IRRIDUCIBILITA' DI POLINOMI SU CAMPI.

1) I SEGUENTI RISULTATI VALGONO PER QUALUNQUE CAMPO K (ad esempio, **C, R, Q, Z**p; non e' detto che valgano su **Z: Z** non e' un campo!).

1a) Ogni polinomio di grado 1 e' irriducibile (su qualunque campo).

1b) Un polinomio di grado maggiore di uno che ammette una radice appartenente a K e' riducibile su K.

1c) Il viceversa vale per polinomi di grado 2 e 3: un polinomio di grado 2 oppure 3 che non ammette radici in K e' necessariamente irriducibile.

2) Su **C**: un polinomio e' irriducibile se e solo se ha grado 1.

3) Su **R**: i polinomi irriducibili sono esattamente:

3a) tutti i polinomi di primo grado.
3b) i polinomi di secondo grado che non hanno radici (cioe' quelli col "delta" minore di zero).

Tutti gli altri polinomi sono riducibili su **R**.

4) Su **Q**.

4a) Conviene innanzitutto ricondursi al caso in cui il polinomio e' a coefficienti interi ed e' primitivo (cioe' "fare il comun denominatore" e semplificare tutti i fattori comuni; si dovrebbe dire, con terminologia piu' accurata, che ogni polinomio a coefficienti in **Q** e' associato ad un polinomio a coefficienti interi primitivo). Poi:

4b) si possono cercare radici razionali del polinomio (basta un numero finito di tentativi, vedi Proposizione 6.5 del testo "Md" oppure 3.3.14 del testo "Algebra").
- se il polinomio ha grado 1, allora e' irriducibile.
- se il polinomio ha una radice appartenente a **Q**, e grado maggiore di uno, allora e' riducibile.
- se il polinomio ha grado 2 o 3, allora e' irriducibile se e solo non ha radici in **Q**.
- resta il caso in cui il polinomio ha grado maggiore di 3 e nessuna radice in **Q**. Si puo' allora tentare con:

4c) Criterio di Eisenstein (N.B.: il criterio di Eisenstein e' solo una condizione **sufficiente** per l'irriducibilita': se si puo' applicare Eisenstein, allora il polinomio e' certamente irriducibile su **Q**; ma ci sono polinomi irriducibili la cui irriducibilita' non puo' essere dimostrata usando Eisenstein!);

4d) Passaggio a **Z**p (anche questo criterio fornisce solo una condizione sufficiente!);

4e) Ricerca di fattori di secondo grado (come nell'esempio 6.7 del testo "Md" oppure nell'esempio 3.3.20. del testo "Algebra") N.B. Questo metodo e' solitamente molto lungo e laborioso, quindi meglio usarlo solo se non ci sono alternative).

5) Su **Z**p.

5a) Cercare eventuali radici (anche in questo caso basta un numero finito di tentativi: basta provare con tutti i numeri 0, 1, ..., p-1).

5b) la discussione e' identica al caso 4b).

5c) Se il polinomio ha grado maggiore di 3 e nessuna radice in **Z**p, si puo' tentare la ricerca di fattori di secondo grado, come nell'esempio 3.3.21. (N.B.: Il criterio di Eisenstein si puo' applicare solo per **Q**, non si puo' applicare per **Z**p !)

[Naturalmente, esistono anche altri metodi! Questo e' solo uno specchietto indicativo che dovrebbe essere sufficiente a risolvere la maggior parte degli esercizi che vi verranno proposti]