Dn

mercoledì 3 novembre 2021 12:14

$D_n = \{ s^i r^j \mid i \in \{0,1\},\ j \in \{0, \dots, n-1\} \}$

$D_n = \langle s, r \rangle$ con $\langle r \rangle \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ e $\langle s \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$D_n \equiv$ il gruppo delle isometrie del piano generate da s e da r
- $r \equiv$ rotazione di $\mathbb{R}^2$ attorno all'origine di $\frac{2\pi}{n}$ gradi
- $s \equiv$ riflessione o simmetria rispetto all'asse verticale.

$D_n \equiv$ gruppo delle isometrie del piano che mandano un n-agono regolare in se stesso con la composizione.
- $r \equiv$ rotazione dell'n-agono attorno al suo centro che manda ciascun vertice nel vertice a lui adiacente.
- $s \equiv$ riflessione rispetto a un suo asse di simmetria.

elt di Dn

$$\left.\begin{array}{l} id \\ r, r^2, r^3, \dots, r^{n-1} \end{array}\right\} (n \text{ rotazioni})$$

$s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}$ (n simmetrie) in generale sr^k è la simmetria rispetto a un asse

oss.

se n è pari ci sono 2 tipi diverse di simmetrie

quelle rispetto agli assi dei lati

quelle rispetto alle diagonali.

proprietà di Dn

$|D_n| = 2n$ (n rotazioni + n simmetrie

$s^2 = e$

$r^n = e$

$s^i r^j = s^{i'} r^{j'} \iff i = i'$ e $j = j'$

$sr = r^{-1}s$ e $srs^{-1} = r^{-1}$, $srs = r^{-1}$

Sottogruppi di Dn

$R = \langle r \rangle = \{e, r, r^2, \dots, r^{n-1}\} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ = sottogruppo delle rotazioni

$\forall d \mid n \ \exists! \ H < R$ t.c. $|H| = d$ dove $H = \langle r^{n/d} \rangle$

$K < D_n$ t.c. $K \nsubseteq R$ $\quad K = \langle r^d, sr^k \rangle$ con $d \mid n$ e $0 \le k < d$ (distinti)

ce ne sono $\phi(d)$

Sottogruppi $\triangleleft$ di D_n

$R \triangleleft D_n$ (ha indice 2)

$\langle r^k \rangle$ t.c. $k | n$ (è caratt. in R in quanto è l'unico del proprio ordine)
$\Rightarrow$ è normale in D_n

$\langle r^d, sr^k \rangle$

Classi di coniugio

$Cl(r) = \{r, srs^{-1}\} = \{r, r^{-1}\}$

Le classi di coniugio per una rotazione r^h sono costituite dagli elementi ottenuti da xr^hx^{-1} al variare di $x \in D_n$:

- $\{e\}$ se $h = 0$;
- $\left\{r^h, r^{-h}\right\}$ con $h = 1, \dots, \frac{n}{2} - 1$ se n pari, con $h = 1, \dots, \frac{n-1}{2}$ se n dispari;
- $\left\{r^{\frac{n}{2}}\right\}$ se n pari. perché $\{r^{n/2}, r^{-n/2}\} = \{r^{n/2}\}$

Le classi di coniugio per una simmetria sr^k sono costituite dagli elementi ottenuti da xsr^kx^{-1} al variare di $x \in D_n$:

A
- Se n pari $\{sr^{2i}\}$ al variare di i (cioè tutte le simmetrie con rotazione ad esponente pari sono coniugate);

B
- Se n pari $\{sr^{2i+1}\}$ al variare di i (cioè tutte le simmetrie con rotazione ad esponente dispari sono coniugate);
- Se n dispari tutte le simmetrie sono coniugate.

Dunque tutti gli $N \triangleleft D_n$ sono:

- Gli $N < R \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
- Se $N \not< C_n$, allora contiene una riflessione e almeno tutta la sua classe di coniugio:
  - → Se n dispari allora N contiene tutte le riflessioni, in particolare s, sr e $ssr = r$ $\Rightarrow N = \langle s, r \rangle = D_n$;
  - → Se n pari allora N contiene almeno metà delle riflessioni (se le contiene tutte allora $N = D_n$) e cioè una delle 2 classi di coniugio. Quindi N è un sottogruppo del tipo $D_{\frac{n}{2}}$ (che sono 2).

A o B

Aut (Dn)

$D_n = \{ \theta^i \rho^j \mid \rho^n = \theta^2 = e \ \wedge \ \theta \rho \underset{\theta}{\overset{\shortparallel}{\theta^{-1}}} = \rho^{-1} \}$

$f : D_n \longrightarrow D_n$

$\theta \longrightarrow a = \theta \rho^j$ con $j = 0, \ldots, n-1$

$\rho \longrightarrow b = \rho^i$ con $(i, n) = 1$

$ord(\rho) = n$ Io voglio che $ord(\overbrace{f(\rho)}^{b}) = ord(\rho) = n$

le rotazioni devono andare in altre rotazioni e ci sono $\boxed{\phi(n)}$ generatori delle rotazioni in Dn.

$ord(f(\theta)) = 2 = ord(\theta)$

Abbiamo n elt. di ordine 2 cioè le n simmetrie che posso scrivere come $\theta \rho^i$ con i qualsiasi.

Al più ho $\boxed{n \cdot \varphi(n)}$ automorfismi.

Un $\forall$ elt di Dn lo scrivo come $\theta^a \rho^b$

1) $f(\theta^a \rho^b) = (\theta \rho^j)^a \rho^{ij}$

2) f è omo.

- $f(e) = e$
- $f(\rho^{-h}) = f(\rho^{n-h}) = \rho^{i(n-h)} = \rho^n \rho^{-ih} = f(\rho^h)^{-1}$
- $f((\theta \rho^h)^{-1}) = f(\theta \rho^h)^{-1}$
- $f(\theta \rho^h \theta \rho^k) = \rho^{-ih+ik} = \rho^{-ih} \rho^{ik} = f(\theta \rho^h) f(\theta \rho^k)$