker} f = \{ (v, w) \in V \times W \text{ t.c. } v + w = 0 \text{ cioè } v = -w \} = V \cap W$

$\operatorname{Ker} f = \{ (z, -z) \text{ t.c. } z \in V \cap W \}$

$\dim \operatorname{Ker} f = \dim (W \cap U)$

Uso la 1ª formula

$$\dim (V \times W) = \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f$$

$$\dim V + \dim W = \dim (V+W) + \dim (V \cap W)$$

$$\Rightarrow \dim (V+W) = \dim V + \dim W - \dim (V \cap W)$$

La 1ª formula è una conseguenza di Grassmann.

$f: V \to W \qquad V, W \ \mathbb{K}\text{-sp. v.}$

Considero

- $V \times \{0\} = \{(v, 0) \mid v \in V\} \simeq V \Rightarrow \dim V = \dim (V \times \{0\})$
- $\mathcal{G}(f) = \{(v, f(v)) \mid v \in V \text{ e } f(v) \in \operatorname{Im} f\} \simeq V \Rightarrow \dim V = \dim \mathcal{G}(f)$
- $V \times \{0\} \cap \mathcal{G}(f) = \{(v, f(v)=0) \mid v \in V \text{ e } f(v) = 0\} \simeq \operatorname{Ker} f$

  $\Rightarrow \dim (V \times \{0\} \cap \mathcal{G}(f)) = \dim \operatorname{Ker}(f)$
- $V \times \{0\} + \mathcal{G}(f) = \{(v, 0) + (v', f(v'))\} = \{v + v', f(v')\} \simeq V \times \operatorname{Im} f$

Uso Grassmann.

$$\dim\left(V\times\{0\}+G(f)\right)=\dim\left(V\times\{0\}\right)+\dim\left(G(f)\right)-\dim\left(V\times\{0\}\cap G(f)\right)$$

$$\dim\left(V\times \operatorname{Im} f\right)=\dim V+\dim V-\dim \ker f$$

$$\cancel{\dim V}+\dim \operatorname{Im} f=\cancel{\dim V}+\dim V-\dim \ker f$$

$$\Rightarrow \dim V=\dim \operatorname{Im} f+\dim \ker f.$$

SPAZIO QUOZIENTE.

$\dim V = n$ $\quad$ W ssp di V $\quad$ V/W = spazio quoziente

$\pi : V \to V/W$ $\quad$ π è lineare e surgettiva.

$$\dim V = \underset{\underset{\dim(V/W)}{\parallel}}{\dim \operatorname{Im}(\pi)} + \underset{\underset{\dim W}{\parallel}}{\dim \operatorname{Ker}(\pi)} \quad \Rightarrow \dim(V/W) = \dim V - \dim W$$

Ogni W ammette spazi complementari U in V cioè tali che $V = W \oplus U$

Sia $D = \{w_1, \dots, w_k\}$ base di W estendo D a $B = \{w_1, \dots, w_k, u_1, \dots u_t\}$ base di V e prendo $U = \operatorname{Span}(u_1, \dots, u_t)$.

la restrizione $\pi|_U : U \to V/W$ è isomorfismo

- $\pi|_U$ e' surgettiva

$z \in V/W \qquad z = \pi(v) \qquad\qquad v = w + u$ in modo unico

$$\pi(v) = \pi(w+u) = \underbrace{\pi(w)}_{0} + \pi(u) = \pi(u) = \pi|_U(u)$$

- $\pi|_U$ è iniettiva

$\operatorname{Ker} \pi = W$

$\operatorname{Ker} \pi|_U = \operatorname{Ker} \pi \cap U = W \cap U = \{0\}$

$\Rightarrow \pi|_U$ è bigettiva

Isomorfismo canonico tra i complementari di W.

Sia $V = U \oplus W$ e $V = U \oplus W'$

$\forall w \in W \; \exists! \; u \in U$ e $w' \in W'$ t.c. $w = u + w'$.

Allora l'applicazione è ben definita $\varphi : W \longrightarrow W'$ t.c. $\varphi(w) = w'$

e φ è iso canonico.

- φ è lineare $w_1 = u_1 + w_1'$ e $w_2 = u_2 + w_2'$

  Allora - $\varphi(w_1 + w_2) = \varphi((u_1 + w_1') + (u_2 + w_2')) =$

  $= \varphi((u_1 + u_2) + (w_1' + w_2')) = w_1' + w_2' = \varphi(w_1) + \varphi(w_2)$

- $\varphi(\lambda w) = \varphi(\lambda u + \lambda w') = \lambda w' = \lambda \varphi(w)$

- φ è iniettiva poiché se $w \in \ker(\varphi) \Rightarrow \varphi(w) = 0 \Rightarrow w = \underset{\in W}{u} + \underset{=\varphi(w)}{0} \Rightarrow$
$\Rightarrow w \in U \cap W = \{0\}$.
- $\dim W' = \dim V - \dim U = \dim W$ e φ è iniett $\Rightarrow \varphi$ è surg.
- φ non dipende dalle basi $\Rightarrow \varphi$ è iso canonico.

π_W è la proiezione indotta da $V = U \oplus W'$ $\quad \pi_W : V \longrightarrow W'$

$\iota_W : W \longrightarrow V \quad \iota_W(w) = w \quad \forall w \in W$

Allora $\pi_W \circ \iota_W = \varphi$

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\iota_W"] \arrow[rr, bend right, "\varphi"'] & V \arrow[r, "\pi_W"] & W' \end{tikzcd}$$

Ogni W ssp di V ha un complementare.

Se $\dim V = n \Rightarrow \dim W \leq \dim V = n$

Sia $\{w_1, \dots, w_k\}$ base di W

completo a base di V $\quad B = \{v_1, \dots, v_s, w_1, \dots, w_k\}$

$V = W \oplus \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_s) = W \oplus U \Rightarrow U$ è un complementare

$f: V \to W$ è iso $\Longleftrightarrow$ manda una base di V in una di W

dim

1) Basta dim che f è iniettiva $\Longleftrightarrow$ manda vettori lin. indip di V in vettori lin. indip. di W.

2) f è surgettiva $\Longleftrightarrow$ manda generatori di V in generatori di W

dim

1) $\Rightarrow$ Siano $\{v_1, \dots, v_n\}$ lin. indip. $\Rightarrow \sum a_i v_i = 0 \Longleftrightarrow a_i = 0 \ \forall i$

f è lineare $\Rightarrow \sum a_i f(v_i) = 0 \Longleftrightarrow f(\sum a_i v_i) = 0 \Rightarrow \sum a_i v_i \in \operatorname{Ker} f$

Ma $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ perché f è lineare e iniettiva $\Rightarrow \sum a_i v_i = 0 \Rightarrow a_i = 0$

$\Rightarrow \{f(v_1), \dots f(v_n)\}$ sono lin. indip.

$\Leftarrow$ Se $v \neq 0 \Rightarrow v$ è lin indip. $\Rightarrow f(v)$ è lin. indip per hp.
$f(v) \neq 0 \Rightarrow v \notin Ker(f)$ Pertanto $\forall v \neq 0$ $v \notin Ker(f) \Rightarrow ker(f) = \{0\}$
$\Rightarrow$ f è iniettiva

2) $\Rightarrow$ $\forall w \in W$ $\exists v \in V$ t.c. $f(v) = w$. Sia $\{v_1, \dots v_n\}$ un insieme di generatori $\Rightarrow w = f(v) = f(\sum a_i v_i) = \sum a_i f(v_i) = w$
$\Rightarrow \{f(v_i), \dots f(v_n)\}$ è un sistema di generatori

$\Leftarrow$ Per hp $\{f(v_1), \dots f(v_n)\}$ è un sistema di generatori

$\Rightarrow \forall v_i \in V \ \exists \ f(v_i) = w_i$. $\Rightarrow f$ è surgettiva.

A è invertibile $\Leftrightarrow$ le colonne di A sono lin. indipendenti.

$\Rightarrow$ Se A è invertibile $\Rightarrow \exists A^{-1} \in GL(n, \mathbb{K})$ t.c. $AA^{-1} = I_n$

Considero $A = (A^1, \dots, A^n)$ e scrivo le colonne di A come comb. lineare con i coefficienti delle colonne di A^{-1}

$a_{1j} A^1 + \dots + a_{nj} A^n = E^j = j$-esima colonna dell' I_n

al variare di j ottengo che $a_{1j} A^1, \dots, a_{nj} A^n$ generano $E^1, \dots, E^n$

ma $E^1, \dots, E^n$ sono lin. indip. $\Rightarrow A^1, \dots, A^n$ sono lin. indip.

$\Leftarrow$ Se $A = (A^1, \dots, A^n)$ sono lin. indip. sono una base di $\mathbb{K}^n$ e posso scrivere ogni vettore della base canonica di $\mathbb{R}^n$ come comb lineare delle colonne di A $\quad E^i = \lambda_1 A^1 + \dots + \lambda_n A^n$

$\lambda_1, \dots \lambda_n$ sono i coeff. della matrice $A^{-1} \Rightarrow A$ è invertibile.