MOMENTI DI INERZIA

mercoledì 17 aprile 2024 09:56

Fatti di Teoria

- Un corpo e' omogeneo se la sua densita' e' cost $\sigma = \frac{m}{area}$
- Matrice di inerzia $\begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix} = I_Q$ la mat. e' simmetrica

$$I_{11} = \int_C \sigma (y^2+z^2)\, dx dy$$
$$I_{22} = \int_C \sigma (x^2+z^2)\, dx dy$$
$$I_{33} = \int_C \sigma (x^2+y^2)\, dx dy$$
$$I_{12} = -\int_C \sigma\, xy\, dx dy$$
$$I_{13} = -\int_C \sigma\, xz\, dx dy$$
$$I_{23} = -\int_C \sigma\, yz\, dx dy$$

il dxdy mi dice che la figura sta nel piano
se l'oggetto fosse 1D allora avrei solo dx (tipo asta)
se l'oggetto fosse 3D allora avrei dxdydz

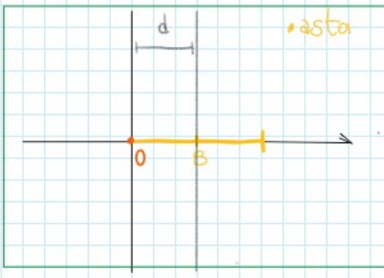
direzioni principali

- se la figura e' piana $\Rightarrow \hat{e_3}$ e' una direz. principale
- se la figura e' 1D $\Rightarrow \hat{e_3}, \hat{e_2}$ sono direz princ. $\Rightarrow$ anche $\hat{e_1}$ lo e' dato che $\hat{e_1} \perp \hat{e_2}$, $\hat{e_1} \perp \hat{e_3}$
- Se trovo un SR principale $\Rightarrow I_B = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}$
- Se la figura e' piana $I_1 + I_2 = I_3$
- Se tutte le dir sono principali $I_1 = I_2 \Rightarrow I_B = \begin{bmatrix} I_1 & & \\ & I_1 & \\ & & 2I_1 \end{bmatrix}$
- Se trovo un piano di simmetria per il corpo $\Rightarrow$ la direz. ortogonale a tale piano è una direz principale di inerzia
- Nel quadrato e nel disco tutte le dir. sono principali
- se le dir. non sono princ. scrivo I_{11} non I_1

Teorema di Huygens - Steiner

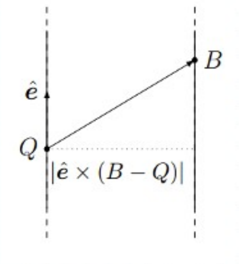
$I_{Q\hat{e}} = I_{B\hat{e}} + m\,|\hat{e} \times (B-Q)|^2$ B baricentro del corpo.

$I_Q = I_B + m d^2$ dove d è la dist. tra l'asse passante per B e quello passante per Q



$I_{B,11} = I_1 = I_{O,11}$ perche' O e B stanno sullo stesso asse (l'asse x)

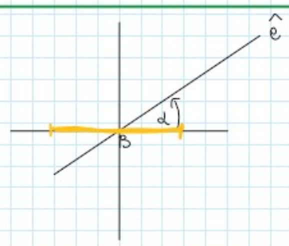
$I_{O,22} = I_{B,22} + m d^2$



• $\hat{r}$ direzione qualsiasi

scrivo le componenti di $\hat{r}$

$\boxed{I_{Q\hat{r}} = \hat{r}\, I_Q\, \hat{r}}$ la uso quando mi chiede il mom di inerzia rispetto a un asse ($\hat{r}$) passante per Q



$\hat{e} = \cos\alpha\, \hat{e_1} + \sin\alpha\, \hat{e_2}$

$$I_{B\hat{e}} = \hat{e} \cdot I_B\, \hat{e} = (\cos\alpha, \sin\alpha, 0)\begin{bmatrix} 0 & & \\ & \frac{m\ell^2}{12} & \\ & & \frac{m\ell^2}{12} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

vett colonna

Ricorda $M \cdot \underline{v} = \underline{v}$ → vett colonna

$\underline{v}^T \cdot \underline{v} =$ numero

vett riga ↪ vett colonna

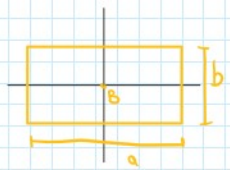
Momenti di inerzia noti (rispetto a B) all'esame le vuole con σ

• asta sull'asse x

$I_1 = 0$, $I_2 = \frac{m\ell^2}{12} = \frac{\sigma \ell^3}{12}$

• disco $I_1 = I_2 = \frac{1}{4} m R^2 = \frac{1}{4}\sigma \pi R^4$ $\sigma = \frac{m}{\pi R^2}$

• rettangolo



$I_1 = \frac{1}{12} m b^2 = \frac{1}{12}\sigma a b^3$

$I_2 = \frac{1}{12} m a^2 = \frac{1}{12}\sigma b a^3$

$\sigma = \frac{m}{\text{area}} = \frac{m}{ab}$

• quadrato

$I_1 = I_2 = \frac{1}{12} m \ell^2 = \frac{1}{12}\sigma \ell^4$ $\sigma = \frac{m}{\ell^2}$

• cilindro

$\hat{e_3}$ non è più gratis è una direz. princ. di inerzia perchè è di simm per rotaz.

$I_3 = \frac{1}{2} m R^2$ $\sigma = \frac{m}{\text{volume}} = \frac{m}{\pi R^2 h}$

$$\begin{bmatrix} I_1 & & \\ & I_1 & \\ & & I_3 \end{bmatrix}$$

Tutte le dir. del piano sono principali

$I_1 = \frac{1}{4} m R^2 + \frac{1}{12} m h^2$

$C = \{(x,y,z) \mid 0 \le r \le R,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ -\frac{h}{2} \le z \le \frac{h}{2}\}$

• corona circolare $\begin{bmatrix} I_1 & & \\ & I_1 & \\ & & 2I_1 \end{bmatrix}$

$I_3 = \frac{1}{2}\sigma\pi R_2^4 - \frac{1}{2}\sigma\pi R_1^4$ $\sigma = \frac{m}{\pi R_2^2 - \pi R_1^2}$

I_3 disco grande, I_3 disco piccolo

corpo rigido forato C_0

$$I^{(C_0)} = I^{\text{oggetto grande}} - I^{\text{foro}}$$

⚠ meglio farlo con σ perchè le masse sono diverse

$$\sigma = \frac{m}{\text{area corpo grande} - \text{area corpo piccolo}}$$

Somma di due corpi rigidi

$$I^{\text{corpo totale}} = I^{\text{corpo 1}} + I^{\text{corpo 2}}$$

formula per il baricentro

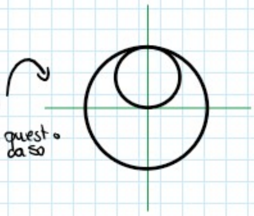
- $m(B-O)$

se ho 2 corpi $\Rightarrow m(B-O) = m_1(B_1-O) - m_2(B_2-O)$

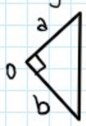
se sta sull'asse y $\Rightarrow$

$$m y_B = m_1 y_{B_1} - m_2 y_{B_2}$$

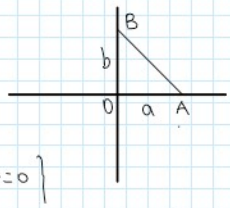
in questo caso



Triangolo



mi metto in un SR centrato in O



$$C = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.c. } 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le -\frac{b}{a}x + b,\ z = 0 \right\}$$

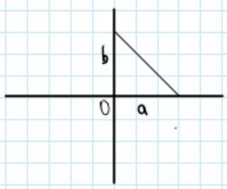
⚠ qui $I_{12} \neq 0$

formula retta passante per 2 pti $\underset{A}{(x_1,y_1)}, \underset{B}{(x_2,y_2)}$

$$\boxed{\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}}$$

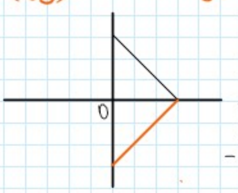
Simmetrie

$$\sigma = \frac{2m}{ab} \Rightarrow m = \frac{\sigma a b}{2}$$



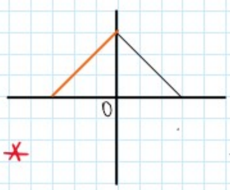
$$I_{1,1} = \frac{1}{6}\frac{\sigma ab}{2} b^2 = \frac{1}{12}\sigma a b^3$$
$$I_{2,2} = \frac{1}{6}\frac{\sigma ab}{2} a^2 = \frac{1}{12}\sigma a^3 b$$
$$I_{3,3} = \frac{1}{6}\frac{\sigma ab}{2}(a^2+b^2) = \frac{1}{12}\sigma ab(a^2+b^2)$$
$$I_{1,2} = -\frac{1}{12}\frac{\sigma ab}{2} ab = -\frac{1}{24}\sigma a^2 b^2$$

$(x,y) \longmapsto (x,-y)$



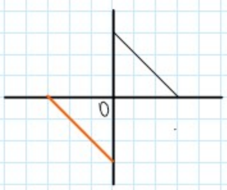
$I_{11} = I_{11}$
$I_{22} = I_{22}$
$I_{33} = I_{33}$
$-I_{12} = I_{12}$ *

$(x,y) \longmapsto (-x,y)$



$I_{11} = I_{11}$
$I_{22} = I_{22}$
$I_{33} = I_{33}$
$-I_{12} = I_{12}$ *

$(x,y) \longrightarrow (-x,-y)$



$I_{11} = I_{11}$
$I_{22} = I_{22}$
$I_{33} = I_{33}$
$I_{12} = I_{12}$

$(x,y) \longmapsto (x+a,y)$

$I_{11} = I_{11}$

il resto cambia

$(x,y) \longmapsto (x,y+a)$

$I_{22} = I_{22}$

il resto cambia

⚠ nel triang non so a priori le direz. princip. di inerzia

Per trovarle calcolo gli autovalori di $I = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{21} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{bmatrix}$

e poi gli autovettori relativi ai λ_i

gli autovettori saranno le mie direz princip di inerzia.

$(A - \lambda_i I)\underline{v} = 0$ con $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

risolvo il sistema

Corpo non omogeneo

$\sigma(x,y) = \bar{\sigma}\, y/l$

$m = \int_C \sigma(x,y)\, dx\, dy = \int_C \bar{\sigma}\, y/l \; dx\, dy$

Per trovare il baricentro

$m(B-O) = \int_C x' \rho(x')\, dx' = \int_C \sigma(x,y)\, \underset{=}{\underline{x}}\, dx\, dy\, dz$ $\quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

se dalla figura deduco ad esempio che B sta sull'asse $y \Rightarrow x_B = z_B = 0$

$\Rightarrow m(x_B - x_O)\,\hat{e_2} = \int_C \sigma(x,y)\, y\, dx\, dy$