AUTOMORFISMI

giovedì 13 ottobre 2022 11:05

- G gruppo, $Aut(G) = \{\varphi : G \to G \mid \varphi \text{ isomorfismo}\}$ $(Aut(G), \circ)$ è gruppo
- $Aut(G) < S(G) = \{f : G \to G \mid f \text{ bigettiva}\} =:$ permutazioni di G
- $Aut(\mathbb{Z}) = \{\pm 1\} = \{\pm id\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
- $Aut(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^*$
- $Aut(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong S_3 = Aut(S_3)$
- $Aut(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \_ \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \cong Gl_n(\mathbb{F}_p)$
- Sia G gruppo definisco il coniugio $\varphi_g : G \to G$, $x \mapsto gxg^{-1} =:$ coniugato di g $\quad \varphi_g$ omo
- $\varphi_g \in Aut(G)$ $\forall g \in G$ cioè il coniugio è un automorfismo
- $\{\varphi_g \mid g \in G\} = Inn(G) \trianglelefteq Aut(G)$ $\quad$ $Inn(G) :=$ gruppo degli automorfismi interni

1 - Se G è abeliano $\Rightarrow Inn(G) = \{id\}$

2 - $Inn(G) \cong G/Z(G)$

3 - $G/Z(G)$ ciclico $\Rightarrow G$ abeliano $\Rightarrow Inn(G) \overset{2}{\cong} G/Z(G) \overset{1}{=} \{id\}$

- I sgr $\trianglelefteq$ sono invarianti per automorfismi interni in tal caso ho $Inn(G) \to Aut(N)$, $\varphi_g \mapsto \varphi_{g|N} : N \to N$

  $N \trianglelefteq G \Leftrightarrow \varphi_g(N) \subseteq N$ $\forall \varphi_g \in Inn\,G$ $\quad$ cioè $\forall g \in G$ $gNg^{-1} = N$

  $\varphi_{g|N} \in Aut(N)$:
  - $\to$ φ_g inj $\Rightarrow \varphi_{g|N}$ è inj
  - $\to$ Surgettivo perché $\varphi_g(N) = N$
  - $\to$ φ_g è omo in $G \Rightarrow \varphi_g$ omo in $N \leq G \Rightarrow \varphi_{g|N}$ omo

- Dato $H \leq G$ H è caratteristico se è invariante per automorfismi cioè $f(H) = H$ $\forall f \in Aut(G)$
- H caratteristico in $G \Rightarrow H \trianglelefteq G$ $\quad$ Non vale il viceversa

  $\hookrightarrow$ invariante per tutti gli aut. di G $\quad$ $\hookrightarrow$ invariante per aut interni di G.

- $Z(G)$ è un sgr. caratt.

Automorfismi di $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$

- $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$ è uno sp. vettoriale su $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

  $Aut((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n) \cong GL((\mathbb{F}_p)^n) = \{\varphi : (\mathbb{F}_p)^n \to (\mathbb{F}_p)^n \mid \varphi \text{ è iso si sp v}\}$

  $GL((\mathbb{F}_p)^n) \cong GL(\mathbb{F}_p) = \{M \in M_{n \times n}(\mathbb{F}_p) \mid \det M \neq 0\}$

  quindi posso rappresentare ogni automorfismo di $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$ con una matrice invertibile $n \times n$

- $|Aut(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n| = \prod_{i=0}^{n-1} (p^n - p^i)$

Automorfismi di un prodotto diretto

H, K gruppi finiti

$i: Aut(H) \times Aut(K) \longrightarrow Aut(H \times K)$

$$(\varphi_1, \varphi_2) \longmapsto \varphi_1 \times \varphi_2 : H \times K \longmapsto H \times K$$
$$(g_1, g_2) \longmapsto (\varphi_1(g_1), \varphi_2(g_2))$$

i è ben definita ed è un omo inj.

- $Aut(H) \times Aut(K) \leq Aut(H \times K)$
- $Aut(H) \times Aut(K) \cong Aut(H \times K) \iff H \times \{e_K\}$ e $\{e_H\} \times K$ sono sgr caratteristici di $H \times K$
- H, K gruppi finiti se $(|H|, |K|) = 1 \Rightarrow H \times \{e_K\}$ e $\{e_H\} \times K$ sono sgr caratteristici di $H \times K$
- Se $m, n \geq 2$ $(m, n) = 1 \Rightarrow Aut(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong Aut(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \times Aut(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$
- $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^*$
- $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}^* \cong (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ se $(m, n) = 1$
- $\mathbb{Z}_{pq}$ p, q primi $\neq 2$ e $(p, q) = 1$ $\mathbb{Z}_{pq}^*$ non è ciclico
- $Aut(S_n) \cong S_n$ se $n \neq 6$ e $n \geq 3$

$$Aut(\mathbb{Z}_{p^\alpha}) \cong \underbrace{(\mathbb{Z}_{p^\alpha})^* \cong \mathbb{Z}_{\varphi(p^\alpha)} \cong \mathbb{Z}_{p^{\alpha-1}(p-1)}}_{\text{è ciclico se } n \geq 3 \text{ e } \alpha \geq 2}$$

Sia $\alpha \geq 3$ $(\mathbb{Z}_{2^\alpha})^* \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{2^{\alpha-2}}$

SOTTOGRUPPO CARATTERISTICO

- $K < G$ K è caratteristico se $\forall \varphi \in Aut(G) \Rightarrow \varphi(K) = K$
- $K \trianglelefteq G$ perché $C_g(K) = gKg^{-1} = K$.
- Per provare che H è caratteristico in G basta provare che $\forall \varphi \in Aut(G)$ vale che $\varphi(H) \subseteq H$ perché φ è invertibile $\Rightarrow H \subset \varphi^{-1}(H)$
- $G, \{e\}, Z(G)$ sono sempre caratteristici.
- Se $G \cong H \times K$ e $K, H < G$ e $|H| = n$ e $|K| = m$ $(n, m) = 1 \Rightarrow$ H e K sono caratteristici.
- $\phi: Aut(H) \times Aut(K) \longrightarrow Aut(H \times K)$ è iso $\iff$ H e K sono caratteristici di $G = H \times K$.
- Tutti i sgr. di un gruppo ciclico G sono caratteristici.